УДК 621.019.25

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОСУЩЕСТВИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ОДНОРОДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В.А. Павский

Цель функционирования однородных вычислительных систем (ОВС) [I] – решение задач различной сложности (выполнение параллельных программ с различным числом ветвей). В зависимости от сложности задач и характера их поступления на систему можно выделить три основных режима функционирования ОВС [2]: решение сложной задачи, обработка набора задач, обслуживание потока задач. Для каждого из режимов функционирования должны быть учтены по крайней мере три фактора: A – программно-организованная структура сети связи между ЭМ ОВС [I], S_1 – надежность (живучесть) системы, S_2 – процесс решения задач (алгоритмы функционирования).

Каждый из факторов характеризуется набором определенных параметров, вообще говоря, зависящих от времени. Таким образом, функционирование ОВС описывается тройкой (A, S_1, S_2), которую будем называть $\{(A, S_1, S_2)$ – реализацией решения$\}$ [3]. Аналитически $\{(A, S_1, S_2)$ – реализация решения$\}$ может быть оценена вероятностью осуществления системой определенной цели за время $t \in [0, \infty]$, вероятностью пребывания системы в момент времени в одном из возможных состояний заданного множества, математическим ожиданием числа задач, находящихся в ОВС, и т.д. Другими словами, требуется разработать набор показателей, которые давали бы возможность провести анализ функционирования ОВС в основных режимах с учетом влияния параметров всех трех факторов, или, что то же самое, наиболее полно оценить $\{A, S_1, S_2$ – реализацию решения$\}$. Это и является основной задачей теории осуществимости.

В данной работе, помимо вышеперечисленных, введены и рассчитаны следующие показатели осуществимости: вектор-функция реальной готовности, время пребывания любой задачи в системе и в очереди. Разработаны эффективные методы их расчета.

I. Постановка задачи. Имеется ОВС из N элементарных машин (ЭМ). Каждая ЭМ может находиться в одном из трех несовместных состояний: рабочем, восстановления и переключения. Пусть λ, μ, ν – интенсивности соответственно отказов, восстановлений и переключений ЭМ. В случае выхода ЭМ из строя она восстанавливается одним из $m(m \leq N)$ восстанавливающих устройств. Любое восстанавливающее устройство в каждый момент времени t может восстанавливать не более одной ЭМ. Предположим, что на ОВС поступает пуассоновский поток сложных задач интенсивностью α. Каждая задача представлена параллельной программой. Параллельная программа любой задачи может быть настроена на любое число i исправных ЭМ, удовлетворяющих условию $0<k \leq i \leq \ell \leq N$, где k, ℓ – соответственно минимальное и максимальное количества исправных ЭМ, необходимых для реализации задачи на системе. Будем считать, что если на ОВС одновременно решается x задач, то в случае появления свободной ЭМ она предоставляется той задаче, которая решается на большем числе ЭМ. Пусть β_i – интенсивность решения сложной задачи на i ЭМ, $i=\overline{k, \ell}$. (По методике решения задач на ОВС [I], интенсивность решения задачи на i ЭМ есть $i\beta$, где β – интенсивность решения задачи на одной ЭМ.)

Если при поступлении задачи в систему все ЭМ заняты либо их недостаточно для решения задачи (число свободных, исправных ЭМ меньше k), то задача становится в очередь и ждет некоторое, случайным образом заданное время $t=1/\sigma$ (σ – интенсивность, с которой задачи покидают систему), а затем покидает систему.

Наконец, если задача уже находилась в процессе решения и число исправных ЭМ в некоторый момент ее реализации стало меньше k, то эта задача становится в очередь и далее рассматривается как вновь поступившая.

Обозначим через $\xi(t)$ число задач, находящихся в ОВС в момент времени t; $\eta(t)$ – число ЭМ, находящихся в состоянии отказа, $\zeta(t)$ – число переключаемых ЭМ в момент времени t, $t \in [0, \infty]$. Величины $\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$ полностью характеризуют состояние системы в момент времени t. Введем случайный процесс $\Omega(t)=\{\xi(t), \eta(t), \zeta(t)\}$. В силу условий он будет марковским. Обозначим через $P_{ijs}(t)$ вероятность того, что в момент времени t в ОВС находится i задач, j ЭМ находятся в состоянии отказа и s ЭМ переключаются, $i=0,1,\ldots,(s+j) \leq N$.

