УДК 518:517.949.12

КАРКАСЫ НА ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В.А. Леус

В процессе проектирования и подготовки производства постоянно возникают задачи о взаиморасположении геометрических объектов, например:

а) найти на поверхности область, ближайшую к данной точке;

б) найти на поверхности точки, нормали в которых образуют заданный угол с некоторым направлением;

в) определить, пересекается ли данная прямая (кривая) с поверхностью, и если да, то найти линии пересечения;

г) определить, пересекается ли данная плоскость с поверхностью, и если да, то найти линии пересечения;

д) найти линии пересечения двух поверхностей.

В случае сложных (не имеющих простого аналитического задания) поверхностей эти задачи могут быть решены численно с помощью той или иной аппроксимации. Одним из методов восстановления точек поверхности по каркасным кривым является каркасная аппроксимация, суть которой заключается в следующем.

Пусть известен край некоторой клетки поверхности и пусть плоскость P сечет его в точках A и B (рис.1,а). Прямолинейный отрезок AB (пунктирная линия) является хордой истинного сечения $\widetilde{AB}$ поверхности плоскостью P. Очевидно, точки этого отрезка являются некоторым приближением точек кривой $\widetilde{AB}$, лежащей на поверхности. Чтобы получить приближение более высокого порядка, нужно использовать точки пересечения плоскости P с соседними каркасными кривыми (рис.1,б). По ним, как по узлам, строится та или иная аппроксимирующая кривая. Для получения приближенной нормали берутся две секущие плоскости P_1 и P_2, в точа)

б)

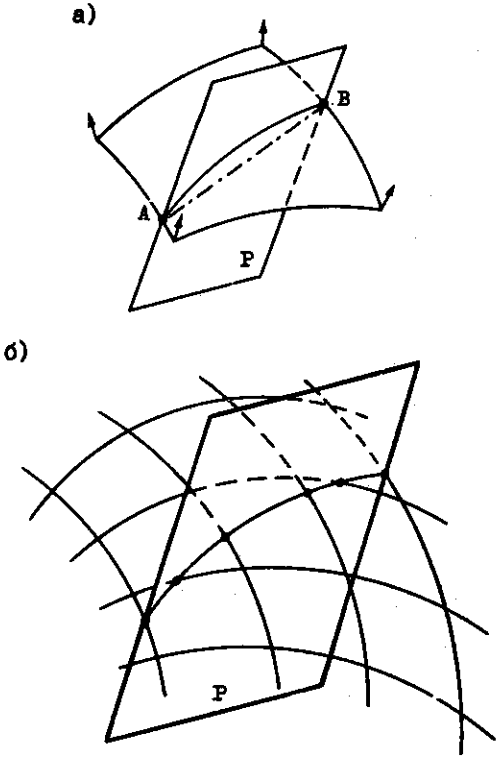

Рис. I

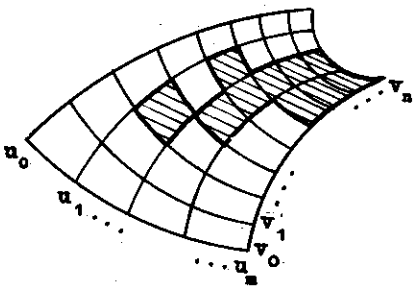

Рис. 2

ке пересечения аппроксимационных кривых их векторы-касательные задают приближенную касательную плоскость и тем самым нормаль. Наилучшее приближение здесь будет тогда, когда плоскости P_1 и P_2 взаимно ортогональны и параллельны вектору b, являющемуся неким осреднением четырех узловых нормалей клетки. Таким образом, аппроксимация двумерного объекта-поверхности достигается с использованием одномерных объектов-кривых.

Независимо от того, применяется ли каркасная аппроксимация или на контур края "натягивается" аппроксимирующая поверхность, первым этапом решения геометрических задач является работа с каркасом. Дадим четкое определение интуитивному понятию каркаса. Имеется кусок гладкой поверхности. Пусть u, v суть криволинейные координаты на нем, ко-

торые мы подчиним условию кусочной аналитичности (бесконечная дифференцируемость на практике всегда имеет место). Криволинейным каркасом (или просто каркасом) назовем конечную совокупность координатных кривых $\{u=u_i\}, i=0,1,\ldots,m$; $\{v=v_j\}, j=0,1,\ldots,n$, такую, что она образует $m \times n$ клеток и кривые $u = u_0$, $v = v_0$, $u=u_m$, $v = v_n$ составляют край поверхности (рис.2). Точки пересечения кривых $u=u_i, v=v_j$ суть узлы каркаса. В узлах направления каркасных линий точно задают нормали к поверхности.

