ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 69

УДК 519.1

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАЦИЙ НА ГРАФАХ И ИЗОМОРФИЗМ

Г.Н. Белоглазов

В системе ГРАФ [1] реализовано несколько алгоритмов, позволяющих достаточно эффективно устанавливать изоморфизм графов. В частности, для разбиения на классы эквивалентности множества вершин регулярных графов используются операции сложения по модулю два ($\oplus$) и конъюнкция ($\wedge$) строк (столбцов) матрицы смежности A графа G .

В настоящей работе предлагаются результаты исследования свойств этих операций по отношению к обыкновенным графам и применения их в задаче изоморфизма. Терминология, определения и основные понятия теории графов в основном соответствуют [2]. Обозначим через

$A = \|a_{ij}\|$ – $(p \times p)$ – матрицу смежности графа G ;

x_i – i-ю строку матрицы A, соответствующую вершине v_i графа G ;

∂_i – оператор, с помощью которого каждой строке (включая i-ю) матрицы A прибавляется по модулю два ее i-я строка;

$\tilde{\partial}_i$ – оператор, отличающийся от оператора ∂_i тем, что при его выполнении не производится операция $x_i \oplus x_i$;

∇_i – оператор, с помощью которого каждая строка матрицы A логически умножается на ее i-ю строку (конъюнкция строк);

$\partial_i A$, $\tilde{\partial}_i A$, $\nabla_i A$ – матрицы, получающиеся после применения к матрице A операторов ∂_i, $\tilde{\partial}_i$ и ∇_i ;

$\partial_i G$, $\tilde{\partial}_i G$ – смешанные графы имеющие петли с матрицами смежности $\partial_i A$ и $\tilde{\partial}_i A$ соответственно;

$\nabla_i G$ – ориентированный граф без петель, соответствующий матрице $\nabla_i A$;

$\partial_i^* A = \partial_i(\partial_i A)^t$, $\tilde{\partial}_i^* A = \tilde{\partial}_i(\tilde{\partial}_i A)^t$ – матрицы, получающиеся после последовательного применения операторов ∂_i и $\tilde{\partial}_i$ к i-й строке и i-у столбцу матрицы A (символ t обозначает транспонирование);

$\partial_i^* G$ – неориентированный граф, являющийся объединением вершины v_i с $(p-1)$-вершинным графом;

$\tilde{\partial}_i^* G$ – p-вершинный неориентированный граф с матрицей смежности $\tilde{\partial}_i^* A$.

Операторы ∂_i, $\tilde{\partial}_i$, ∂_i^* и $\tilde{\partial}_i^*$ обладают следующими очевидными свойствами относительно любого $i \in \{1,2,\dots,p\}$:

1. $\partial_i(\partial_i A) = \partial_i A$ и $\partial_i(\partial_i G) = \partial_i G$,

2. $\partial_i^*(\partial_i^* A) = \partial_i^* A$ и $\partial_i^*(\partial_i^* G) = \partial_i^* G$,

3. $\tilde{\partial}_i(\tilde{\partial}_i A) = \tilde{\partial}_i^*(\tilde{\partial}_i^* A) = A$ и $\tilde{\partial}_i(\tilde{\partial}_i G) = \tilde{\partial}_i^*(\tilde{\partial}_i^* G) = G$.

Пусть задано разбиение множества вершин V графа G, на попарно непересекающиеся подмножества относительно произвольной вершины v_i, следующего вида $V = v_i \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$, причем для любых вершин v, u, w таких, что $v \in V_1$, $u \in V_2$, $w \in V_3$, расстояния $d(v_i,v) = 1$, $d(v_i,u) = 2$ и $d(v_i,w) \geq 3$.

Соответствующее разбиению разложение графа G на непересекающиеся подграфы будет $G = v_i \cup G_1(V_1) \cup G_2(V_2) \cup G_3(V_3)$, и граф $\partial_i^* G$ получается следующим образом:

а) удаляются все ребра, инцидентные v_i;

б) удаляются все ребра, соединяющие подграфы G_1 и G_2;

в) каждая вершина из G_1 соединяется ребром с теми вершинами из G_2, которые были несмежны с ней в графе G;

г) выполняется операция $G_1 + G_3$ [3, с. 163-188].

Далее введем вектор $g_l(K_1,K_2,\dots,K_l) = x_{k_1} \oplus x_{k_2} \oplus \dots \oplus x_{k_l}$ для любых $l,k \in \{1,2,\dots,p\}$ и рассмотрим действие оператора ∂_i^* на A.

