ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 69

УДК 519.1

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ РАЗБИЕНИЯ И СЛОИ ГРАФОВ

В.А. Скоробогатов

В прикладных областях дискретного анализа, а также при распознавании образов возникают задачи, в которых требуется устанавливать некоторые "отличия" одних элементов из данного множества от других элементов. К таким задачам относятся, например, задачи таксономии, упорядочения [1]. В [2], например, подчеркивается, что при решении задач таксономии существенным является сам способ определения "отличия".

В настоящей работе рассматриваются понятия относительных разбиений и слоев графа, а также некоторые их свойства, которые можно использовать для решения указанных задач, поскольку они позволяют классифицировать множество вершин графа. Связь таких задач, как таксономия и распознавание изоморфизма графов, по-видимому, не вызывает сомнения, и применение средств теории графов может дать положительный эффект.

1. Относительные разбиения. Слои графа

Относительные разбиения и слои могут быть определены по отношению к некоторым фиксированным подмножествам элементов графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $V_0 \subseteq V$, $V_i(V_0)$ – множество вершин, находящихся на расстоянии i от V_0. Упорядоченное разбиение $\hat{V}(V_0) = \{V_i \mid i=\overline{0,k}\}$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$; $\bigcup_{i=0}^{k} V_i = V$ назовем относительным разбиением, или разбиением по отношению к V_0.

Множество $V_i(V_0)$ будем называть i – с л о е м графа по отношению к V_0. Иногда подграф, порождаемый множеством $V_i(V_0)$ и обозначаемый через $G_i(V_0)$, будем называть также слоем по отношению к V_0, что не будет приводить к неоднозначности, так как обозначения графов и множеств различны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2. Матрица $\lambda^n(G)$ мощностей слоев графа G определяется как $\lambda^n(G) = \| a_{ij} \|$, $i = 1, 2, \ldots, C_p^n$, $j = 1, 2, \ldots, d(G)$, где a_{ij} равно числу вершин в слое V_{ij}, лежащих на расстоянии j от i-го подмножества вершин графа. Если $V_{ij} = \emptyset$, то $a_{ij} = 0$.

Число ненулевых элементов в строке $\lambda^n(G)$ назовем д л и н о й строки матрицы.

Пусть $\lambda^n(G)$ состоит из упорядоченной по s совокупности подматриц $\lambda^s(G)$, где $s \in \overline{\{1, n\}}$ обозначает мощность некоторого подмножества вершин графа. Для всех s упорядочим строки $\lambda^s(G)$ по уменьшению длины и внутри полученных групп строк одинаковой длины упорядочим строки лексикографически по значениям элементов из $\lambda^s(G)$. Полученную матрицу будем называть упорядоченной или канонической, при этом, если не оговорено особо, под $\lambda^s(G)$ будем понимать упорядоченную матрицу.

При $n = 1$ будем говорить о λ-матрице, как о матрице, состоящей из множества мощностей слоев графа G, построенных относительно каждой вершины графа. Матрицу $\lambda^1(G)$ будем обозначать через $\lambda(G)$.

Пусть G – k-связный граф и $m < k$, тогда можно определить матрицу $\lambda^{m,n}(G)$ как совокупность λ^n матриц графов, полученных из G устранением m его вершин.

2. Свойства матриц мощностей слоев

Пусть $e(v) = \max\limits_u d(u,v)$ – эксцентриситет вершины графа G, $r(G)$ – радиус графа, $d(G)$ – его диаметр. Тогда имеет место

ЛЕММА 2.I.

I) Д л и н а с т р о к и λ - м а т р и ц ы р а в н а э к с ц е н т р и с и т е т у с о о т в е т с т в у ю щ е й в е р ш и н ы. Д л и н а п е р в о й с т р о к и р а в н а $d(G)$, д л и н а п о с л е д н е й р а в н а $r(G)$.

2) С у м м а ч и с е л л ю б о й с т р о к и р а в н а $p - 1$.

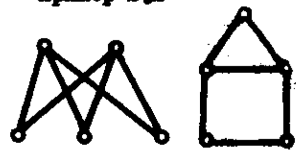
Известно [3], что для изоморфных графов G и H

$$G \simeq H \Rightarrow \lambda(G) \equiv \lambda(H),$$

но не обязательно $\lambda(G) \equiv \lambda(H) \not\Rightarrow G \simeq H$.

