ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПОСТРОЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 69

УДК 681.14:517.11

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУРЬЕ-СПЕКТРА СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМОЙ

В.П. Маркова

В ряде работ [1-3] показана возможность использования аппарата гармонического анализа в синтезе дискретных автоматов. При этом в отличие от традиционных методов системы булевых функций представляются в виде спектров, причем переход в спектральную область осуществляется через быстрое преобразование Фурье. Вычисление спектра системы булевых функций по алгоритму быстрого преобразования Фурье требует ее представления вектором длиной 2^n (n - число переменных).

Однако с развитием микропрограммного управления и матричных способов реализации логических функций, в частности, при помощи программируемых логических матриц, где булевы функции задаются в виде набора условий или д.н.ф., возникает задача получения спектра системы функций непосредственно из заданной формы представления. В статье дается решение этой задачи на основе доказанной здесь же теоремы о спектре импликанты и представления системы булевых функций действительным преобразованием; сравнивается предложенный алгоритм с известным алгоритмом быстрого преобразования Фурье.

§1. Фурье-спектр булевой функции

Областью определения всех булевых функций F является n-мерное векторное пространство $X^n = \{X_0, X_1, \ldots, X_{2^n-1}\}$, где X_i - (0,1)-вектор вида $x_{i_n} x_{i_{n-1}} \ldots x_{i_1}$, равный двоичному представлению числа i. Группа X^n с операцией сложения по mod 2 образует аддитивную абелеву группу, единичным элементом которой является

$X_0 = (00\ldots0)$. Она раскладывается на прямую сумму n циклических групп. Область значений F определяется двухэлементным полем чисел $Z = \{0,1\}$.

Известно [4], что на функции, определенные на X^n, можно распространить методы гармонического анализа, то есть по исходной группе X^n построить ортогональный базис преобразования Q_n, которым является множество характеров группы X^n. Характером элемента группы X^n является функция $Q(X_i) = \{q_{i0}, q_{i1}, \ldots, q_{i(2^n-1)}\} \neq 0$, удовлетворяющая условию

$$Q(X_i \oplus X_k) = Q(X_i)\,Q(X_k),$$

$$X_i, X_k \in X^n,$$

то есть отображение таково, что групповая сумма любых двух элементов из области определения преобразуется в произведение (поэлементное) их образов. В случае базиса Фурье элемент характера q_{ij} определяется формулой

$$q_{ij} = (-1)^{X_i W_j^t}, \quad i=j=0,1,\ldots,2^n-1,$$

где $\{W_j\} = W^n$ - область преобразования булевой функции, изоморфная X^n, $X_i W_j^t$ - матричное произведение векторов с операцией сложения по mod 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Ф у р ь е - п р е о б р а з о в а н и е м вектора булевой функции $f(X) = (f(X_0), f(X_1), \ldots, f(X_{2^n-1}))$ является целочисленный вектор той же длины $f^*(W) = (f^*(W_0), f^*(W_1), \ldots, f^*(W_{2^n-1}))$, называемый с п е к т р о м, который определяет разложение вектора булевой функции относительно базиса преобразования Q_n ($Q_n = \|q_{ij}\|$ - квадратная симметрическая матрица порядка 2^n) [4].

Коэффициент j спектра вычисляется следующим образом:

$$f^*(W_j) = \sum_{X_i} f(X_i)\,(-1)^{X_i W_j^t} \qquad (1)$$

Обратный переход имеет аналогичный вид:

$$f(X_i) = 2^{-n} \sum_{W_j} f^*(W_j)\,(-1)^{X_i W_j^t}. \qquad (2)$$

В матричной форме пара Фурье-спектра записывается как

$$f^*(W) = f(X)\,Q_n,$$

$$f(X) = 2^{-n} f^*(W)\,Q_n. \qquad (3)$$

Вычисление спектра по (3) требует 2^{2n} операций. С целью экономии вычислений было предложено несколько алгоритмов быстрого преобразования Фурье, в основе которых лежит возможность представления матрицы Q_n в виде произведения n-й кронекеровой степени матрицы Адамара $Q_1 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$$Q_n = (\times Q_1)^n.$$

