

СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАНЫХ ТАБЛИЦАМИ

А.Д. Тузов

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена при помощи таблицы некоторая функция $y(x)$, т.е. в точках $a=x_0 < x_1 < \dots < x_N=b$ известны ее значения $y_0, y_1, \dots, y_N$.

Сформулируем задачу сглаживания следующим образом: найти функцию $S(x)$, минимизирующую функционал $[1, 2]$

$$\Phi(u) = \int_a^b (u'')^2 dx + \sum_{j=0}^N \frac{1}{R_j} [u(x_j) - y_j]^2, \quad (1)$$

где R_j - весовые множители (положительные числа). Класс рассматриваемых функций есть дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Как показано в [1], решение этой задачи необходимо искать в классе кубических сплайнов. Запишем

$$S''(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad (2)$$

где $h_j = x_j - x_{j-1}$ ($j=1, 2, \dots, N$); $M_j = S''(x_j)$, $j=0, 1, \dots, N$. В качестве граничных условий примем $S''(a) = S''(b) = 0$ (т.е. $M_0 = M_N = 0$). Для определения коэффициентов M_j ($j=1, 2, \dots, N-1$) потребуем, чтобы функция $S(x)$ и ее первая производная $S'(x)$ были непрерывны в узлах сетки, т.е.

$$S(x_j - 0) = S(x_j + 0), \quad S'(x_j - 0) = S'(x_j + 0). \quad (3)$$

В таком случае требование минимизировать функционал (I) приводит к соотношению [2]:

$$-R_j \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{h_{j+1}} - \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} \right) = S(x_j) - y_j, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

где для единообразия записи введено $M_{-1} = M_{N+1} = 0$; $h_0 \cdot h_{N+1} \neq 0$.

Дважды интегрируя (2) и учитывая (3) и (4), получим для определения неизвестных коэффициентов M_j ($j = 1, 2, \dots, N-1$) систему $N-1$ линейных алгебраических уравнений

$$A \cdot M = F, \quad (5)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & b_2 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{N-5} & b_{N-4} & a_{N-3} & b_{N-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{N-4} & b_{N-3} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{N-3} & b_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_{N-1} \end{bmatrix}$$

есть пятидиагональная симметричная матрица с коэффициентами, зависящими от весовых множителей R_j :

$$a_j = \frac{1}{h_j^2} R_{j-1} + \left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \right)^2 R_j + \frac{1}{h_{j+1}^2} R_{j+1} + \frac{1}{6} (h_j + h_{j+1}), \quad j=1, 2, \dots, N-1;$$

$$b_j = - \left[\left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}} \right) R_j + \left(\frac{1}{h_{j+1}} + \frac{1}{h_{j+2}} \right) R_{j+1} \right] \cdot \frac{1}{h_{j+1}} + \frac{1}{6} h_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, N-2;$$

$$c_j = \frac{1}{h_{j+1}} - \frac{1}{h_{j+2}} R_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, N-3;$$

$$M = (M_1, M_2, \dots, M_{N-1})',$$

$$F = \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right)'$$

После решения системы (5) (использовался метод факторизации [3]^{*}) и определения коэффициентов M_j значения сглаживающей функции в узлах сетки можно найти, используя соотношение (4):

$$S(x_j) = y_j - R_j \left(\frac{M_{j+1} - M_j}{h_{j+1}} - \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j} \right) \quad (6)$$

При $R_j = 0$ получаем из (5) систему уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна, а из (6) — условие совпадения значений функции $S(x)$ в узлах с y_j : $S(x_j) = y_j$. Отсюда следует, что чем точнее значения y_j в узлах сетки, тем меньше должны быть величины весовых множителей R_j . Если при сглаживании возникает необходимость закрепить точку с номером k , то для этого надо потребовать, чтобы $R_k = 0$.

При сглаживании обычно известны ошибки в определении значений y_j , т.е. задаются неравенства

$$|S(x_j) - y_j| \leq \delta_j \quad (j = 0, 1, \dots, N). \quad (7)$$

В частности, может быть $\delta_j = \delta = \text{const}$. Для полного решения задачи сглаживания дадим алгоритм нахождения таких весовых множителей R_j , при которых выполнялись бы условия (7).

