ВОПРОСЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 69

УДК 51:621.391

ИНДУКТОРЫ И ИХ СВЯЗЬ С МЕТОДОМ ЭМПИРИЧЕСКИХ ПРЕДСКАЗАНИЙ

Б.К.Карапетян, Э.М.Погосян

1. Под индуктивным обобщением мы понимаем процесс построения некоторого описания исследуемого множества ситуаций по информации об отдельных элементах этого множества, быть может, его дополнения до рассматриваемого универсума, а также по известным гипотезам-описаниям указанного множества.

В настоящее время в ряде областей ведутся исследования по индуктивному обобщению, но они почти не связаны друг с другом. Такими, относительно самостоятельными разделами являются теория обучающихся систем, теория экспериментов с автоматами, теория вопросников, теория прогнозирования общерекурсивных функций и ряд других.

Общность природы исследуемых явлений и отсутствие достаточной связи между ними нельзя считать нормальным состоянием при дальнейшем развитии теории индуктивного обобщения. Предложенная в работах [9 и 11] математическая модель процесса индуктивного обобщения в конечных множествах и критерии оценки работы индукторов являются попыткой построения теории, способствующей устранению указанного несоответствия.

С целью с р а в н и т е л ь н о г о изучения индукторов в [12 и 13] в рамках указанной формализации представлен ряд известных алгоритмов и, в частности, алгоритмы формирования понятий [2] и обучения 3-слойного персептрона [3], методы голосования [4], тестовые методы [6], алгоритмы расшифровки автоматов [5]. Рассмотрены также вопросы перехода от общей схемы алгоритмов обучения, описанной в [1], к соответствующим индукторам и индуктивным выводам.

В настоящей работе рассмотрена возможность интерпретации метода эмпирических предсказаний [7, 8] в системе понятий предлагаемой конечной модели индуктивного обобщения. Доказано, что метод эмпирических предсказаний при некоторых несущественных ограничениях является подклассом согласующих абсолютизирующих индукторов, для которого справедлива основная теорема работы [7].

2. Пусть M – произвольное конечное множество из k элементов. Объектами нашего рассмотрения будут произвольные упорядоченные пары непересекающихся подмножеств в M, которые мы будем называть парами множеств.

Для удобства дальнейшего изложения перенумеруем все пары множеств номерами $1,2,\dots,\theta$, где θ – число всевозможных пар в M. Эта нумерация, а также параметр k в дальнейшем предполагаются фиксированными.

Через ν обозначим соответствующий нумерующий оператор, через ν_1, ν_0 – декодирующие операторы, выделяющие по произвольному номеру первую и вторую компоненты пары с этим номером.

В дальнейшем изложении каждая пара множеств и ее номер отождествляются.

Введем следующие обозначения и соглашения: $N = \{0,1,2,\dots\}$, $T = \{0,1,2,\dots,\theta\}$, f – общерекурсивная функция [14], $|A|$ – мощность множества A.

Для произвольных $x,y \in T$ через $|x|$ обозначим мощность множества $\nu_1(x) \cup \nu_0(x)$, а через $x*y$ ($*$ – одна из операций $\cup, \cap, \setminus, \nabla$ – симметрическая разность) обозначим пару множеств с номером $\nu(\nu_1(x)*\nu_1(y), \nu_0(x)*\nu_0(y))$.

Если $|y| \geq |x|$, то y назовем р а с ш и р е н и е м x и будем писать $y \geq x$; если $\nu_1(x) \subseteq \nu_1(y)$ и $\nu_0(x) \subseteq \nu_0(y)$, то y назовем с о г л а с о в а н н ы м р а с ш и р е н и е м x и будем писать $x \subseteq y$.

Пусть также

$$D^l = \{x \mid x \in T \,\&\, |x| = l\} \quad \text{при} \quad 0 \leq l \leq k;$$

$$S_{\geq r} = \bigcup_{l=r}^{k} D^l, \quad S_{\leq r} = \bigcup_{l=0}^{r} D^l \quad \text{при} \quad 0 \leq r \leq k.$$

Элементы множества D^k будем называть а б с о л ю т н ы м и парами множеств.