Поскольку выполняется условие эргодичности [5], то имеет место

$$P_{ijs} = \lim_{t \to \infty} P_{ijs}(t) > 0, \tag{I}$$

причем P_{ijs} определены однозначно и

$$P_{ijs} = P_i \pi_{js}. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\sum_{0}^{\infty} P_i = 1, \quad \sum_{0}^{N} \sum_{0}^{N-j} \pi_{js} = 1. \tag{3}$$

Обычно для нахождения P_{ijs} методами теории массового обслуживания [5] составляется система дифференциальных уравнений. В силу условия (I) при $t \to \infty$ дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические, решение которых вместе с условием (3) дает значение искомых показателей. Заметим, что наша задача относится к классу задач теории массового обслуживания с обратной связью, что является дополнительной трудностью при решении уравнений.

Для вычисления вероятностей P_{ijs} предлагается метод, позволяющий значительно упростить их нахождение по сравнению с традиционным подходом [5]. Поскольку метод может быть использован для решения достаточно широкого круга задач теории массового обслуживания, он заслуживает более полного описания, нежели это необходимо для решения поставленной задачи.

2. Описание метода. Рассмотрим замкнутую физическую систему S, состоящую из N элементов. Относительно каждого элемента системы предположим, что в любой момент времени $t \in [0, \infty]$ он находится в одном из несовместных состояний множества $C=\{C_i\}$, $i=\overline{1, z}$. Элемент системы, находящийся в состоянии C_i, обслуживается в соответствии с некоторым пуассоновским потоком событий с интенсивностью (плотностью вероятностей перехода) $\lambda_{i,j}$, а по окончании обслуживания переходит в состояние C_j. Предположим, что в состоянии C_i находится m_i обслуживающих устройств, причем обслуживающее устройство в любой момент времени может обслуживать не более одного элемента системы. (Под m_i можно понимать, например, ограничение на число восстанавливающих устройств в системе, ограничение на число приборов, занимающихся поиском неисправностей и т.д.) Мы предполагаем, что число состояний, в которых может находиться каждый элемент системы, конечно и из каждого со-

стояния (например, C_i) можно перейти в любое другое (например, C_j) либо непосредственно (при $\lambda_{ij} > 0$), либо транзитом (при $\lambda_{ij} = 0$). Такие системы обладают эргодическим свойством [5]. Если $\lambda_{ij} > 0$, то состояния C_j и C_i будем называть соседними.

Пусть в некоторый момент времени $t \in [0, \infty]$ в состоянии C_i находятся ℓ_i элементов, $\sum_{i=1}^{r} \ell_i = N$. Указанное состояние обозначим через $A = \{A_{\ell_1}, \ell_2, \dots, \ell_r\}$. Положим

$$\delta_{m_i}^{\ell_i} = \begin{cases} \ell_i, & \text{если} \quad \ell_i < m_i, \\ m_i, & \text{если} \quad \ell_i \geq m_i, \end{cases} \qquad i = \overline{1, r}.$$

Пусть $P_{\ell_1, \dots, \ell_r} = P\{A_{\ell_1, \dots, \ell_r}\}$ – вероятность события $A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r}$. Очевидно, что для всякого $t \in [0, \infty)$ имеет место условие нормировки

$$\sum_{\ell_1, \dots, \ell_r} P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r}(t) = 1 \tag{4}$$

и $P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r} = \lim_{t \to \infty} P_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r} > 0$, причем предельные вероятности существуют и определены однозначно.