С помощью вектора g_l и его отрицания $\bar{g}_l$ образуем матрицу A_l по правилу: для всех $i \in \{1,2,\dots,p\}$ в нулевой $(p \times p)$-матрице i-я строка заменяется на вектор g_l или $\bar{g}_l$, если i-й элемент g_l равен нулю или единице соответственно. Матрица A_l состоит из строк (столбцов) двух типов и с помощью перестановки строк (столбцов) легко убедиться, что A_l представляет полный двудольный граф $K_{s,t}$. Поскольку $K_{s,t} \cong K_{t,s}$, условно примем, что число нулей в векторе g_l равно s. Очевидно, что при $l = 1$

$g_1(1) = x_i$ и $K_{s,t} \cong K_{\rho_i, p-\rho_i}$ где ρ_i – локальная степень вершины v_i графа G. Таким образом, действие оператора ∂_i^* на A заключается в прибавлении (mod 2) к каждой строке (соответствующей вершине v_j) матрицы A вектора $\bar{g}_1$ или g_1 в зависимости от того, смежна v_i с v_j или нет. Это означает, что выполняется поэлементная сумма (mod2) матриц A и $A(K_{\rho_i,p-\rho_i})$, т.е. $\partial_i^* G \cong A \oplus A(K_{\rho_i,p-\rho_i})$ или для графа G

$$\partial_i^* G \cong G \oplus K_{\rho_i, p-\rho_i}. \tag{1}$$

Формально будем считать вполне несвязный граф $\bar{K}_p$ полным двудольным графом и обозначать через $K_{p,0}$ или $K_{0,p}$. Для полных двудольных графов имеет место следующая

ТЕОРЕМА I. Сложение (mod 2) полных двудольных графов сохраняет двудольность, т.е. для любых целых $m + n = \mu + \nu = p$ существуют целые s и t такие что

$$K_{m,n} \oplus K_{\mu,\nu} \cong K_{s,t} \tag{2}$$

и $s + t = p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V_1^1 \cup V_2^1$ и $V_1^2 \cup V_2^2$ – разбиения множества вершин V, соответствующие графам $K_{m,n}$ и $K_{\mu,\nu}$, для которых справедливы следующие соотношения:

$$V_1^1 \cup V_2^1 = V_1^2 \cup V_2^2 = V, \tag{3}$$

$$V_1^1 \cap V_2^1 = V_1^2 \cap V_2^2 = \emptyset, \tag{4}$$

$$|V_1^1| = m,\ |V_2^1| = n,\ |V_1^2| = \mu,\ |V_2^2| = \nu.$$

Для объединения двух множеств множества E имеем $A \cup B = A \oplus B \oplus (A \cap B) = E$, следовательно,

$$V_1^1 \cup V_2^1 = V_1^1 \oplus V_1^2 = V_1^2 \cup V_2^2 = V_1^2 \oplus V_2^2 = V. \tag{5}$$

Используя свойства коммутативности и ассоциативности дизъюнктивной суммы $\oplus$ (в смысле теории множеств), рассмотрим различные комбинации (5), допускающие разбиение V. Имеем

$$V_1^1 \oplus V_2^1 \oplus V_1^2 = V_2^2, \tag{6}$$

$$V_1^1 \oplus V_2^1 \oplus V_2^2 = V_1^2, \tag{7}$$

$$V_1^1 \oplus V_1^2 = V_2^1 \oplus V_2^2, \tag{8}$$

$$V_1^1 \oplus V_2^2 = V_2^1 \oplus V_1^2. \tag{9}$$

Из соотношения для $A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$ и (4) следует, что (6) и (7) определяют разбиение (3). Для (8) и (9) получаем

$$(V_1^1 \cap V_2^2) \cup (V_2^1 \cap V_1^2) = V,$$

$$(V_1^1 \cap V_1^2) \cup (V_2^1 \cap V_2^2) = V,$$

следовательно, $s = |V_1^1 \cap V_2^2|$ или $s = |V_1^1 \cap V_1^2|$ и $t = |V_2^1 \cap V_1^2|$ или $t = |V_2^1 \cap V_2^2|$.

Утверждение теоремы очевидно.