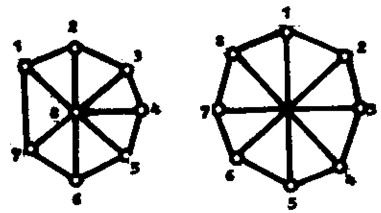
Рассмотрим примеры неизоморфных графов, для которых $\lambda(G) \equiv \lambda(H)$.

Пример 2.2



$$\lambda(G) \equiv \lambda(H) = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$$

Пример 2.3



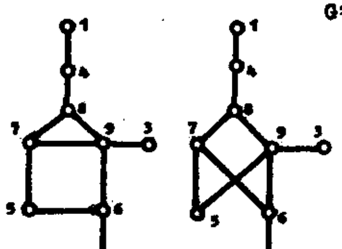
$$\lambda(G) = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 7 & 0 \end{Vmatrix} \quad \lambda(H) = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

Пример 2.3 говорит о том, что в общем случае зависимости между строками может и не быть. Здесь последняя строка не зависит от остальных. В общем случае по $\lambda(G)$ нельзя восстанавливать граф или дерево. Интересно было бы установить, для каких графов это возможно. Из примера 2.4 (а) λ-матрица для графов; б) λ-матрица для деревьев) следует, что графы, λ-матрицы которых состоят из всех попарно различных строк, к таким графам не относятся.

Пример 2.4

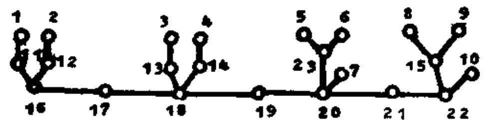
а) б)

$G \not\simeq H$

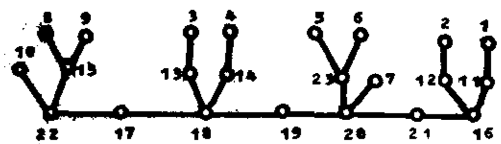


$$\lambda(G) \equiv \lambda(H) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

T_1



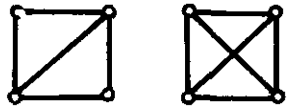
T_2



$T_1 \not\simeq T_2 \qquad \lambda^1(T_1) \equiv \lambda^1(T_2)$

Интересно установить взаимосвязи между матрицами λ^1, $\lambda^{1,1}$, λ^2. Пример 2.5 говорит о том, что эта связь слабая.

Пример 2.5

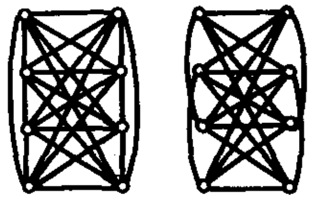


$\lambda^1(G) \ne \lambda^1(H)$,

$\lambda^2(G) = \lambda^2(H)$.

G H

а)



$\lambda^1(G) \ne \lambda^1(H)$,

$\lambda^2(G) = \lambda^2(H)$,

$\lambda^2(G) \equiv \lambda^2(H) \not\Rightarrow \lambda^1(G) \equiv \lambda^1(H)$.

G H

б)

В общем случае интересно было бы установить, какие матрицы являются λ-матрицами графов, т.е. когда λ-матрица реализуема.

3. Свойства относительных разбиений и связность графов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.I. Пусть $\hat{V}(V_0)$ – разбиение, тогда под разложением $G(V_0)$ графа G относительно подмножества вершин V_0 (или подграфа $G_0(V_0, E_0)$) будем понимать следующее представление графа G:

$$\hat{G}(V_0) = (G_1(V_0), \dots, G_i(V_0), \dots, G_{n(V_0)}(V_0)).$$

ЛЕММА 3.2. Для связного графа G с разложением $G(V)$ имеет место

$$\forall u \in V_i, \exists w \in V_{i-1}, i > 0, u \doteq w.^{*)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определения относительного разбиения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. $G_i(V) = [V_i(v), E_i(v)]$, $E_i(v) \subseteq V_i \times V_i$, $i = \overline{1, n(v)}$, где $n(v)$ – длина разбиения $V(V)$.

*) $u \doteq w$ – означает "u смежно w".

Очевидно, что $\forall w \in V_1(v)$, $d(v,w) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4.

$$G_{i-1,i}(v) = [V_{i-1,i}(v), \bar{E}_{i-1,i}(v)], \ i > 1,$$

$$V_{i-1,i}(v) = V_{i-1}(v) \cup V_i(v),$$

$$\bar{E}_{i-1,i}(v) = E_i(v) \cup E_{i-1}(v) \cup E_{i-1,i}(v),$$

$$E_{i-1,i}(v) \subseteq V_i \times V_{i-1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Если $V_i(v)$ можно представить в виде $V_i(v) = P_i(v) \cup T_i(v)$, $i = \overline{1, n(v)}$, где $P_i(v) \cup T_i(v) = \emptyset$ и

$$\forall w \in T_i(v), \bar{\exists} u \in V_{i+1}(v) \quad (w \doteq u),$$

$$\forall w \in P_i(v), \exists u \in V_{i+1}(v) \quad (w \doteq u),$$

то множества $T_i(v)$ для всех i назовем тупиковыми [4] относительно v, а $P_i(v)$ соответственно не тупиковыми относительно v.

