ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 69

УДК 62-50:007

ДИХОТОМИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЧИСЛА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ РЕБЕР ГРАФА

Л.И. Макаров

К дихотомическим задачам дискретного программирования [I] относится задача, называемая далее задачей альтернативного выбора.

Пусть дана симметрическая квадратная матрица $A = \| a_{pq} \|$, $p,q \in \{1,2,\dots,N\}$, элементами a_{pq} которой являются действительные числа. Каждой строке $\alpha_p = \| a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pN} \|$ матрицы A соответствует ее столбец β_p и $a_{pq} = a_{qp}$. Множество $\{\alpha_p\}$ строк (соответственно $\{\beta_p\}$ столбцов) матрицы A разбито на n групп, причем i-я, $i \in I = \{1,2,\dots,n\}$, группа содержит n_i строк (столбцов), $\sum_{i=1}^{n} n_i = N$. Разбиение производится таким образом, что в i-ю группу попадают строки α_p с номерами, удовлетворяющими условиям

$$p = t_1, \quad t_1 \in I_1 = \{1,2,\dots,n_1\} \quad \text{при} \quad p \le n_1, \; i = 1;$$

$$p = \sum_{j=1}^{i-1} n_j + t_i, \quad t_i \in I_i = \{1,2,\dots,n_i\} \quad \text{при} \quad p > n_1, \; i = 2,\dots,n .$$

Поэтому каждому номеру p (или q) можно поставить в соответствие пару (i, t_i) (или пару (k, t_k)) и обозначить строку α_p через $\alpha_i(t_i)$, а элемент a_{pq} через $a_{ik}(t_i t_k)$. Матрицу $A = \| a_{ik}(t_i t_k) \|$ можно также представить в виде клеточной матрицы $A = \| a_{ik} \|$, $i,k \in I$, где клетка $a_{ik} = \| a_{ik}(t_i t_k) \|$, $t_i \in I_i$, $t_k \in I_k$.

Каждой строке $\alpha_i(t_i)$ и столбцу $\beta_i(t_i)$ матрицы $A = \| a_{ik}(t_i t_k) \|$ поставим в соответствие переменную $x_i(t_i)$, принимающую значения из множества $\{0,1\}$, $i \in I$, $t_i \in I_i$, и введем функцию

$$F(X,A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{t_i=1}^{n_i} \sum_{t_k=1}^{n_k} x_i(t_i) x_k(t_k) a_{ik}(t_i t_k). \tag{1}$$

Для заданной матрицы A функция $F(X,A)$ принимает действительное значение на каждом наборе $X = (\dots, x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(t_i), \dots, x_i(n_i), \dots)$, $i \in I$, из множества $\bar{X}$ всех наборов, $|\bar{X}| = 2^N$.

З а д а ч а а л ь т е р н а т и в н о г о в ы б о р а. Для заданной симметрической квадратной матрицы $A = \| a_{ik}(t_i t_k) \|$ найти оптимальный набор X^*, такой, что

$$F(X^*, A) = \min_{X \in \bar{X}} F(X,A) \tag{2}$$

при условиях:

$$x_i(t_i) \in \{0,1\}, \quad \sum_{t_i=1}^{n_i} x_i(t_i) = 1, \tag{3}$$

$$i = 1,2,\dots,n; \quad t_i = 1,2,\dots,n_i .$$

Условия (3) определяют альтернативный выбор строк (столбцов) матрицы A, так как любой набор из множества $\bar{X}_0$ допустимых наборов, удовлетворяющих условиям (3), для каждой i-й, $i \in I$, группы переменных содержит одну и только одну переменную $x_i(t_i) = 1$; $|\bar{X}_0| = \prod_{i=1}^{n} n_i$.

Пусть даны матрицы $A = \| a_{ik}(t_i t_k) \|$ и $B = \| b_{ik}(t_i t_k) \|$, где

$$b_{ik}(t_i t_k) = a_{ik}(t_i t_k) + c_{ik},$$

$$i,k \in I, \quad t_i \in I_i, \quad t_k \in I_k,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} = c.$$

Тогда для задачи (I)-(3) справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ I. Д л я л ю б о г о $X \in \bar{X}_0$ $F(X,B) = F(X,A) + c$, и м н о ж е с т в а о п т и м а л ь н ы х н а б о р о в д л я м а т р и ц A и B с о в п а д а ю т.