На рис.I показан пример, иллюстрирующий графическую и матричную интерпретации действия оператора ∂_i^*, а в табл. (стр.I6) приведены графы $\partial_1^* G$ для некоторых известных по структуре графов. Для графа O_3 (граф Петерсена) [4] установлена следующая связь: $\partial_i^* \overline{L(K_5)} \cong \partial^* O_3 \cong L(K_{3,3}) \cup v_1 \cong (K_3 \wedge K_3) \cup v_i$, где $L(K_{3,3})$ – реберный граф от $K_{3,3}$; $K_3 \wedge K_3$ – конъюнкция графов K_3 и K_3, определенная в [5]; $\overline{L(K_5)}$ – дополнение реберного графа от K_5.

Применяя операторы ∂_i, ∂_i^*, $\tilde{\partial}_i^*$ и ∇_i к графу G для всех $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ получим наборы (состоящие из графов) вида:

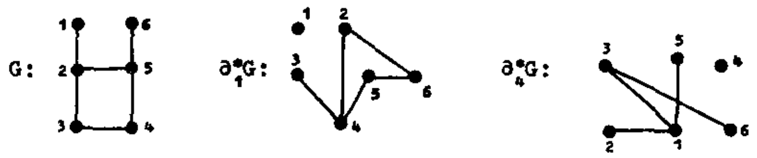
$$\partial_1 G,\ \partial_2 G, \ldots, \partial_p G, \tag{10}$$

$$\partial_1^* G,\ \partial_2^* G, \ldots, \partial_p^* G, \tag{11}$$

$$\tilde{\partial}_1^* G,\ \tilde{\partial}_2^* G, \ldots, \tilde{\partial}_p^* G, \tag{12}$$

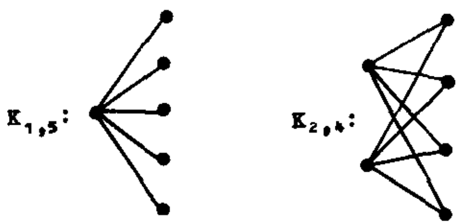
$$\nabla_1 G,\ \nabla_2 G, \ldots, \nabla_p G. \tag{13}$$

Очевидно, что любой граф H из $\partial_i^* G = H \cup v_i$ также представим в виде наборов типа (I0) – (I3). Представление графа G с помощью набора (II) будем называть разложением графа G по оператору ∂_i^*. На первый взгляд кажется, что для разложения G по оператору ∂_i^* можно сформулировать гипотезу, подобную гипотезе Улама [2]. Одна-



$$A(G): \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad S_1: \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\partial}_1^*(S_1): \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S_4: \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \tilde{\partial}_4^*(S_4): \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



$g_1 = (010000)$

$g_4 = (001010)$

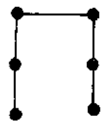
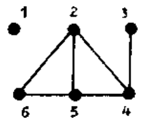
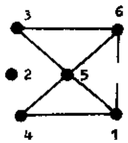
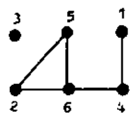
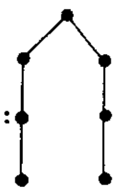
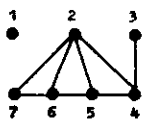
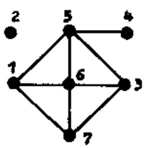
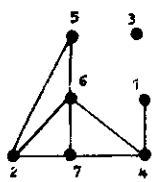
Рис. I

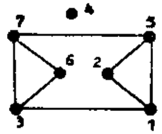
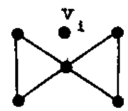
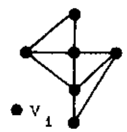
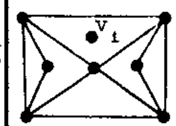
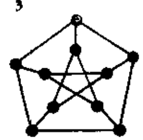
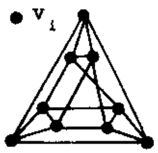
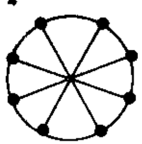
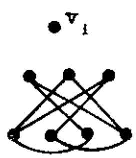
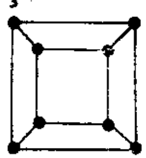
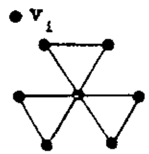
ко, легко установить, что одинаковые наборы могут иметь и неизоморфные графы.