Часть поверхности, являющаяся односвязной совокупностью клеток, есть клеточная область (заштрихованная часть на рис.2). Обозначив буквой s длину кривой на поверхности, определим диаметр D области Q следующим образом:

$$D = \max_{A,B \in Q} \{ \min_{L \in Q} s_{AB} \}, \qquad (1)$$

где $\min$ берется по всем кривым L, соединяющим точки A и B в пределах области Q; $\max$ берется по всем парам точек, принадлежащих области. В частности, если $\min$ и $\max$ берутся в пределах одной клетки, получим диаметр клетки d.

Установим связь между величинами диаметра клеточной области и диаметров составляющих клеток. Рассмотрим область, состоящую из двух клеток, которые имеют общую кривую Γ (в частности, Γ может быть точкой). Диаметр области – D, диаметры составляющих клеток – d_1 и d_2. Пусть кривая AB, связывающая точки A и B, имеет минимальную на области длину, равную диаметру области, т.е. $s_{AB} = D$. Точки A и B могут лежать либо в разных клетках, либо в одной из них. Рассмотрим оба случая.

I. Точки A и B лежат в одной (для определенности, в первой) клетке. Пусть $\widetilde{AB}$ есть минимальная на первой клетке кривая между точками A и B. По определению (I), имеем $s_{\widetilde{AB}} \le d_1$, но поскольку AB минимальна на всей области, то $s_{AB} \le s_{\widetilde{AB}}$ и, следовательно, $s_{AB} \le d_1$ (рис.3,а).

2. Точка A лежит в первой клетке, точка B – во второй. Пусть точка C на пересечении AB и Γ такая, что отрезок CB кривой AB целиком лежит во второй клетке (рис. 3,б). Отрезок AC является минимальным между точками A и C на области, и,

а) б)

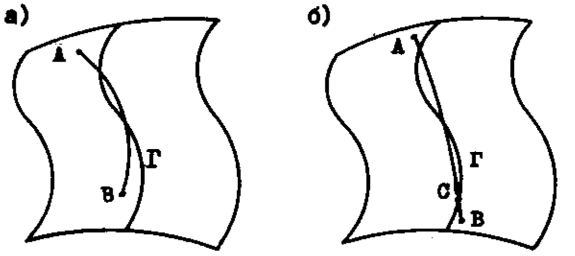

Рис. 3

согласно первому пункту, $s_{AC} \le d_1$. Отрезок CB минимальный на области между точками C и B и лежит к тому же целиком на второй клетке, так что $s_{CB} \le d_2$. Поскольку $s_{AB}=s_{AC}+s_{CB}$, то для кривой AB в целом справедливо неравенство $s_{AB} \le d_1 + d_2$. Но s_{AB} равна диаметру D, поэтому получаем искомую связь между диаметрами в виде неравенства

$$D \le d_1 + d_2. \qquad (2)$$

Область, в которой каждая клетка соседствует с не более чем двумя другими, назовем клеточной цепью. Последовательно применяя неравенство (2), получим для диаметра цепи из K клеток оценку

$$D_{Ц} \le d_1 + d_2 + \ldots + d_K. \qquad (3)$$

Пусть произвольная клеточная область Q состоит из клеток, для диаметров которых имеется оценка $d_i \le d$. Любые две клетки области Q можно соединить цепью из K клеток. Число клеток в цепи назовем целочисленной длиной этой цепи (целочисленная длина цепи из одной клетки равна единице). Можно указать конечное множество $\{Ц^K_{pq}\}$ цепей, связывающих клетки p и q и имеющих, вообще говоря, различные целочисленные длины. Целочисленным диаметром области назовем число

$$I = \max_{p,q \in Q} \{ \min_{\{Ц^K_{pq}\}} K \}, \qquad (4)$$

где min берется по всем цепям, связывающим клетки p и q, а max – по всевозможным парам клеток из области Q.

Пусть кривая AB такова, что $s_{AB} = D$, D – диаметр области Q, точка A лежит на клетке p, точка B – на клетке q. Соединим клетки p и q минимальной цепью $Ц^K$ целочисленной длины

K. Соединим точки A и B минимальной в цепи $Ц^K$ кривой $\tilde{AB}$. Длина этой кривой не превосходит диаметра цепи, так что, согласно неравенству (3), оценке диаметров клеток области Q и определению (4), имеем $s_{\tilde{AB}} \le d_1 + d_2 + \ldots + d_k \le Kd \le Id$. С другой стороны, кривая AB длины D, по определению, является самой короткой из всех кривых, соединяющих точки A и B в области Q, поэтому $D = s_{AB} \le s_{\tilde{AB}} \le Id$ или, короче,

$$D \le Id. \qquad (5)$$

Таким образом, диаметр области оценивается произведением целочисленного диаметра на оценку диаметров составляющих клеток. В частности, для области m x n клеток диаметр оценивается неравенством

$$D \le d \cdot \max\{m,n\}. \qquad (6)$$

Поскольку кривая не может быть короче стягивающей ее хорды, любая область диаметра D может быть заключена в шар диаметра D, т.е.