Введем понятие **индуктора** – алгоритма индуктивного обобщения, которое является естественным обобщением понятия одноместного индуктора, введенного в [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Произвольную n-местную общерекурсивную функцию f, при $n > 0$, назовем **индуктором**, если существует множество T_1, $T_1 \subseteq \mathbb{T}x \dots x\mathbb{T}$, такое, что

1) $\forall x_1 \dots x_n((x_1,\dots,x_n) \in T_1 \to f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{T} \,\&\, f(x_1,\dots,x_n) \geq x)$;

2) $\forall x_1 \dots x_n((x_1,\dots,x_n) \in T_1 | f(x_1,\dots,x_n)| = |x_1| \dots |x_n| = x)$;

3) $\forall x_1 \dots x_n((x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{N}^n \setminus T_1 \to f(x_1,\dots,x_n) = 0 + 1)$.

В дальнейшем нам потребуются только двухместные индукторы ($n = 2$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Индуктор f назовем **абсолютизирующим**, если выполнено условие

$$\forall x_1 x_2((x_1,x_2) \in T_1 \to f(x_1,x_2) \in D^k),$$

и назовем **согласующим**, если выполнено условие

$$\forall x_1\, x_2((x_1,x_2) \in T_1 \to x_1 \subseteq f(x_1,x_2)).$$

Рассмотрим связь метода эмпирических предсказаний [7,8] с индукторами. С этой целью проведем интерпретацию указанного метода через определенные выше понятия.

3. Пусть α – бесконечное множество объектов (исследуемая среда), β – произвольная конечная выборка из α, предназначенная для исследования [7].

Мы полагаем, что мощность выборки β не превосходит некоторого числа c_1, возможно, очень большого.

Пусть также $V_h = \{P_1(x_1,\dots,x_{m_1}),\dots,P_k(x_1,\dots,x_{m_k})\}$ – словарь предикатных символов и $Int_h = \{\hat{P}_1(x_1,\dots,x_{m_1}),\dots,\hat{P}_k(x_1,\dots,x_{m_k})\}$ – интенсиональный базис словаря V_h.

Если специально не оговорено, мы предполагаем V_h и Int_h фиксированными.

Элементарным протоколом назовем каждую из записей вида $P_i(a_1,\dots,a_{m_i})$, или $\overline{P}_i(a_1,\dots,a_{m_i})$, или $\tilde{P}_i(a_1,\dots,a_{m_i})$, которые понимаются соответственно как истинность, ложность или неопределенность отношения $P_i(x_1,\dots,x_{m_i})$ на выборке $a_1,\dots,a_{m_i}$, где $P_i \in V_h$, $a_1,\dots,a_{m_i} \in \alpha$.

Пусть m – максимальная местность предикатов из V_h. Для произвольного $\beta \subset \alpha$ через $\hat{\beta}$ обозначается множество всевозможных выборок длины не более чем m из β.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Протоколом в словаре V_h для множества $\beta \subset \alpha$ назовем матрицу $k|\beta|$, где k – число предикатов в V_h и a_{ij} равно значению предиката P_i на j выборке из β (т.е. a_{ij} есть элементарный протокол).

Множество β, для которого получен протокол x, будем называть базисом x ($B(x)$). По определению, полагаем $|x| = |\beta|$.

Протоколы x_1 и x_2 назовем изоморфными ($x_1 \simeq x_2$) тогда и только тогда, когда существует взаимно-однозначное отображение φ базиса x_1 в базис x_2 такое, что протоколы для $\varphi(B(x_1))$ и x_2 совпадают.

Для произвольного $0 \leq i \leq C_1$ множество всех протоколов $\{x \,|\, |B(x)| = i\}$ разбивается на конечное число классов эквивалентности, так как при фиксированном i множество всех возможных видов заполнения протоколов конечно.

Таким образом, множество M всех классов эквивалентных протоколов конечно, в то время как сами классы могут быть бесконечными. В некоторых случаях мы не будем различать протоколы из одного и того же класса эквивалентности и, говоря об элементе из M, будем иметь в виду произвольный протокол из указанного класса эквивалентности.

Пусть T – множество из всех пар множеств из M, $A = \{(x,y) \,|\, x \in D \,\&\, y \in D^k \,\&\, \nu_0(x) = \emptyset \,\&\, x \subseteq y\}$ и E – подмножество T абсолютных пар множеств, таких, что

$$\forall xyz(z \in E \,\&\, x,y \in M \;\; x \simeq y \to x,y \in \nu_1(z) \;\forall x,y \in \nu_0(z));$$

$$\forall nz\, \exists x(1 \leq n \leq c_1 \,\&\, z \in E \to x \in M \,\&\, |B(x)| = n \,\&\, x \in \nu_1(z)).$$

В нашей интерпретации элементы множества A определяют всевозможные допустимые пары протоколов и тестовых алгоритмов, а элементы множества E – тестовые алгоритмы [7].