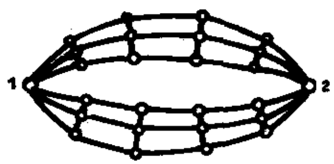
ЛЕММА 3.6. $T_0(v) = \emptyset$, $P_{n(v)} = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что $V_0(v) = v$, а $V_{n(v)}(v) = T_{n(v)}(v)$.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть G – связный граф и $Y(G)$ – множество точек сочленения G, тогда $\forall v, i$, $i = \overline{2, n(v)}$, $Y(G) \cap T_i(v) = \emptyset$, т.е. для разбиения $\hat{V}(v)$ относительно любой вершины v точки сочленения не содержатся в тупиковых множествах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведено в [4].

Пример 3.9



Если через $T(G)$ обозначить

$$T(G) = \bigcup_{v \in V} \bigcup_{i=1}^{n(v)} T_i(v),$$

то из теоремы 3.7 имеем

СЛЕДСТВИЕ 3.8. $Y(G) \cap T(G) = \emptyset$.

Отсюда также следует, что никакое подмножество $T' \subseteq T(G)$ не есть множество сочленения.

Пример 3.9 иллюстрирует следствие 3.8.

4. Матрицы, слои и метрика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.I. Разложение $\hat{G}(v)$ будем называть диаметральным, если его длина $= d(G)$, и радиальным, если длина равна радиусу. Соответствующие строки в λ-матрице будем называть диаметральными и радиальными.

Очевидно из определений центра и диаметральных вершин, что если $\hat{G}(v)$ – диаметральное разложение, то v – диаметральная вершина, и если $\hat{G}(u)$ – радиальное разложение, то u – центр графа.

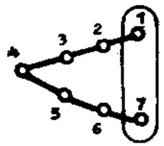
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Разбиение $\hat{V}^{-1}(v)$ назовем обратным для $\hat{V}(v)$, если $\hat{V}^{-1}(v) = \hat{V}(w)$ и w принадлежит последнему слою разбиения $\hat{V}(v)$. Через $k(v)$, $k^{-1}(v)$ обозначим длину прямого $\hat{V}(v)$ и обратного $V^{-1}(v)$ разбиений соответственно.

ЛЕММА 4.3. $w \in V_i,\ V_i \in \hat{V}(u) \Leftrightarrow u \in V_i,\ \hat{V}_i \in V(w)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из симметричности $d(u,w) = d(w,u)$.

ЛЕММА 4.4. Пусть $r(G)$ – радиус графа, $d(G)$ – его диаметр, тогда $l(d) \le 2l(r)$, где $l(r)$ – длина самой короткой строки, а $l(d)$ – длина самой длиной строки λ матрицы.

Пример 4.5



$d(G) = 6$,
$r(G) = 3$.

Пусть $\hat{G}(u)$ – радиальное разбиение и пусть V_i с наибольшим i есть $V_r(G)$, тогда для вершины $v \in V_r(G)$ может существовать вершина $w \in V_j$ такая, что $d(v,w) = 2r(G)$. В этом случае $j = r(G)$. Для случая, когда $d(G) = 2r(G)$, приведен пример 4.5.

ЛЕММА 4.6. Если число вершин в последнем слое некоторого $\hat{V}(v)$, длина которого равна j, равно q, то в $\lambda(G)$ существует не менее $q+1$ строк длины не менее j.

Из леммы 4.3 следует: если вершина w лежит в последнем слое $\hat{V}(v)$, то длина $\hat{V}(w)$ не менее длины $\hat{V}(v)$.