$$|\vec{AB}| \le D \quad \text{для} \quad A,B \in Q. \qquad (7)$$

Посмотрим, как можно использовать полученные выводы для сокращения перебора при алгоритмизации геометрических задач с каркасами. Когда на куске поверхности выбран каркас $\{u_0,\ldots,u_m; v_0,\ldots,v_n\}$, мы имеем область из m x n клеток. Пусть известно, что диаметры клеток не превосходят величины d. Введем логическую шкалу, двоичные разряды которой взаимно-однозначно сопоставлены узлам области. Перед началом просмотра узлов все разряды шкалы содержат единицы. По мере перебора узлов те из них, которые просмотрены и не удовлетворяют проверяемому условию, отмечаем нулями в соответствующих разрядах логической шкалы. Ясно, что в результате полного перебора будут выявлены все узлы, удовлетворяющие условию поиска.

В задачах типов "а", "в", "г" условием поиска является минимальность расстояния от узла каркаса до объекта или части объекта. Предположим, обнаружилось, что в некотором узле A искомое расстояние $r > d$, тогда мы можем сократить дальнейший перебор, руководствуясь следующими соображениями. Если J – целая часть числа r/d, то в силу (3) любая клеточная цепь $Ц^J$, содержащая точку A, имеет диаметр не больший чем величина Jd. Множество всех таких цепей образует, вообще говоря, область Q из 2J x 2J клеток с "центральной" точкой A. Область Q мо –

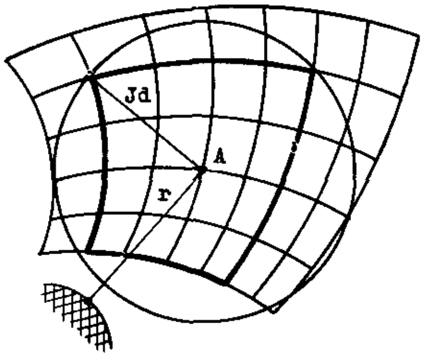

Рис. 4

жет состоять и из меньшего числа клеток, если точка A отстоит от края поверхности менее чем на J клеток. Эта область имеет диаметр не больший чем 2Jd и в силу (4) заключается в шар Ш(A,J) радиуса Jd с центром в узле A (рис.4). Таким образом, все клетки области Q заведомо не попадают в ε – окрестность (ε = r–Jd) объекта и могут быть сразу отмечены нулями в соответствующих разрядах логической шкалы. Перебор узлов области Q сведется только к проверке разрядов шкалы. Если величина 2J превосходит хотя бы одну из размерностей (m или n) каркаса, то в шар Ш(A,J) могут попасть одна из крайних линий каркаса и несколько внутренних линий того же семейства. В этом случае все узлы на этих линиях можно вообще исключить из дальнейшего перебора, так как остальная часть представляет собой тоже каркас, но меньших размеров. В принципе возможно, что в шар Ш(A,J) попадет весь данный каркас и решение (правда, отрицательное) получится с минимальными затратами.

Аналогичный прием можно использовать и в тех задачах, где условием поиска является минимум углового отклонения,как в задаче "б".Например,требуется найти узлы,в которых нормали к поверхности наименее отклоняются от заданного направления. Пусть известна оценка главных кривизн для поверхности – $|K|,|k| \le K$, тогда максимальное колебание θ нормали в пределах любой области диаметра D удовлетворяет неравенству $\theta \le KD$. Аналогично в пределах клетки с диаметром, не превосходящим величины d , угловое колебание нормали $\vartheta \le Kd$. В некотором узле A нормаль составляет с заданным направлением угол $\Phi > Kd$ и величина J есть целая часть отношения $\frac{\Phi}{Kd}$. Тогда во всей области размером 2Jx2J клеток с центральной точкой A нормаль не может приблизиться к заданному направлению менее чем на величину

$\varphi = \Phi - JKd$. Эти соображения позволяют отбросить указанную область из дальнейшего рассмотрения и тем самым сократить перебор.

В заключение отметим, что все выводы справедливы и в отношении кривых. Точечное задание кривой играет роль каркаса, а диаметром отрезка кривой является его длина. Такой подход может оказаться особенно эффективным в задачах типа д), где приходится многократно отыскивать зацепление кривой и каркаса.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 апреля 1976 года