4. Предлагается следующая интерпретация метода эмпирических предсказаний.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Произвольную двухместную общерекурсивную функцию f назовем **ЭП-индуктором**, если f удовлетворяет следующим условиям:

$$\forall xy((x,y) \in A \to f(x,y) \in E);$$

$$\forall xy((x\,y) \in A \to w(\nu_1(x),\nu_0(y)) \subseteq f(x,y));$$

$$\exists xyz((x,y) \in A \,\&\, z \in M \,\&\, z \in \nu_1(y) \,\&\, z \in \nu_0(f(x,y))).$$

Заметим, что согласно условию I функция определена на множестве пар из A и поэтому не зависит от выбранного интенсионального базиса.

Из условия 3 видно, что область "единиц" исходной гипотезы должна сужаться по меньшей мере для одной гипотезы из E.

Нижеследующие условия 4 и 5 описывают поведение ЭП-индукторов при заданном способе изменения словаря предикатных символов и интенсионального базиса, а также известном алгоритме перехода от исходных протоколов и тестовых алгоритмов к измененным словарям и интенсиональным базисам.

По существу, эти условия требуют сохранения поведения функции f при так называемом "нетворческом" [7] изменении словаря и интенсионального базиса.

Пусть заданы предикатные словари V и W. Через M_V, M_W, M_{VW}, A_V, A_W, A_{VW}, E_V, E_W, E_{WV} обозначим множества типа M, A и E, определенные для словарей V, W и $V \cup W$ соответственно.

Определим отображение Φ: $M_V \to M_W$ такое, чтс

$\forall x(x \in M_V \to B(x) = B(\Phi(x)))$;

$\forall x_1 x_2 (x_1, x_2 \in M_V \& x_1 \simeq x_2 \to \Phi(x_1) \simeq \Phi(x_2))$.

Обозначим через $\mathcal{F}$ класс отображений, удовлетворяющих выше - указанным условиям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Нетворческим Φ-обогащением протокола $x_1 \in M_V$ и пару множеств $x_2 \in E_V$ при $\Phi \in \mathcal{F}$ назовем соответственно протокол $\Phi_{o\delta}(x_1) \in M_{VW}$ и пару множеств $\Phi_{o\delta}(x_2) \in E_{VW}$ такие, что $\Phi_{o\delta}(x_1) = x_1 \cup \Phi(x_1)$ и $\nu_1(\Phi_{o\delta}(x_2)) = \{y | y \in M_{VW} \& \exists z(z \in \nu_1(x_2) \& y \simeq \Phi_{o\delta}(z))\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Нетворческой Φ-модификацией пары множеств $x \in E_V$ при $\Phi \in \mathcal{F}$ назовем пару множеств $\Phi_M(x) \in E_{VW}$ такую, что $\nu_1(\Phi_M(x)) = \{y | y \in M_W \& \exists z(z \in \nu_1(x) \& y \simeq \Phi(z))\}$.

Если $x \in M_V$, $(x,y) \in A_V$, то через $\Phi_M(x)$ будем обозначать протокол $\Phi(x) \in M_W$, через $\Phi_{o\delta}(x,y)$ - пару $(\mu(\{\Phi_{o\delta} \nu_1(x)\}), \emptyset), \Phi_{o\delta}(y)) \in A_{VW}$, а через $\Phi_M(x,y)$ - пару $(\mu(\{\Phi(\nu_1(x))\}), \emptyset), \Phi_M(y)) \in A_W$.

Из определений видно, что нетворческое обогащение является частным случаем нетворческой модификации.

Непосредственно из определений 3 и 4 вытекает

ЛЕММА I. $\forall xy\Phi(x \in M_V \& y \in E_V \ \Phi \in \mathcal{F} \& x \in \nu_1(y) \to \Phi_{o\delta}(x) \in \nu_1(\Phi_{o\delta}(y)) \& \Phi_M(x) \in \nu_1(\Phi_M(y)))$.