Для графов G и H, которые представлены наборами (I2), имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть графы G и H представлены наборами (II), тогда если для каждого i найдется такое $j(i)$, что $\tilde{\partial}_i^* G \cong \tilde{\partial}_j^* H$, то $G \cong H$.

Т а б л и ц а

G	i	$\partial_i^* G$
K_p	$\overline{1,p}$	$K_{p-1} \cup v_1$
$K_{m,n}$	$\overline{1,p}$	$K_{p,0}$
C_5	$\overline{1,p}$	$P_4 \cup v_1$
$W_n = v_1 + C_{n-1}$	1	$C_{n-1} \cup v_1$
P_6: 	1	
	2	
	3	
P_7: 	1	
	2	
	3	

G	i	$\partial_i^* G$
P_7	4	
C_6	$\overline{1,p}$	
C_7	$\overline{1,p}$	
C_8	$\overline{1,p}$	
O_3: 	$\overline{1,p}$	
M_4: 	$\overline{1,p}$	
Q_3: 		

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из свойства 3 (см.стр. I2).

Для описания свойств графа введем $(p \times p)$-матрицы

$$D(G) = \|d_{ij}\|, \quad D^*(G) = \|d^*_{ij}\|, \quad \tilde{D}^*(G) = \|\tilde{d}^*_{ij}\| \quad \text{и} \quad C(G) = \|c_{ij}\|$$

соответственно с элементами

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ij} \oplus a_{jk}),$$

$$d^*_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ij} \oplus a_{ik} \oplus a_{jk}),$$

$$\tilde{d}^*_{ij} = \begin{cases} d^*_{ij} + 1, \text{ если } v_i \text{ смежна с } v_j \\ d^*_{ij}, \text{ если } v_i \text{ не смежна с } v_j, \text{ причем } \tilde{d}^*_{ii} = \rho_i, \end{cases}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} (a_{ik} \wedge a_{ik}),$$

и характеристическими векторами

$$r(G) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p), \qquad r^*(G) = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p),$$

$$\tilde{r}^*(G) = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p), \qquad r^{\nabla}(G) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_p),$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i – кратности вхождения элементов, равных i, соответственно в матрицах $D(G)$, $D^*(G)$, $\tilde{D}^*(G)$, $C(G)$.

Легко видеть, что i-я строка (столбец) матриц $D(G)$, $D^*(G)$, $\tilde{D}^*(G)$ и $C(G)$, соответствующая вершине v_i графа G, определяет наборы степеней (полустепеней) графов $\partial_i G$, $\partial_i^* G$, $\tilde{\partial}_i^* G$ и $\nabla_i(G)$. Кроме этого, элементы d_{ij}, d^*_{ij} и c_{ij} характеризуют граф G следующим образом.

Для произвольной пары вершин $\{v_i, v_j\}$ графа G обозначим через p_1 число вершин, смежных с v_i и не смежных с v_j, Δ – число вершин, смежных одновременно с v_i и v_j, q_1 – число вершин, смежных с v_j и не смежных с v_i, когда v_i смежна с v_j (рис.2,а); и p_2, q_2 – соответствующие числа в случае, когда v_i не смежна с v_j (рис.2,б).

Очевидно, что если v_i смежна с v_j, то

$$\Delta = c_{ij}, \quad p_1 = \rho_i - c_{ij} - 1, \quad q_1 = \rho_j - c_{ij} - 1, \tag{14}$$
$$d^*_{ij} = p - \Delta, \quad d_{ij} = \rho_i + \rho_j - 2c_{ij} = p_1 + q_1 + 2,$$