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \epsilon_j &= S(x_j) - y_j, \\ L_j &= \frac{M_{j+1} - M_j}{h_{j+1}} - \frac{M_j - M_{j-1}}{h_j}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда из (4) и (7) получим, что

$$R_j = \left| \frac{\epsilon_j}{L_j} \right| \leq \frac{\delta_j}{|L_j|}.$$

В соответствии с (8) построим итерации для определения R_j по следующей формуле:

$$R_j^{(i+1)} = \frac{\delta_j}{|L_j^{(i)}|}, \quad (9)$$

где i — номер итерации.

^{*} В [2] показано, что метод факторизации (прогонки), описанный в [3], устойчив при R_j , близких к нулю. При больших значениях R_j следует использовать метод прогонки, предложенный в [4].

Для получения начального приближения $L_j^{(0)}$ естественно построить кубический сплайн, проходящий через заданные точки.

Перепишем (9) следующим образом:

$$R_j^{(i+1)} = R_j^{(i)} \frac{\delta_j}{|R_j^{(i)} \cdot L_j^{(i)}|} = R_j^{(i)} \frac{\delta_j}{|\epsilon_j^{(i)}|}.$$

Отсюда видно, что если при i -й итерации для j -й точки неравенство (7) не выполнено ($|\epsilon_j^{(i)}| > \delta_j$), то $R_j^{(i+1)} < R_j^{(i)}$, т.е. следующая ($i+1$)-я итерация уменьшает весовой множитель R_j . Это способствует уменьшению $|\epsilon_j|$, т.е. выполнению условий (7).

Конец итераций определяется из требования, чтобы величина $|\max |\epsilon_j| - \delta_j|$ стала меньше некоторой величины — допустимой ошибки в удовлетворении неравенств (7).

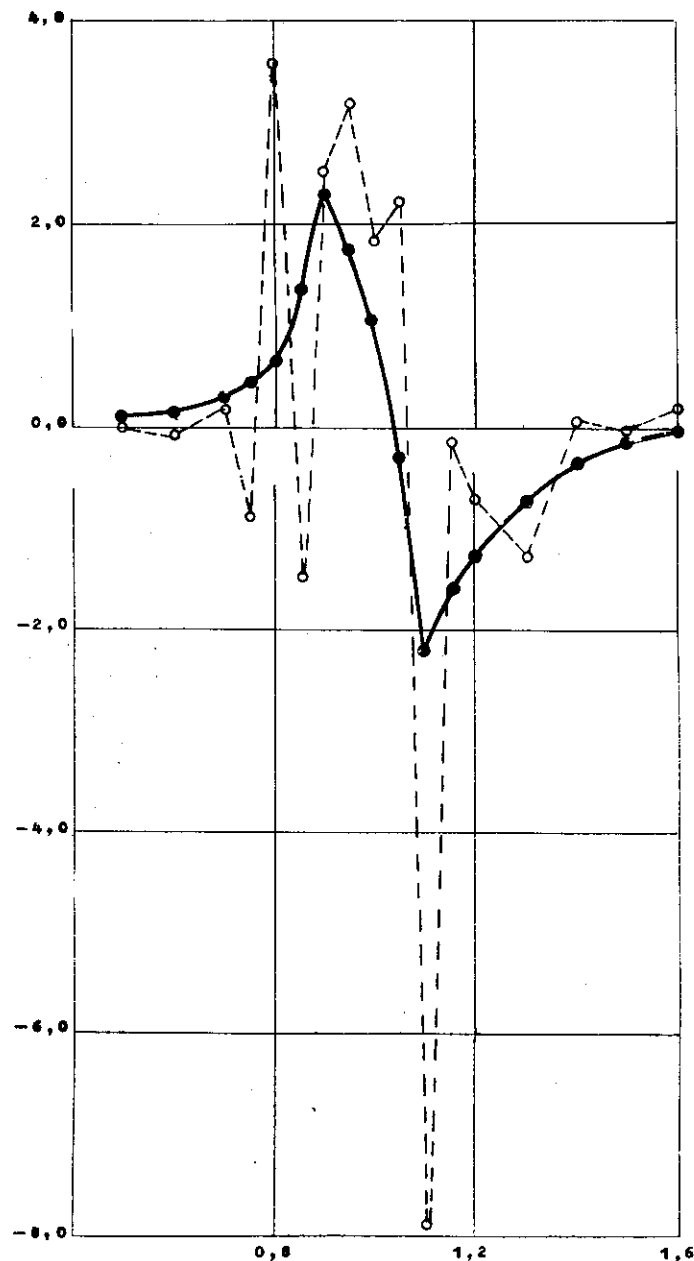
Так как описываемый метод применялся для сглаживания аэродинамических профилей, то для исключения возникающих при этом некоторых трудностей (бесконечная производная в "носке" и двузначность функции) использовалось параметрическое представление контура.