Следствием этого утверждения является возможность рассматривать в задаче (I)-(3) только матрицы без отрицательных элементов, содержащие в каждой клетке хотя бы один элемент, равный нулю, поскольку произвольную матрицу A можно преобразовать в такую матрицу выбором $c_{ki} = c_{ik} = -\min_{t_i} \min_{t_k} a_{ik}(t_i t_k)$.

Для значений функции $F(X,A)$ в задаче (I)-(3) справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.

$$F_H(A) = \sum_{i=1}^{n} \min_{t_i} \left(\sum_{k=1}^{n} \min_{t_k} a_{ik}(t_i t_k) \right) \le F(X,A). \tag{4}$$

При случайном равновероятном выборе по одной строке (столбцу) из каждой i-й группы матрицы A математическое ожидание величины $F(X,A)$ находится из выражения

$$M[F(X,A)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{ik}, \qquad M_{ik} = \frac{1}{n_i n_k} \sum_{t_i=1}^{n_i} \sum_{t_k=1}^{n_k} a_{ik}(t_i t_k).$$

Точное решение задачи (I)-(3) может быть найдено полным перебором множества наборов $\overline{X}_0$. Однако из-за ограниченного быстродействия ЭВМ при решении таких задач необходимо использовать приближенные алгоритмы с вычислительной сложностью порядка $N^2 - N^3$ операций. Алгоритмы со сложностью порядка менее N^2 операций не могут быть использованы, поскольку только для просмотра исходной матрицы A необходимо $\frac{1}{2}N(N+1)$ операции.

Для нахождения приближенного решения задачи (I)-(3) применим алгоритм локальной оптимизации [2]. Пусть X^0 - допустимый набор, т.е. $X^0 \in \overline{X}_0$, в котором в каждой i-й группе переменных $x_i(t_i^0)=1$, $i \in I$. Окрестность набора X^0 определим как множество наборов

$$R(X^0) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{X}_k,$$

$$\overline{X}_k = \{X / X \in \overline{X}_0 \;;\; \forall i,\ i \ne k,\ x_i(t_i^0) = 1;\ x_k(t_k) = 1,$$
$$t_k = 1,2,\dots,n_k\};$$

$$R(X^0) \subset \overline{X}_0, \quad |\overline{X}_k| = n_k, \quad |R(X^0)| = N.$$

В силу симметричности матрицы A для любого набора $X_k^1 \in \overline{X}_k \subset R(X^0)$, в котором $x_k(t_k') = 1$, $t_k' \ne t_k^0$, справедливо

$$F(X_k',A) = F(X^0,A) + 2 \sum_{i=1}^{n} [a_{ik}(t_i^0 t_k') - a_{ik}(t_i^0 t_k^0)] +$$
$$+ a_{kk}(t_k^0 t_k^0) - a_{kk}(t_k' t_k'). \tag{5}$$

Алгоритм локальной оптимизации состоит из следующих шагов:

I. Находим начальный допустимый набор $X^0 \in \overline{X}_0$ и $F(X^0, A)$.

2. Если $X^s \in \overline{X}_0$ найден, то перебором $X \in R(X^s)$ находим X^{s+1} из условия $F(X^{s+1}, A) = \min[F(X,A) / X \in R(X^s)]$.

3. Если $s+1 < s_0$ и $F(X^{s+1},A) < F(X^s,A)$, то переходим к п.2, иначе - конец.

Результатом работы алгоритма является набор X_0, равный X^{s+1}, для которого $F(X^{s+1},A) = F(X^s,A)$, $s+1<s_0$, или набору X^{s_0}, где s_0 - заданное число шагов алгоритма. Для заданных X^0 и $F(X^0,A)$ вычислительная сложность алгоритма с учетом (5) составляет порядка $s_0 N^2$ операций. Качество результата работы алгоритма оценивается сравнением значения $F(X_0,A)$ с величинами $F_H(A)$ и $M[F(X,A)]$.

Для нахождения начального допустимого набора X^0 можно применить различные эвристические алгоритмы, например алгоритм последовательного выбора.