ЛЕММА 4.7. Пусть длина $\hat{V}(v)$ равна $k(v)$, тогда $\forall v\ k^{-1}(v) \ge k(v)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $V(v)$ – диаметральное разбиение, то $k^{-1}(v) = k(v)$; если не диаметральное, то пусть $k(v) > k^{-1}(v)$, тогда вершина v, даже если она принадлежит

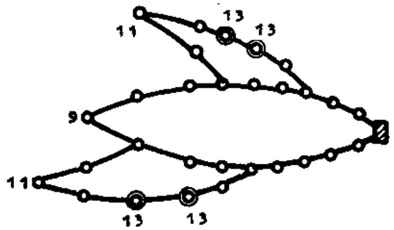
последнему слою в обратном разбиении, окажется связанной с исходной вершиной и цепью длины $k^{-1}(v) < k(v)$, но, по определению λ-разбиения, $k(v)$ – есть длина кратчайшей цепи.

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Пусть длина $V(v)$ равна $d(G)$, тогда для всех вершин из последнего слоя $k^{-1}(v) = d(G)$.

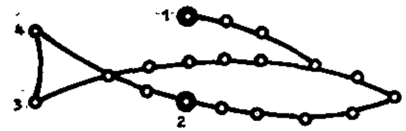
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что число диаметральных строк в $\lambda(G)$ не менее двух.

Интересно выяснить связь местоположения диаметральных вершин и центров графа в слоях. Рассмотрим два характерных примера.

Пример 4.I0



Пример 4.II



Из примера 4.I0 видно, что диаметральные вершины не всегда тупиковые (цифры соответствуют эксцентриситетам вершин). Диаметр графа равен тринадцати. В примере 4.II конечные вершины не лежат на диаметральной цепи. Единственная пара диаметральных вершин – I и 2. Через вершины 3 и 4 никакая диаметральная цепь не проходит, и сами они не являются диаметральными: $e(3) = e(4) = 9$; $d(G) = e(1) = e(2) = 10$.

ТЕОРЕМА 4.I2. Для того чтобы G был двудольным (1-дольным) необходимо и достаточно, чтобы для любого i подграф $G_j(v_i)$ был вполне несвязным графом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что нечетные циклы приводят к появлению пар смежных вершин в подграфах $G_j(v_i)$.

5. Реберная матрица

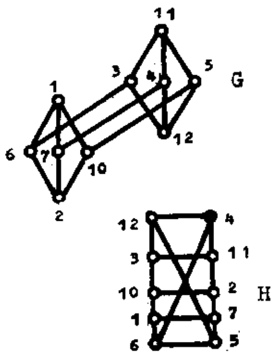
По аналогии с определением матрицы $\lambda^n(G)$ можно ввести матрицу $\lambda^n(G_E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.I. $\lambda^n(G_E) = \|b_{ij}\|$, где $b_{ij} = |E_{j-1,j}|$, $G_{j-1,j}(v) = (V_{j-1,j}(V_i), E_{i-1,1})$. Граф $G_{j-1,j}$, $j \ne 1$, обязательно двудольный.

Совокупность матриц $\lambda^n(G)$, $\lambda^n(G_E)$, образующую матрицу $\lambda^n(G_{V,E})$, можно назвать полной λ-матрицей графа.

Так же, как и у вершинных матриц, изоморфные графы имеют совпадающие реберные матрицы. Но обратное утверждение неверно. Это вытекает из следующего примера.

Пример 5.2



$$\lambda^1(G_{V,E}) = \lambda^1(H_{V,E}) = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ & \cdots & & & \cdots & \\ & \cdots & & & \cdots & \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{array} \right\| \\ \lambda^1(G) \;|\; \lambda^1(G_E) \end{array}$$

ТЕОРЕМА 5.3. Если G – двудольный граф, то сумма компонент в любой строке $\lambda^1(G_E)$ равна q, где q – число ребер в графе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 4.12.

Отсюда можно заключить, что свойство графа "быть двудольным" легко устанавливается путем построения одной строки $\lambda^1(G_E)$ и подсчета суммы компонент в ней.

Литература

1. ЗАГОРУЙКО Н.Г. Методы распознавания и их применение. М., "Сов.радио", 1972.

2. ЗАГОРУЙКО Н.Г., ЁЛКИНА В.Н., ТИМЕРКАЕВ В.С. Алгоритм заполнения пропусков в эмпирических таблицах (алгоритм "ZET"). –В кн.: Вычислительные системы. Вып.61. Новосибирск, 1975, с.3–27.

3. СКОРОБОГАТОВ В.А. О распознавании изоморфизма неориентированных графов. –В кн.: Вычислительные системы. Вып. 33. Новосибирск, 1969, с. 34–36.

4. СКОРОБОГАТОВ В.А. Анализ связности неографов. –В кн.: Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы. Алгоритмы. (Вычислительные системы, вып.64.) Новосибирск, 1975, с.11–25.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 июня 1976 года