Факторизация матрицы Q_n позволяет вычислять спектр булевой функции по формуле

$$f^*(W) = f(X)\prod_{k=0}^{n-1} S_{[k]}, \qquad (4)$$

где $S_{[k]} = (I^{(n-k-1)} \times Q_1 \times I^{(k)})$, $I^{(k)}$ - единичная матрица порядка 2^k. Вычисление спектра по (4) выполняется за $n \cdot 2^{n+1}$ операций, при этом элементы q_{ij} в памяти не хранятся.

Если булева функция имеет неопределенные состояния, то есть на некоторых векторах из X^n она может принимать значения, равные либо "I", либо "0", то она представляется двумя спектрами $f^*(W)$ и $g^*(W)$. Спектр булевой функции от неопределенных состояний $g^*(W)$ вычисляется так же, как и $f^*(W)$.

Преобразование Фурье булевых функций сохраняет все свойства классического Фурье-преобразования.

В этой работе мы будем пользоваться свойством линейности Фурье-преобразования и понятием действительного преобразования булевой функции [5].

Пусть $f_1(X)$ и $f_2(X)$ - любые вещественные функции. Если функции $f_1(X)$ соответствует спектр $f_1^*(W)$, $f_2(X)$ - $f_2^*(W)$, то спектр суммы функций равен сумме спектров:

$$(\alpha f_1(X) + \beta f_2(X))^* = \alpha f_1^*(W) + \beta f_2^*(W), \qquad (5)$$

где α, β – произвольные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Действительное преобразование булевой функции представляет собой действительную функцию, равную исходной, но записанную в виде арифметической суммы ортогональных импликант.

Так, например, если $f(X) = K_1(X) \vee K_2(X)$, где $K_1(X)$ и $K_2(X)$ – импликанты, то на основании правила перехода [5] ее действительное преобразование равно

$$T[f(X)] = K_1(X) + K_2(X) - K_1(X)\, K_2(X).$$

§2. Фурье-спектр импликанты

Импликанту $K(X)$ будем обозначать через $x_{m_{n-k}}^{a_{m_{n-k}}} x_{m_{n-k-1}}^{a_{m_{n-k-1}}} \dots x_{m_1}^{a_{m_1}}$. Переменные, входящие в импликанту, называются связанными и

$$x_{m_g}^{a_{m_g}} = \begin{cases} x_{m_g}, & \text{если } a_{m_g} = 1, \\ \bar{x}_{m_g}, & \text{если } a_{m_g} = 0, \end{cases} \qquad g = 1, 2, \dots, k.$$

Остальные переменные называются свободными, и их количество определяет размерность импликанты k ($k \le n$).

По определению, импликанта – это подмножество точек n-мерного куба (подкуб), на котором булева функция принимает значение, равное "I". С точки зрения групповых представлений этот подкуб может быть либо аддитивной подгруппой V порядка 2^k (т.е. подкуб содержит нулевой вектор X_0), либо ее смежным классом. Причем последний образуется в результате трансляции аддитивной подгруппы по некоторому вектору c, и таких подмножеств будет 2^{n-k}. В первом случае импликанту будем обозначать $K(X) = \{X_i : X_i \in V\}$, во втором – $K(X) = \{X_i \oplus c : X_i \in V\}$. Вектор $c = (c_n c_{n-1} \dots c_1)$ называется лидером смежного класса [3] и определяется непосредственно из импликанты $c_{m_g} = a_{m_g}$, остальные разряды

равны "0". Нетрудно заметить, что лидер – это минимальный элемент смежного класса.