Условие 4 в определении ЭП-индукторов принимает следующий вид:

4) $\forall x_1 x_2 y_1 y_2 z_1 z_2 \Phi (\Phi \in \mathcal{F} \& (x_1, y_1) \in A_V \& (x_2, y_2) \in A_{VW} \&$

$\& f(x_2, y_2) = z_2 \& f(x_1, y_1) = z_1 \& (x_2, y_2) = \Phi_{o\delta}(x_1, y_1) \to z_2 = \Phi_{o\delta}(z_1))$.

Нижеследующее условие 5 аналогично условию 4 для частного случая нетворческой модификации.

Для произвольного словаря $V = \{P_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, P_k(x_1, \ldots, x_{n_k})\}$ через V' будем обозначать словарь $V' = \{Q_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, Q_k(x_1, \ldots, x_{n_k})\}$, через Φ^* - отображение $M_V \to M_{V'}$, такое, что для каждого $z \in M_V$ $\Phi^*(z)$ получается заменой предикатных символов P_i в z на соответствующие символы Q_i. Непосредственно видно, что $\Phi^* \in \mathcal{F}$.

Условие 5 имеет следующий вид:

5) $\forall x_1 x_2 y_1 y_2 z_1 z_2 ((x_1, y_1) \in A_V \& (x_2, y_2) \in A_V, \& f(x_1, y_1) =$

$= z_1 \& f(x_2, y_2) \& (x_2, y_2) = \Phi^*_M(x_1, y_1) \to z_2 = \Phi^*_M(z_1))$,

и требует инвариантности ЭП-индукторов относительно переобозначения предикатных символов из словаря V.

Потребовав от ЭП-индукторов выполнения условия 6

6) $\forall xy((x,y) \in N^2 \setminus A \to f(x,y) = \theta + 1)$,

где $\theta = |T|$, приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА I. Класс ЭП-индукторов содержится в классе абсолютизирующих согласующих индукторов.

5. Для любого $z \in M_V$ через H_z будем обозначать множество $H_z = \{x | x \in M_V \& |B(x)| = |B(z)| \& x \simeq z\}$.

Мы полагаем, что для любого $z \in M_V$ множество $H_z \neq \emptyset$.

Определим двухместную общерекурсивную функцию f^* следующим образом: $\forall xy((x,y) \in A_V \to f^*(x,y) \in E_V \& \nu_0(f^*(x,y)) = \nu_0(y) \cup H_{\nu_1(x)})$ и $f^*(x,y) = \theta + 1$ - в остальных случаях.

Из определения f^* вытекает следующая

ЛЕММА 2. $\forall xy((x,y) \in A \to \nu_0(f^*(x,y)) \cap \nu_0(y) = \nu_0(y) \& \nu_1(f^*(x,y)) \cap \nu_1(y) = \nu_1(y) \setminus \{z | |B(z)| = |B(\nu_1(x))| \& z \simeq \nu_1(x)\})$.

Теперь будет сформулирована

ТЕОРЕМА 2. Общерекурсивная функция f^* является ЭП-индуктором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что f^* удовлетворяет условиям I и 6. Из леммы 2 и условия $H_z \neq \emptyset$ для произвольного $z \in M_Y$ вытекает, что f^* удовлетворяет условиям 2 и 3.

Убедимся в выполнении для f^* условия 4, т.е. в том, что

$$\forall xy\Phi((x,y) \in A \,\&\, \Phi \in \mathcal{F} \to \Phi_{об}(f^*(x,y)) = f^*(\Phi_{об}(x,y))).$$

Обозначим $f^*(x,y) = z$ и $f^*(\nu(\{\Phi_{об}(\nu_1(x))\},\emptyset), \Phi_{об}(y)) = \bar{z}$.

Докажем, что $\nu_0(\Phi_{об}(z)) \subseteq \nu_0(\bar{z})$. Пусть для некоторого $u \in M_{YW}$ имеем $u \in \nu_0(\Phi_{об}(z))$. Из определения обогащения получим $\exists \bar{u}(\bar{u} \in M_Y \,\&\, u = \bar{u} \cup \Phi(\bar{u}) \,\&\, \bar{u} \in \nu_0(z))$.