I. В матрице A для каждого $i \in I$ выбираем строку $\alpha_i(t_i^0)$ из условия

$$\varphi(i,t_i^0) = \min_{t_i} \varphi(i,t_i),$$

где

$$\varphi(i,t_i) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{t_k=1}^{n_k} a_{ik}(t_i t_k).$$

Вместо функции $\varphi(i,t_i)$ можно использовать функцию

$$\varphi'(i,t_i) = \sum_{k=1}^{n} M'_{ik}, \qquad M'_{ik} = \frac{1}{n_k} \sum_{t_k=1}^{n_k} a_{ik}(t_i t_k).$$

Формируем набор X_1^0, в котором $x_i(t_i^0) = 1$, $x_i(t_i) = 0$ при $t_i \ne t_i^0$.

2. Если множество $I_0 \neq \emptyset$, $I_0=\{i/n_i=1\} \subset I$, то принимаем $x_i(1) = 1$ для $i \in I_0$ и I_0 обозначаем через I_0^0. Если $I_0 = \emptyset$, то находим i_0 из условия $\varphi(i_0, t_{i_0}^0) = \min_i \varphi(i, t_i^0)$, присваиваем значения $x_{i_0}(t_{i_0}^0) = 1$, $x_{i_0}(t_{i_0}) = 0$ при $t_{i_0} \neq t_{i_0}^0$ и образуем множество $I_0^0 = \{i_0\}$. Для $I_0^0 \neq \emptyset$ вычисляем функцию

$$\varphi_0 = \sum_{i \in I_0^0} \sum_{k \in I_0^0} \sum_{t_i=1}^{n_i} \sum_{t_k=1}^{n_k} x_i(t_i) x_k(t_k) a_{ik}(t_i t_k).$$

3. Если найдены $I_0^s = \emptyset$ и φ_s, то выбираем i_{s+1}, $t_{i_{s+1}}^{s+1}$ и $I_0^{s+1} = I_0^s \cup \{i_{s+1}\}$ из условия

$$\varphi_{s+1} = \varphi_s + \min_{i \in I \setminus I_0^s} \min_{t_i} [2 \sum_{k \in I_0^s} x_i(t_i) x_k(t_k) a_{ik}(t_i t_k) + a_{ii}(t_i t_i)].$$

Присваиваем значения $x_{i_{s+1}}(t_{i_{s+1}}^{s+1}) = 1$, $x_{i_{s+1}}(t_{i_{s+1}}) = 0$ при $t_{i_{s+1}} \neq t_{i_{s+1}}^{s+1}$.

4. Если $|I_0^{s+1}| < n$, то переходим к п.3.

Если $|I_0^{s+1}| = n$, то значения переменных, присвоенные в п.2 и п.3, образуют набор X_2^0 и $\varphi_{s+1} = F(X_2^0, A)$. Выбираем начальный набор X^0 из условия $F(X^0, A) = \min[F(X_1^0, A), F(X_2^0, A)]$. Конец.

Вычислительная сложность нахождения набора X_1^0 составляет порядка N^2 операций, а набора X_2^0 – порядка N^3 операций.

К задаче альтернативного выбора (I)–(3) при определенных условиях могут быть сведены разные практические задачи, например задача минимизации пересечений ребер графа.

Пусть вершинам $v \in V$ графа $G(V,U)$, $|U| = n$, соответствуют некоторые точки плоскости, а каждому ребру $u_i \in U$, $i \in I$, может соответствовать одна из n_i заданных линий $\alpha_i(t_i)$, $t_i \in I_i$, лежащих в той же плоскости. Для каждой пары $\alpha_i(t_i), \alpha_k(t_k)$, $k \in I$, $t_k \in I_k$ известно число $a_{ik}(t_i t_k)$ их пересечений, при этом $a_{ii}(t_i t_i) = 0$. Элементы $a_{ik}(t_i t_k)$ образуют матрицу A. Требуется для каждого ребра выбрать единственную линию так, чтобы суммарное число пересечений выбранных линий было минимальным.

В задаче минимизации пересечений трасс [3], возникающей при автоматизации проектирования интегральных схем, граф $G(V,U)$ является объединением $\bigcup_{j=1}^{m} G_j(V_j, U_j)$, $V_j \cap V_l = \emptyset$, $U_j \cap U_l = \emptyset$, $j \neq l$, графов-деревьев, соответствующих соединениям схемы, при этом, если $u_i, u_k \in U_j$, то $a_{ik}(t_i t_k) = 0$.