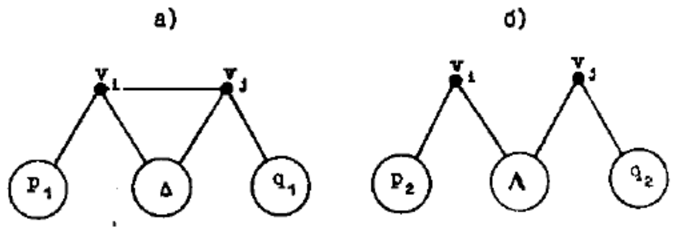


Рис. 2

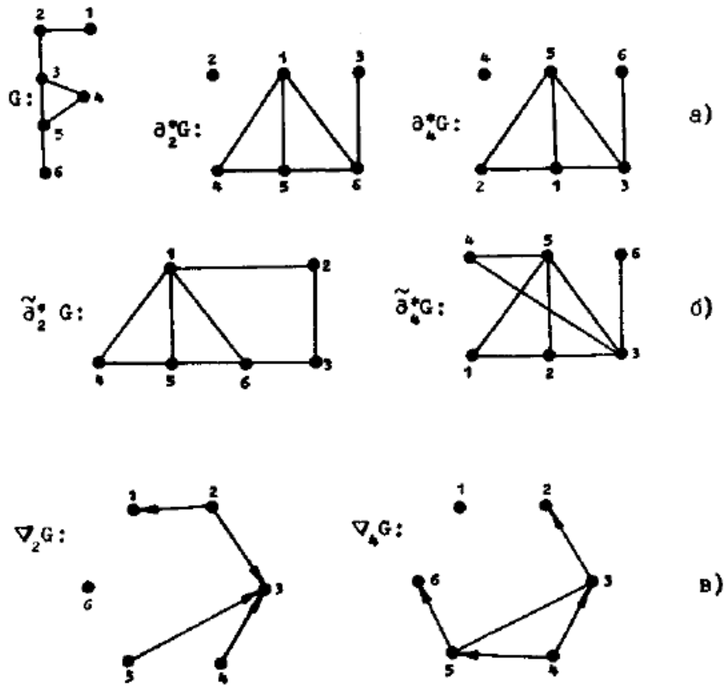


Рис. 3

и если v_i не смежна с v_j, то

$$\Lambda = c_{ij}, \quad d_{ij} = d^*_{ij} = \rho_i + \rho_j - 2c_{ij}, \quad p_2 = \rho_i - c_{ij}, \qquad (15)$$
$$q_2 = \rho_j - c_{ij}, \quad (p_2 + q_2) = d_{ij},$$

где ρ_i и ρ_j – локальные степени вершин v_i и v_j.

По определению [6], граф называется сильным, если и только если целые $(p_1 + q_1)$ и $(p_2 + q_2)$ не зависят от выбора v_i и v_j. Эти числа связаны с собственными значениями λ_1 и λ_2 матрицы смежности A графа G соотношениями

$$2(p_1 + q_1) = (\lambda_1 - 1)(1 - \lambda_2), \qquad (16)$$
$$2(p_2 + q_2) = -(\lambda_1 + 1)(1 + \lambda_2).$$

Регулярные сильные графы степени k называются сильно регулярными и определяются параметрами (p, k, Δ, Λ), которые также не зависят от выбора вершин v_i и v_j. Два собственных значения сильно регулярных графов определяются по формуле [7]:

$$\lambda_{12} = \frac{1}{2}\left(\Delta - \Lambda \pm \sqrt{(\Delta - \Lambda)^2 - 4\Lambda + 4k}\right). \qquad (17)$$

С помощью несложных вычислений, используя (I4) и (I5), можно показать эквивалентность (I6) и (I7). По теореме I, для любых пар графов, полученных из графа G относительно вершин v_i и v_j, имеем $K_{\rho_i, p-\rho_i} + K_{\rho_j, p-\rho_i} = K_{s,t}$. Используя доказательство теоремы I, легко установить связь между m, n, μ, ν, s и t. Для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $m = \rho_i$, $n = p - \rho_i$, $\mu = \rho_j$, $\nu = p - \rho_j$

$$s = |V_1^1 \cap V_2^2| = \rho_i + \rho_j - 2c_{ij} = d^*_{ij} \quad \text{и} \quad t = p - d^*_{ij}.$$

Матрицы $D(G)$, $\widetilde{D}^*(G)$, $D^*(G)$ и $C(G)$, их строки и элементы порождают некоторые отношения эквивалентности как на множестве графов, так и на множестве их вершин. Очевидно, что если графы G и H изоморфны $(G \cong H)$, то необходимо должны выполняться следующие условия:

I. $r(G) = r(H)$, $r^*(G) = r^*(H)$, $\tilde r^*(G) = \tilde r^*(H)$ и $r^\nabla(G) = r^\nabla(H)$.

2. Если вершине v_i графа G соответствует вершина v_j графа H, то $\partial_i G \cong \partial_j H$, $\partial_i^* G \cong \partial_j^* H$, $\tilde\partial_i^* G \cong \tilde\partial_j^* H$, $\nabla_i G \cong \nabla_j H$ и, следовательно, $r(\partial_i G) = r(\partial_j H)$, $r^*(\partial_i^* G) = r^*(\partial_j^* H)$, $\tilde r^*(\tilde\partial_i^* G) = \tilde r^*(\tilde\partial_j^* H)$, $r^\nabla(\nabla_i G) = r^\nabla(\nabla_j H)$.