Подпространству V поставим в соответствие n-мерный вектор b (см.[3]), в котором все связанные переменные равны "0", свободные – "I". И тогда импликанту будем задавать двумя векторами: вектором b, образующим подпространство V, и лидером c, т.е. $K(X) = \{X_i \oplus c : X_i \le b\}$.

Смежные классы с операцией сложения по mod 2 образуют фактор-группу X^n/V. Из теоремы о характерах фактор-группы [4] следует, что образом подпространства V в области W^n является множество тех векторов W_j, для которых справедливо условие:

$$X_i W_j^t = 0 \quad \text{для всех} \quad X_i \in V. \qquad (6)$$

Множество векторов, удовлетворяющих условию (6), называется нуль-пространством V^1 (см.[3]).

Из определения (6) следует, что нуль-пространству V^1 будет соответствовать вектор $\bar{b}$, т.е. $V^1 = \{W_j : W_j \le \bar{b}\}$. Очевидно, что нуль-пространство содержит лидеры всех смежных классов подпространства V и его размерность равна 2^{n-k}.

ТЕОРЕМА I. Пусть $K(X) = \{X_i \oplus C : X_i \in V\}$ – импликанта размерности k. Тогда Фурье-спектр булевой функции $f(X) = K(X)$ определяется следующим образом

$$K^*(W) = \begin{cases} 2^k(-1)^{cW_j^t} & \text{для} \quad W_j \in V^1, \\ 0 - \text{в других случаях.} \end{cases} \qquad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (1), Фурье-спектр булевой функции, равной импликанте, имеет вид:

$$K^*(W) = \sum_{X_i \in V} (-1)^{(X_i \oplus c) W_j^t} = (-1)^{cW_j^t} \sum_{X_i \in V} (-1)^{X_i W_j^t} \qquad (8)$$

для всех $W_j \in W^n$.

Согласно теореме о характерах фактор-группы [4], элементы спектра (8) отличны от нуля для $W_j \in V^1$. Тогда на основании условия (6)

$$\sum_{X_i \in V} (-1)^{X_i W_j^t} = 2^k .$$

Следовательно,

$$K^*(W) = 2^k (-1)^{cW_j^t} \text{ для всех } W_j \in V^1,$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР I. Пусть дана функция от трех аргументов $f(X)=K(X)=x_2$. Необходимо определить ее спектр.

Векторами, задающими импликанту $K(X) = x_2$, являются вектор b = IOI и лидер c = OIO, т.е. $K(X) = \{X_i \oplus 010 : X_i \leq 101\}$. Тогда нуль-пространство $V^1 = \{W_j : W_j \leq 010\}$, т.е. только на двух векторах спектральные коэффициенты отличны от нуля и равны 4. Знак коэффициента разложения определяется выражением $(-1)^{cW_j^t}$. В результате Фурье-спектр импликанты равен $K^*(W) = (4,0,-4,0,0,0,0,0)$.

§3. Фурье-спектр булевой функции

Пусть булева функция $f(X)$ задана д.н.ф. Перейдем от д.н.ф. этой функции к ее действительному преобразованию [5]:

$$T[f(X)] = \sum_{p=1}^{l} K_p(X) - \sum_{p=1}^{l-1} \sum_{s=p}^{l} K_{ps}(X), \tag{9}$$

где $K_{ps}(X) = K_p(X)\, K_s(X)$ – импликанта пересечения.