Учитывая определение f^*, имеем либо $\bar{u} \in \nu_0(y)$, либо $\bar{u} \in H_{\nu_1(x)}$. Если $\bar{u} \in \nu_0(y)$, то, по лемме I, $u = \Phi_{об}(\bar{u}) \in \nu_0(\Phi_{об}(y))$ или, согласно лемме 2, $u \in \nu_0(f^*(\Phi_{об}(x\,y)))$. Если $\bar{u} \in H_{\nu_1(x)}$, то для $\bar{u}$ имеем $|B(\bar{u})| = |B(\nu_1(x))|$ и $\bar{u} \neq \nu_1(x)$. Так как $\Phi \in \mathcal{F}$, то из определения $\mathcal{F}$ имеем: $|B(\Phi_{об}(\bar{u}))| = |B(\Phi_{об}(\nu_1(x)))|$ и $\Phi_{об}(\bar{u}) \neq \Phi_{об}(\nu_1(x))$, т.е. $\Phi_{об}(\bar{u}) \in H_{\Phi_{об}(\nu_1(x))}$. Это значит, что $u \in \nu_0(z)$.

Теперь докажем, что $\nu_0(\Phi_{об}(z)) \supseteq \nu_0(\bar{z})$. Пусть для некоторого $w \in M_{YW}$ имеем $w \in \nu_0(\bar{z})$. Из определения f^* получим либо $w \in \nu_0(\Phi_{об}(y))$, либо $w \in H_{\Phi_{об}(\nu_1(x))}$. Пусть $w \in \nu(\Phi_{об}(y))$. Из условия 2 определения ЭП-индукторов имеем, что $\nu_0(y) \subset \nu_0(z)$. Учитывая лемму I, получаем $\nu_0(\Phi_{об}(y)) \supset \nu_0(\Phi_{об}(z))$, т.е. $w \in \nu_0(\Phi_{об}(z))$.

Пусть $w \in H_{\Phi_{об}(\nu_1(x))}$. Значит, $|B(w)| = |B(\Phi_{об}(\nu_1(x)))|$, и $w \neq \Phi_{об}(\nu_1(x))$. Представим w в виде $\bar{w} \cup \Phi(\bar{w})$, где $\bar{w} \in M_Y$. Так как $\Phi \in \mathcal{F}$, то из определения $\mathcal{F}$ для $\bar{w}$ получаем: $|B(\bar{w})| = |B(\nu_1(x))|$ и $\bar{w} \neq \nu_1(x)$, т.е. $\bar{w} \in H_{\nu_1(x)}$. Следовательно, $\bar{w} \in \nu_0(z)$. Тогда из леммы I имеем, что $w = \Phi_{об}(\bar{w}) \in \nu_0(\Phi_{об}(z))$.

Аналогично можно показать выполнение для f^* условия 5. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Для произвольных ЭП-индуктора f и пары $(x,y) \in A_Y$, если $f(x,y) \neq y$, справедливо $f(x,y) = f^*(x,y)$.

Теорема 3 является аналогом основной теоремы работы [7] и доказывается с использованием тех же идей (см.приложение).

Итак, поведение каждого ЭП-индуктора во всех нетривиальных случаях совпадает с поведением некоторого фиксированного универсального ЭП-индуктора, что означает вырожденность рассмотренного класса индукторов. Последнее, как справедливо отмечено в [7], происходит ввиду наложения на индукторы слишком сильных условий. Однако условия I–3 представляются достаточно естественными. Видимо, получение большего разнообразия в классе ЭП-индукторов связано с изменением условий 4 и 5.

Литература

I. ЦЫПКИН Я.З. Основы теории обучающихся систем. М., I970.

2. ХАНТ Э., МАРИН Дж., СТОУН Ф. Моделирование процесса формирования понятий на вычислительной машине. М., "Мир", I970.

3. МИНСКИЙ М., ПЕЙПЕРТ С. Персептроны. М., I97I.

4. ЖУРАВЛЕВ Ю.И., НИКИФОРОВ В.В. Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок. –"Кибернетика", I97I, №3.

5. ТРАХТЕНБРОТ Б.А., БАРЗДИНЬ Я.М. Конечные автоматы. Поведение и синтез. М., I972.

6. АЙЗЕНБЕРГ Н.Н., ЦИТКИН А.И. Вопросы применения простых тестов. –"Кибернетика", I974, № I.

7. САМОХВАЛОВ К.Ф. О теории эмпирических предсказаний. –В кн.: Вычислительные системы. Вып. 55. Новосибирск, I973, с.3–35.

8. ВИТЯЕВ Е.Е., ГАВРИЛКО Б.П., ЗАГОРУЙКО Н.Г., САМОХВАЛОВ К.Ф. Требования к алгоритмам эмпирического предсказания. –В кн.: Вычислительные системы. Вып. 50. Новосибирск, I972, с.I00–I05.