Две вершины v_i и v_j графа G называются подобными [2], если для некоторого автоморфизма α этого графа $\alpha(v_i) = v_j$. Поэтому, если вершины v_i и v_j подобны, то $G - v_i \cong G - v_j$. Используя условие 2 (стр.19), можно показать, что $\partial_i^*(G - v_i) \cong \partial_i^*(G - v_j)$. Обратное утверждение о том, что если $\partial_i^* G \cong \partial_j^* G$, то вершина v_i подобна v_j, неверно, как и в [2]. Эта ситуация иллюстрируется на рис.3,а.

Однако заметим, что более сильным необходимым условием существования автоморфизма $\alpha(v_i) = v_j$ является условие 2 (стр. 19) при H=G (рис.3,б,в).

В некоторых частных случаях существование автоморфизма определяется элементами матриц C(G) или D*(G), а именно имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $\{v_i, v_j\}$ такие, что $\rho_i = \rho_j$. Тогда если $\{v_i, v_j\}$ – ребро и $c_{ij} = \rho_i - 1$, или $d^*_{ij} = p - 2$, а также если $\{v_i, v_j\}$ – не ребро и $c_{ij} = \rho_i$ или $d^*_{ij} = 0$, то существует автоморфизм α такой, что $\alpha(v_i) = v_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что соответствующие вершины v_i и v_j строки x_i и x_j матрицы A в случае ребра совпадают во всех позициях, кроме двух, а в случае не ребра $x_i = x_j$.

При построении алгоритма распознавания изоморфизма графов G и H были сделаны следующие предположения:

1. Две вершины v_i и v_j нерегулярного (несильного) графа G подобны тогда и только тогда, когда выполняется условие 2 (стр. 19) при H = G.

2. Нерегулярные (несильные) графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда выполняется условие 1 (стр. 19).

3. Регулярные (несильно регулярные) графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда выполняется условие 2 (стр. 19) как для G и H, так и для всех графов из наборов (10)-(13).

Для нахождения подстановки соответствия между вершинами G и H в алгоритме было использовано специальное разложение графа G, которое заключается в следующем:

а) строится произвольное, покрывающее корневое дерево с корнем v_1, имеющее l уровней (под уровнем понимается множество вершин, находящихся от корневой вершины на расстоянии l);

б) вершины первого уровня помечаются метками $v_2, v_3, \dots, v_n$, второго уровня – метками $v_{n_1+1}, v_{n_1+2}, \quad v_{n_2}$ и т.д.;

в) строится набор графов вида

$$\partial_1^* G = G_1 \cup v_1,$$

$$\partial_2^* G_1 = G_2 \cup v_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\partial_{p-1}^* G_{p-2} = G_{p-1} \cup v_{p-1}.$$

На рис.4 показано специальное разложение графа $G = O_3$.

Наконец, дадим формальное описание алгоритма нахождения подстановки соответствия после проверки предположений 2 или 3.

1. Строится специальное разложение графа G.

2. Для вершины v_1 графа G выбирается вершина v_1 графа H такая, чтобы выполнялось условие 1 (стр.19); в случае невозможности выбора – переход к п.6.

3. Для вершины v_2 графа G выбирается вершина v_j из графа $H_1 = \partial_1^* H - v_1$ такая, чтобы выполнялось условие 1 (стр. 19) при $G = G_1$ и $H = H_1$. В случае невозможности выбора – переход к п.6.

4. П.3 повторяется для всех вершин графа G.

5. Полученная подстановка соответствий проверяется на матрицах A(G) и A(H); при совпадении A(G) и A(H) – переход к п.7; в противном случае к п.6.

6. Предположения неверны. С помощью оператора $\tilde{\partial}_i^*$ и теоремы 2 производится анализ ситуации с целью получения дополнительных условий для предположений 2 или 3.

7. Конец.

Для сильных и сильно регулярных графов, которые не характеризуются своими параметрами (собственными значениями) [6] и [8] с помощью оператора ∂_i^* производится понижение порядка до тех пор, пока не получится регулярный или нерегулярный граф. Далее применяется алгоритм нахождения перестановки с учетом предположений 2 или 3. Число требуемых алгебраических операций для алгоритма выражается полиномом четвертой степени от числа вершин графа $N = c_4 p^4 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0$.