Из (9) видно, что этот переход сводится к определению импликант пересечения. Поскольку импликанты мы обозначаем только связанными переменными, запишем условие пересечения импликант в терминах связанных переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Две импликанты $K_p(X)$ и $K_s(X)$ п е р е с е к а ю т с я, если для всех переменных, которые являются связанными для обеих импликант, выполняется условие

$$(a_{m_g})_p \oplus (a_{m_g})_s = 0, \quad m_g = 1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

Каждая импликанта пересечения $K_{ps}(X)$ представляет собой подкуб, на котором булева функция $f(X) = K_p(X)\, K_s(X)$ равна "I". Ее размерность меньше либо равна размерности любой исходной импликанты. Импликанту пересечения так же, как и исходную, будем задавать двумя векторами b_{ps} и c_{ps}, то есть $K_{ps}(X) = \{X_i \oplus c_{ps} : X_i \leq b_{ps}\}$. Лидер смежного класса c_{ps} и вектор b_{ps}, образующий нуль-пространство, определяем непосредственно по лидерам и векторам b исходных импликант

$$\begin{aligned} (c_m)_{ps} &= (c_m)_p \vee (c_m)_s, \\ (b_m)_{ps} &= (b_m)_p \vee (b_m)_s. \end{aligned} \tag{11}$$

ТЕОРЕМА 2. Ф у р ь е - с п е к т р б у л е в о й ф у н к ц и и $f(X)$, з а д а н н о й д и з ъ ю н к т и в н о й н о р м а л ь н о й ф о р м о й, р а в е н

$$f^*(W) = \sum_{p=1}^{l} K_p^*(W) - \sum_{p=1}^{l-1} \sum_{s=p+1}^{l} K_{ps}^*(W). \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, представим булеву функцию $f(x)$ суммой ортогональных импликант (9). Ее спектр на основании свойства линейности Фурье-преобразования (5) равен

$$f^*(W) = \sum_{p=1}^{l} K_p(W) - \sum_{p=1}^{l-1} \sum_{s=p+1}^{l} K_{ps}(W).$$

В том случае, если для всех пар исходных импликант условие (10) не выполняется, то д.н.ф. булевой функции называется р а з д е л и т е л ь н о й [5] и ее спектр определяем как сумму спектров исходных импликант:

$$f^*(W) = \sum_{p=1}^{l} K_p^*(W).$$

Т а б л и ц а I

W^n	$K_1^*(W)$	$K_2^*(W)$	$K_3^*(W)$	$K_{12}^*(W)$	$f^*(W)$
000	4	2	2	1	7
001	0	-2	2	-1	-1
010	-4	0	2	-1	-3
011	0	0	2	1	3
100	0	2	0	1	-1
101	0	0	0	-1	-1
110	0	-2	0	-1	-3
111	0	0	0	1	1

ПРИМЕР 2. Пусть задана булева функция $f(X) = x_2 \vee \bar{x}_3 x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_1$. Необходимо определить её спектр.

Спектр импликанты $K_1(X) = x_2$ вычислен в примере I. Векторами, задающими импликанты $K_2(X) = \bar{x}_3 x_1$ и $K_3(X) = \bar{x}_2 \bar{x}_1$, являются

$b_2 = 010$, $c_2 = 001$ и $b_3 = 100$, $c_3 = 000$. Далее для всех пар импликант проверяем условие (10). Импликанты $K_1(X)$ и $K_2(X)$ не имеют ни одной общей связанной переменной, следовательно, $K_{12}(X) \neq 0$ и $b_{12} = 000$, $c_{12} = 011$. Импликанты $K_1(X)$ и $K_2(X)$, $K_2(X)$ и $K_3(X)$ ортогональны. В табл.1 приведены спектры импликант и функции $f(X)$.

§4. Фурье-спектр системы булевых функций

Пусть система булевых функций $F=\{f_q(K), f_{q-1}(K), \dots, f_0(K)\}$ задана табл.2, где каждая функция $f_\xi(K)$ представлена (0,1) - вектором длины l (l - общее количество импликант в системе), равенство $f_\xi(K_p)=1$ означает вхождение импликанты $K_p(X)$ в д.н.ф. функции $f_\xi(K)$.