Пусть имеется последовательность точек $P_j(x_j, y_j)$ ($j = 0, 1, \dots, N$). Будем брать в качестве параметра t_j суммарную длину хорд

$$t_j = \sum_{i=1}^j P_{i-1} P_i$$

и решать задачу сглаживания для функции $S(t)$. При этом параметр будем уточнять на каждой итерации, так как он зависит от изменяющихся в процессе сглаживания ординат.

В качестве примера приведем результат сглаживания некоторой экспериментальной кривой. Хотя её поведение и не требовало введения параметра, тем не менее сглаживание производилось (чтобы не нарушать общности) так же, как и для двузначной функции. В данном примере $\delta_j = \delta = 0.01$. Влияние сглаживания на поведение кривизны представлено на рисунке (пунктирная линия — до сглаживания, сплошная — после сглаживания). В таблице приве-



Влияние сглаживания на поведение кривизны

Т а б л и ц а

Влияние сглаживания на поведение функции и кривизны

Точки	П а р а м е т р ы					
	x	y	K	$U_{\text{сгл.}}$	ϵ	$K_{\text{сгл.}}$
1	0.500	0.580	0.00830	0.571	-0.0087	0.12608
2	0.600	0.580	-0.04502	0.571	-0.0090	0.16871
3	0.700	0.580	0.17195	0.572	-0.0076	0.24487
4	0.750	0.580	-0.93852	0.574	-0.0059	0.39205
5	0.800	0.580	3.60641	0.577	-0.0032	0.80083
6	0.850	0.585	-1.51472	0.582	-0.0034	1.33318
7	0.900	0.590	2.47296	0.590	0.0000	2.31600
8	0.950	0.600	3.19204	0.604	0.0040	1.76385
9	1.000	0.618	1.87845	0.623	0.0050	1.03155
10	1.050	0.643	2.28628	0.645	0.0019	-0.31836
11	1.100	0.670	-7.87147	0.666	-0.0044	-2.21463
12	1.150	0.682	-0.17089	0.681	-0.0011	-1.55970
13	1.200	0.690	-0.70357	0.692	0.0016	-1.32055
14	1.300	0.700	-1.32922	0.704	0.0036	-0.76524
15	1.400	0.700	0.04560	0.708	0.0077	-0.33106
16	1.500	0.698	-0.05329	0.708	0.0100	-0.14455
17	1.600	0.696	0.16750	0.707	0.0108	-0.03993

дены значения функции и кривизны в узлах сетки до и после сглаживания.

Предложенный метод использовался также при решении задачи численного дифференцирования функций, заданных в виде таблицы, и для сглаживания многозначных функций.

Л и т е р а т у р а

1. SCHOENBERG I.J. Spline functions and the problem of graduation. - Proc.Nat.Acad.Sci.U.S.A., 1964, v.52, N 4, p.947-950.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальные свойства кубических многозначников и задача сглаживания. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 42. Новосибирск, 1970, с. 89-108.

3. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск, "Наука", 1973.

4. СОФРОНОВ И.Д. О методе прогонки для решения разностных краевых задач. - "Журн. вычислит. математики и мат. физики", 1964, т.4, № 2, с. 256-266 *).

Поступила в ред.-изд.отд.
27 июня 1975 года

*) Добавлено редактором.