Отношения эквивалентности для вершин графа, порождаемые операторами ∂_i, ∂_i^*, ∂_i^* и ∇_i, могут быть успешно применены для построения относительных разбиений вершин графа G [9].

Кроме того, оператор $\tilde{\partial}_i^*$ позволяет получать графы более высокого порядка из данного (p x q)-графа.

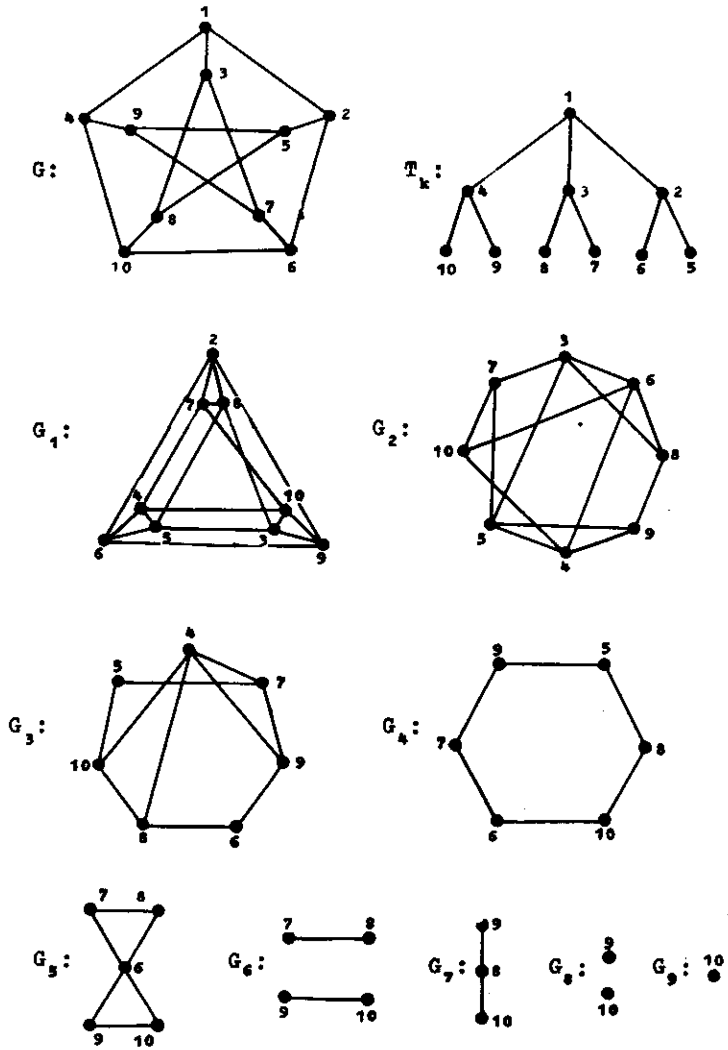


Рис. 4

Литература

I. БЕЛОГЛАЗОВ Г.Н., СКОРОБОГАТОВ В.А. Система автоматизации решения задач на графах. -Настоящий сборник, с.24-39.

2. ХАРАРИ Ф. Теория графов. М., "Мир", 1973.

3. ЗЫКОВ А.А. О некоторых свойствах линейных комплексов. - "Матем.сборник", 24, № 2, 1949, с.163-188.

4. BIGGS N. Algebraic Graph theory. London, Cambridge University Press, 1974.

5. HARARY F., GORDON W. Wilcox. Boolean operations on graphs. "Math. Scand", 1967, v.20, N 1.

6. SEIDEL I.I. Strongly regular graphs. Recent progress in combinatorics. Proceedings of the third Waterloo Conference on Combinatorics. May 1968. Academic Press. New York-London.

7. ЗИНОВЬЕВ В.А., КОЗЫРЕВ В.П. Сильно регулярные графы и комбинаторные конфигурации. -"Вопросы кибернетики", вып. 16, ч.I, М., 1975

8. HUBAUT X.L. Strongly regular graphs. - "Discrete Mathematics", 1975, v.13, N 4.

9. СКОРОБОГАТОВ В.А. Относительные разбиения и слои в графах. -Настоящий сборник, с.3-10.

Поступила в ред.-изд.отд.
19 апреля 1977 года