В практических задачах обычно выбирается одна из двух линий и важным является сам факт пересечения линий, а не число пересечений. В этом случае $a_{ik}(t_i t_k) \in \{0,1\}$, $n_i \leq 2$, а переменные $x_i(1)$ и $x_i(2)$ можно обозначить через x_i и $\bar{x}_i = 1 - x_i$, $x_i \in \{0,1\}$.

Пусть $\sigma_i \in \{0,1\}$, $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$ и $x_i^{\sigma_i} = x_i$ при $\sigma_i = 1$ и $x_i^{\sigma_i} = \bar{x}_i$ при $\sigma_i = 0$. Любому набору $X \in \bar{X}_0$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие набор $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, где $\sigma_i = 1$, если $x_i(1) = 1$ и $\sigma_i = 0$, если $x_i(2) = 1$. Множество наборов σ обозначим через S, а $a_{ik}(t_i t_k)$ через $a(\sigma_i \sigma_k)$.

Тогда задача альтернативного выбора (I)–(3) принимает вид: для симметрической квадратной матрицы A найти оптимальный набор σ^*, т.е. такой, что

$$\Pi(\sigma^*, A) = \min_{\sigma \in S} \Pi(\sigma, A),$$

$$\Pi(\sigma, A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [x_i^{\sigma_i}(x_k^{\sigma_k} a(\sigma_i \sigma_k) + x_k^{\bar{\sigma}_k} a(\sigma_i \bar{\sigma}_k)) +$$

$$+ x_i^{\bar{\sigma}_i}(x_k^{\sigma_k} a(\bar{\sigma}_i \sigma_k) + x_k^{\bar{\sigma}_k} a(\bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_k))]$$

при условиях

$$x_i^{\sigma_i} \in \{0,1\}, \quad \sigma_i \in \{0,1\}, \quad a(\sigma_i \sigma_k) \in \{0,1\},$$

$$x_i^{\sigma_i} + x_i^{\bar{\sigma}_i} = 1, \quad \sigma_i + \bar{\sigma}_i = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Пусть $P_A^1 = \{(\sigma_i \sigma_k) / a(\sigma_i \sigma_k) = 1\}$, $P_A^0 = \{(\sigma_i \sigma_k) / a(\sigma_i \sigma_k) = 0\}$, $i, k \in I$. Множество наборов S разобьем на два подмножества S_A^1, в каждом из наборов которого содержится хотя бы одна пара $(\sigma_i \sigma_k) \in P_A^1$, и $S_A^0 = S \setminus S_A^1$. Все пары $(\sigma_i \sigma_k)$, входящие в любой набор из S_A^0, принадлежат P_A^0. Введем булеву функцию

$$f_A(\sigma) = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{n} [x_i^{\sigma_i}(x_k^{\sigma_k} a(\sigma_i\sigma_k) \vee x_k^{\bar\sigma_k} a(\sigma_i\bar\sigma_k)) \vee x_i^{\bar\sigma_i}(x_k^{\sigma_k} a(\bar\sigma_i\sigma_k) \vee$$

$$\vee x_k^{\bar\sigma_k} a(\bar\sigma_i\bar\sigma_k))] = \bigvee_{i=1}^{n} [x_i^{\sigma_i}(\bigvee_{k=1}^{n} x_k^{\sigma'_k}) \vee x_i^{\bar\sigma_i}(\bigvee_{k=1}^{n} x_k^{\sigma''_k})] =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{n} (q(\sigma_i) \vee q(\bar\sigma_i))$$

по всем $(\sigma_i\sigma'_k), (\bar\sigma_i\sigma''_k) \in P'_A$.

Для любого набора $\sigma \in S'_A$ хотя бы одна конъюнкция из $x_i^{\sigma_i} x_k^{\sigma'_k}, x_i^{\bar\sigma_i} x_k^{\sigma''_k}$ обращается в единицу, т.е. $f_A(\sigma) = 1$, и поскольку $a(\sigma_i\ \sigma'_k) = a(\bar\sigma_i\ \sigma''_k) = 1$ для каждой конъюнкции из $f_A(\sigma)$,то $\Pi(\sigma, A) > 0$. Для любого набора $\sigma \in S^0_A$ $f_A(\sigma) = 0$ и $\Pi(\sigma, A) = 0$.Если $f_A(\sigma) \equiv 1$, то на всех наборах $\sigma \in S$ $\Pi(\sigma, A) > 0$. Отсюда следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Функция $\Pi(\sigma, A) = 0$ тогда и только тогда, когда существует набор σ , для которого $f_A(\sigma) = 0$, т.е. когда $S^0_A \neq \varnothing$.