Таблица 2

$K_p(X)$	$f_q(K)$	$f_{q-1}(K)$	...	$f_\xi(K)$	...	$f_0(K)$	$d(K_p)$
$K_1(X)$	1	0		1		0	$d(K_1)$
...	...	...		...		...	...
$K_p(X)$	0	1		0		1	$d(K_p)$
...	...	...		...		...	...
$K_l(X)$	1	0		1		1	$d(K_l)$

От системы функций $F=\{f_q(K), f_{q-1}(K), \dots, f_0(K)\}$ перейдем к вектору $F(X) = (F(X_0), F(X_1), \dots, F(X_{2^n-1}))$, элемент i которого равен

$$F(X_i) = \sum_\xi 2^\xi f_\xi(X_i), \quad \xi = 0,1,\dots,q.$$

Тогда коэффициент j спектра системы $F^*(W) = (F^*(W_0), F^*(W_1), \dots, F^*(W_{2^n-1}))$, согласно свойству линейности Фурье-преобразования (5), имеет вид

$$F^*(W_j) = \sum_\xi 2^\xi f^*_\xi(W_j), \quad \xi = 0,1,\dots,q.$$

Такое представление позволяет вычислять Фурье-спектр системы булевых функций следующим образом. Для каждой функции $f_\xi(K)$ на-

ходится действительное преобразование в виде (9), по теореме 2 вычисляется ее спектр, а затем $F^*(W)$ определяется как сумма ряда

$$F^*(W) = \sum_\xi 2^\xi f^*_\xi(W), \quad \xi = 0,1,\dots,q. \tag{13}$$

Очевидно, что сложность вычисления спектра системы булевых функций по (13) будет зависеть не только от количества импликант, но и от количества функций в системе. Чтобы избежать этого, распространим понятие действительного преобразования на систему булевых функций.

Обозначим (0,1)-вектор длины $(q+1)$, указывающий, в какие функции входит импликанта $K_p(X)$, через $F(K_p)=(f_q(K_p), f_{q-1}(K_p), \dots, f_0(K_p))$, а его десятичный эквивалент

$$d[F(K_p)] = \sum_{\xi=0}^{q} 2^\xi f_\xi(K_p) = d(K_p) \quad \text{(см. табл. 2).}$$

Тогда импликанту $K_p(X)$ будем задавать двумя векторами b_p и c_p и константой $d(K_p)$, а систему булевых функций - множеством импликант $F = \{K_p(X), d(K_p)\}$, $p = 1,2,\dots,l$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Действительное преобразование системы булевых функций $F=\{K_p(X), d(K_p)\}$ представляет собой действительную функцию, равную исходной, но записанную в виде арифметической суммы ортогональных импликант

$$T[F] = \sum_{p=1}^{l} d(K_p)K_p(X) - \sum_{p=1}^{l-1} \sum_{s=p+1}^{l} d(K_{ps})K_{ps}(X), \tag{14}$$

где $d(K_{ps})$ - десятичный эквивалент импликанты пересечения, $K_{ps}(X) = K_p(X)\,K_s(X)$.

Очевидно, что проверка исходных импликант на пересечение по (10) имеет смысл лишь в том случае, если они одновременно входят хотя бы в одну функцию системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Две импликанты $K_p(X)$ и $K_s(X)$ из системы булевых функций $F=\{K_p(X), d(K_p)\}$ пересекаются, если существует хотя бы одно ξ, $\xi = 0,1,\dots,q$, такое, что

$$f_\xi(K_p)\, f_\xi(K_s) = 1 \tag{15}$$

и выполняется условие (10).

Лидер e_{ps} и вектор b_{ps}, образующий нуль-пространство, определяются по соотношениям (11), а десятичный эквивалент $d(K_{ps}) = d[F(K_p)\, F(K_s)]$.

ТЕОРЕМА 3. Фурье-спектр системы булевых функций, заданных дизъюнктивной нормальной формой, равен

$$F^*(W) = \sum_{p=1}^{l} d(K_p)K_p^*(W) - \sum_{p=1}^{l-1}\ \sum_{s=p+1}^{l} d(K_{ps})\, K_{ps}^*(W). \qquad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2 и определения действительного преобразования системы булевых функций.