9. ПОГОСЯН Э.М. Сравнительные характеристики согласующих индукторов. –"Докл.АН Арм ССР, I975, т.60, № 3, I29–I32.

I0. ПОГОСЯН Э.М. I-индукторы и некоторые их свойства. –"Докл. АН Арм.ССР", I974, т.58, № I, с.I0–I4.

II. ПОГОСЯН Э.М. Индуктивный вывод с обратной связью. –"Докл.АН Арм ССР", I975, т. 60, № 4, с.I93–I97.

I2. ПОГОСЯН Э.М. К теории автоматического синтеза понятий. –В кн.: Семиотика и информатика. М., Вып. 8, I976.

I3. КАРАПЕТЯН Б.К., ПОГОСЯН Э.М. Расшифровка автоматов как разновидность индуктивного вывода. –УП Всесоюзн. симпозиум по кибернетике. Материалы симпозиума. Тбилиси, 9–I2 ноября I976 г.

I4. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М., "Наука", I965.

Поступила в ред.-изд.отд.
5 апреля I976 года

Доказательство теоремы 3

Предположим противное. Пусть (x,y) – произвольная пара из A_ν, f– ЭП-индуктор $f(x,y) = z \neq y$, $f^*(x,y) = z^*$ и $z \neq z^*$. Так как $f(x, y) \neq y$, то из условия 2 получаем, что $\nu_0(y) \subset \nu_0(z)$. Это значит, что

$$\exists x_1 (x_1 \in M_\nu \,\&\, x_1 \in \nu_1(y) \,\&\, x_1 \in \nu_0(z)). \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая:

а) $|B(x_1)| \neq |B(\nu_1(x))|$;

б) $|B(x_1)| = |B(\nu_1(x))|$.

Пусть $|B(x_1)| \neq |B(\nu_1(x))|$. Так как $z \in K_\nu$, то, согласно определению E имеем:

$$\exists x_2 (x_2 \in M_\nu \,\&\, |B(x_2)| = |B(x_1)| \,\&\, x_2 \in \nu_1(z)), \qquad (2)$$

при этом $x_1 \simeq x_2$, так как $x_1 \in \nu_0(z)$, а $x_2 \in \nu_1(z)$. Так как $\nu_1(z) \subset \nu_1(y)$, то $x_2 \in \nu_1(y)$.

Определим отображения Φ: $M_\nu \to M_\nu$, и Φ^{-1}:$M_\nu \to M_\nu$ из $\mathcal{F}$ следующим образом:

$$\forall u \in M_\nu \qquad \Phi(u) = \begin{cases} \Phi^*(x_1), & \text{если } u \simeq x_2; \\ \Phi^*(x_2), & \text{если } u \simeq x_1; \\ \Phi^*(u) - \text{в противном случае;} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\forall u \in M_\nu, \qquad \Phi^{-1}(u) = \begin{cases} x_1, & \text{если } u \simeq \Phi^*(x_2); \\ x_2, & \text{если } u \simeq \Phi^*(x_1); \\ \bar{u}, & \text{где } u = \Phi^*(\bar{u}), - \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь Φ^* – определенное в условии 5 перообозначение M_ν в M_ν.

Покажем, что для определенных таким образом Φ и Φ^{-1} выполняется равенство:

$$\Phi_{об}(x,y) = \Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(x,y)). \qquad (5)$$

Действительно, из предположения $|B(x_1)| \neq |B(\nu_1(x))|$ и из (2) следует $\nu_1(x) \neq x_1$ и $\nu_1(x) \neq x_2$. Тогда из (4) получаем:

$$\Phi^{-1}(\Phi_M^*(\nu_1(x))) = \nu_1(x). \qquad (6)$$

По определению обогащения, $\Phi_{об}(\nu_1(x)) = \nu_1(x) \cup \Phi(\nu_1(x))$ и $\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(\nu_1(x))) = \Phi_M^*(\nu_1(x)) \cup \Phi^{-1}(\Phi_M^*(\nu_1(x)))$.