Конструкцию функций $f_A(\sigma)$ и

$$\bar f_A(\sigma) = \mathop{\&}_{i=1}^{n} (x_i^{\sigma_i} \mathop{\&}_{k=1}^{n} x_k^{\bar\sigma'_k} \vee x_i^{\bar\sigma_i} \mathop{\&}_{k=1}^{n} x_k^{\bar\sigma''_k}) = \mathop{\&}_{i=1}^{n} (d(\sigma_i) \vee d(\bar\sigma_i)),$$

где

$$(\sigma_i\bar\sigma'_k),\ (\bar\sigma_i\bar\sigma''_k) \in P^0_A \ ,$$

можно установить,исходя из свойств матрицы A :

1) если для некоторого k $(\sigma_i\sigma_k), (\sigma_i\bar\sigma_k) \in P'_A$,то $q(\sigma_i) = x_i^{\sigma_i}$, $d(\sigma_i) = 0$;

2) если для некоторых k и j $(\sigma_i\sigma_k), (\sigma_i\bar\sigma_k), (\bar\sigma_i\sigma_j), (\bar\sigma_i\bar\sigma_j) \in P'_A$, то $f_A(\sigma) \equiv 1$;

3) если для некоторого j $(\sigma_i\sigma_j), (\sigma_i\bar\sigma_j) \in P^0_A$, то $q(\sigma_i) = x_i^{\sigma_i}(\bigvee_{k=1}^{n} x_k^{\sigma'_k})$, $d(\sigma_i) = x_i^{\sigma_i} \mathop{\&}_{k=1}^{n} x_k^{\bar\sigma'_k}$, $k \neq j$;

4) если для всех $k = 1,2,\ldots,n$ $(\sigma_i\sigma_k), (\sigma_i\bar\sigma_k) \in P^0_A$, то $q(\sigma_i) = 0$, $d(\sigma_i) = x_i^{\sigma_i}$.

Поэтому по матрице A функция $\bar f_A(\sigma)$ записывается в скобочной форме следующим образом. Для каждого $i \in I$ в конъюнкцию $d(\sigma_i)$ входят переменная $x_i^{\sigma_i}$ и переменные $x_k^{\bar\sigma'_k}$,для которых $(\sigma_i\bar\sigma'_k) \in P^0_A$, $(\sigma_i\sigma'_k) \in P'_A$, и $d(\sigma_i) = 0$, если для некоторого k $(\sigma_i\sigma_k), (\sigma_i\bar\sigma_k) \in P'_A$.

После раскрытия скобок можно установить, существует ли набор σ , для которого $\bar f_A(\sigma) = 1$, т.е. $\Pi(\sigma, A) = 0$. Нахождение условий существования набора σ , для которого $\bar f_A(\sigma) = 1$,представляется затруднительным, поскольку даже среди множества матриц, имеющих только такие клетки a_{ik}, что либо все пары $(\sigma_i\sigma_k)$, $(\sigma_i\bar\sigma_k), (\bar\sigma_i\sigma_k), (\bar\sigma_i\bar\sigma_k) \in P^0_A$, либо только одна из них принадлежит P'_A , существуют матрицы, для которых $f_A(\sigma) \equiv 1$, например,

$$f_A(\sigma) = x_1\bar x_2 \vee x_1\bar x_4 \vee \bar x_1 x_3 \vee \bar x_1 x_5 \vee x_2\bar x_3 \vee \bar x_2\bar x_4 \vee x_3 x_5 \vee x_4\bar x_5 \equiv 1.$$

Если набор σ , для которого $\Pi(\sigma, A) = 0$, не существует,то приближенное решение задачи альтернативного выбора находится с помощью алгоритма локальной оптимизации.

Литература

1. КОРБУТ А.А., ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю. Дискретное программирование. М., "Наука", 1969.

2. ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю. Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования. М., "Наука", 1976.

3. МАКАРОВ Л.И. Размещение и трассировка в плоской прямоугольной решетке. -В кн.: Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы. Алгоритмы. (Вычислительные системы, вып. 64.) Новосибирск, 1975, с. 65-72.

Поступила в ред.-изд.отд.
4 марта 1977 года