В том случае, если в системе булевых функций $F=\{K_p(X),\ d(K_p)\}$ все импликанты ортогональны, то ее спектр определяется как сумма спектров исходных импликант

$$F^*(W) = \sum_{p=1}^{l} d(K_p)\, K_p^*(W).$$

Алгоритм вычисления Фурье-спектра системы булевых функций, заданных д.н.ф., и одной функции как частного случая, состоит из трех процедур: вычисления спектров исходных импликант, проверки условия пересечения импликант и вычисления спектров импликант пересечения. Программа алгоритма, реализованная на ЭВМ "Минск-32", занимает ~ 560 команд, представление исходных данных требует 2^n ячеек.

§5. Оценка сложности алгоритма вычисления Фурье-спектра системы булевых функций

Сложность предложенного алгоритма определяется сложностью вычисления спектров исходных импликант, импликант пересечения и проверки условия ортогональности:

$$T_1 = \sum_{p=1}^{l}(n-k_p)\, 2^{n-k_p+1} + \sum_{p=1}^{\gamma}(n-k_p^1)\, 2^{n-k_p^1+1} + \frac{1}{2}\, l(l-1), \qquad (17)$$

где $(n-k_p)\, 2^{n-k_p+1}$ – сложность вычисления спектра исходной импликанты $K_p(X)$, k_p^1 – размерность импликанты пересечения $K_{ps}(X)$, γ – число импликант пересечения.

Если же Фурье-спектр системы булевых функций будем вычислять по алгоритму быстрого преобразования Фурье, то для этого необходимо от каждой импликанты перейти к ее векторному представлению. Эта процедура аналогична определению Фурье-спектра импликанты и требует $k\, 2^{k+1}$ операций на каждую импликанту

$$T_2 = n\, 2^{n+1} + \sum_{p=1}^{l} k_p\, 2^{k_p+1}. \qquad (18)$$

Очевидно, что преимущество того или иного алгоритма можно установить, исходя из сравнения оценок (17) и (18). Однако анализ оценок показывает, что предложенный метод целесообразно использовать в следующих случаях:

1) при вычислении спектров булевых функций, соответствующих отдельным микроподпрограммам, поскольку они, как правило, представлены импликантами большой размерности ($K_p \geq \frac{n}{2}$) с неглубокими пересечениями;

2) при вычислении спектров систем булевых функций, заданных ортогональными импликантами, начиная с $k_p > n-2$.

Так, например, спектр системы булевых функций, вложенной в стандартную программируемую логическую матрицу ($n = 14$, $l = 60$) со слабопересекающимися импликантами ($k_p = \frac{n}{2}$, $\gamma = 60$), при $k_p^1 > 5$ выгоднее вычислять по предложенному алгоритму, чем по алгоритму быстрого преобразования Фурье.

Литература

1. КАРПОВСКИЙ М.Г., МОСКАЛЕВ Э.С. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. Л., "Энергия", 1973.

2. ЛАБУНЕЦ В.Г., СИТНИКОВ О.П. Обобщение понятия пороговой функции k-значной логики над конечным полем Галуа.-"Изв.АН СССР. Техническая кибернетика", 1975, № 5, 137-141.

3. LECHNER R.I. Harmonic analysis of switching functions. - In: Recent Development in switching theory. Ed.A.Mukhopadyay. N.Y. - London, 1971, p.122-230.

4. ЛУМИС Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. М., ИИЛ, 1956.

5. PAPAIOANNOU S.G., BARRETT W.A. The real trausfoun of a Boolean function and its applications. - "Comput. and Elec. Eng", 1975, v.2, N 2-3, p.215-224.

6. RUDIN W. Fourier analysis on groupe. N.Y.- London, 1962.

Поступила в ред.-изд.отд.
2 февраля 1977 года