Учитывая (3) и (6), эти выражения можно записать в следующем виде:

$$\Phi_{об}(\nu_1(x)) = \nu_1(x) \cup \Phi^*(\nu_1(x)); \qquad (7)$$

$$\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(\nu_1(x))) = \Phi^*(\nu_1(x)) \cup \nu_1(x). \qquad (8)$$

Так как правые части (7) и (8) равны, то равны и левые, т.е.

$$\Phi_{об}(\nu_1(x)) = \Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(\nu_1(x))). \qquad (9)$$

Осталось показать, что

$$\Phi_{об}(y) = \Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(y)). \qquad (10)$$

Рассмотрим произвольный $w \in \nu_1(y)$. Из леммы I следует, что $\Phi_{об}(w) \in \nu_1(\Phi_{об}(y))$. Если $w \neq x_1$ и $w \neq x_2$, то так же, как для $\nu_1(x)$, получим

$$\Phi_{об}(w) = \Phi^{-1}(\Phi_M^*(w)). \qquad (11)$$

Если $w = x_1$, то из определений обогащения и модификации имеем: $\Phi_{об}(x_1) = x_1 \cup \Phi(x_1)$ и $\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(x_1)) = \Phi_M^*(x_1) \cup \Phi^{-1}(\Phi_M^*(x_1))$.

Учитывая (3) и (4), получаем:

$$\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(x_1)) = \Phi(x_2) \cup x_2 = \Phi_{об}(x_2). \qquad (12)$$

Аналогично можно показать, что

$$\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(x_2)) = \Phi_{об}(x_1). \qquad (13)$$

Так как $x_1, x_2 \in \nu_1(y)$, то, по лемме I, $\Phi_{об}(x_1)$, $\Phi_{об}(x_2) \in \nu_1(\Phi_{об}(y))$. Тогда из (II)–(I3) получим $\nu_1(\Phi_{об}(y)) = \nu_1(\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(y)))$, т.е. (I0), что вместе с (9) дает (5).

Из (5) и однозначности f получаем $f(\Phi_{об}(x,y)) = f(\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(x,y)))$, откуда, учитывая условие 4, имеем $\Phi_{об}(f(x,y)) = \Phi_{об}^{-1}(f(\Phi_M^*(x,y)))$. Из условия 5 следует, что $\Phi_{об}(f(x,y)) = \Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(f(x,y)))$ или

$$\Phi_{об}(z) = \Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(z)). \qquad (14)$$

Докажем, что (I4) неверно. Рассмотрим протокол

$$\Phi_{об}(x_2) = x_2 \cup \Phi(x_2) = x_2 \cup \Phi^*(x_1). \qquad (15)$$

Так как $x_2 \in \nu_1(z)$, то, по лемме I, $\Phi_{об}(x_2) \in \nu_1 \Phi_{об}(z))$. Учитывая (I4), получаем $\Phi_{об}(x_2) \in \nu_1(\Phi_{об}^{-1}(\Phi_M^*(z)))$, откуда, по определению обогащения, следует, что существует $\bar{x} \in M_V$, такой, что

$$\Phi_{об}(x_2) = \bar{x} \cup \Phi^{-1}(\bar{x}) \qquad (16)$$

и

$$\bar{x} \in \nu_1(\Phi_M^*(z)). \qquad (17)$$

Из (I5) и (I6) имеем: $x_2 \cup \Phi^*(x_1) = \bar{x} \cup \Phi^{-1}(\bar{x})$. Так как $\Phi^*(x_1)$ и $\bar{x}$ записаны в словаре V', то $\bar{x} = \Phi^*(x_1)$, т.е., согласно (I7), $\Phi^*(x_1) \in \nu_1(\Phi_M^*(z))$, откуда, учитывая определение Φ^*, получаем $x_1 \in \nu_1(z)$, что противоречит (I).

Последнее, в частности, означает, что для любого протокола $u \in M_V$, если $|B(u)| \neq |B(\nu_1(x))|$, то

$$(u \in \nu_i(y) \to u \in \nu_i(z)), \quad i \in \{1,2\}. \qquad (18)$$

Рассмотрим случай $|B(u)| = |B(\nu_1(x))|$. Так как $H_{\nu_1(x)} \neq \emptyset$, $f(x,y) \neq f^*(x,y)$, то, с учетом (I8), получим $\exists \bar{x}_2 (x_2 \in H_{\nu_1(x)} \,\&\, \bar{x}_2 \in \nu_1(z))$.

При этом так как $\bar{x}_2 \in H_{\nu_1(x)}$, то $\bar{x}_2 \neq \nu_1(x)$. Тогда рассуждения для $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, аналогичные вышеизложенным, приводят к утверждению (I8) для случая "б", т.е. $f(x,y) = y$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.