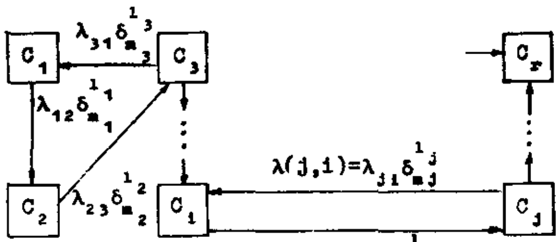

Рис. I

Рассмотрим стационарный режим функционирования системы S. Пусть она находится в состоянии $A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r}$. Построим ориентированный граф для этого состояния системы и против каждой стрелки проставим соответствующую интенсивность (рис. I).

Интенсивность, с которой элементы системы переходят из состояния C_i в соседнее с ним состояние C_j, есть

$$\lambda_{i,j}(m_i, \ell_i) = \lambda_{ij} \delta_{m_i}^{\ell_i}.$$

Используя методы теории массового обслуживания, получаем алгебраическое уравнение [5]. Данное уравнение является условием статистического равновесия системы, находящейся в состоянии $A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r}$ по всем состояниям ℓ_i. Это означает следующее. Выделим некоторое состояние C_i и рассмотрим всевозможные "входы" и "выходы" из него. Тогда сумма всех "входов" во все состояния C_i и "выходов" из них при условии, что система находится в состоянии $A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r}$, равна нулю. Под "входом" в данное состояние C_i мы понимаем произведение интенсивности на вероятность этого состояния. Вероятность находится по тому состоянию системы, для которого исследуемое нами состояние является соседним. Аналогично определяется "выход", но с той разницей, что исследуемое нами состояние является предыдущим.

Справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Условие статистического равновесия выполняется не только для суммы всех состояний C_i для данного $A_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r}$ состояния системы, но и для каждого отдельного состояния C_j, т.е. сумма всех "входов" в состояние C_j равна сумме всех "выходов" из него.

Аналитически наше утверждение можно записать в виде следующих соотношений:

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_{sj} \delta_{m_s}^{\ell_s+1} P_{\ell_1, \dots, \ell_{s-1}, \ell_s+1, \ell_{s+1}, \dots, \ell_j-1, \dots, \ell_r} = $$

$$= P_{\ell_1, \dots, \ell_r} \sum_{s=1}^{r} \lambda_{js} \delta_{m_s}^{\ell_s} \tag{5}$$

для данного состояния C_j, $j = \overline{1, r}$.

Итак, имеем r соотношений типа (5) для произвольных, но фиксированных индексов $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r$. Придав им различные значения ($\ell_i = \overline{0, N}$, $\sum_{i=1}^{r} \ell_i = N$), получим систему уравнений, подобных (5), решение которых дает возможность определить искомые показатели $P_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_z}$.

Докажем, что система, составленная из уравнений типа (5) и условия нормировки (4), определяет значения $P_{\ell_1,\dots,\ell_z} > 0$ единственным образом. Для этого нам потребуется следующая

ЛЕММА. При любых фиксированных ℓ_i ($\sum_{i=1} \ell_i = N$, $\ell_2 = \overline{0,N}$) уравнения (5) являются стационарными уравнениями Колмогорова [6] для некоторой системы $\tilde{S}$, состояния которой описываются ориентированным графом состояний одного элемента системы S с интенсивностями, зависящими от числа элементов системы S, находящихся в состоянии C_j, $j = \overline{1,z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть имеется граф состояний для одного элемента системы S. Рассмотрим некоторую систему $\tilde{S}$, состояниями которой являются состояния C_i, $i = \overline{1,z}$ (рис.I). Обозначим через p_i вероятность того, что система $\tilde{S}$ находится в состоянии C_i. Для того чтобы процесс, проходящий в системе, описывался непрерывной цепью Маркова, введем интенсивности перехода системы $\tilde{S}$ из состояния C_i в состояние C_j

$$\lambda_{ij}(m_i\,\ell_i) = \lambda_{ij}\,\delta_{m_i}^{\ell_i}.$$

Тогда процесс, проходящий в $\tilde{S}$, можно описать системой уравнений Колмогорова. Решения этих уравнений в стационарном случае находится с точностью до постоянной, которую всегда можно определить таким образом, что $p_i > 0$, $i = \overline{1,z}$.

Выделим состояние C_j, $j = 1,z$, и положим

$$p_j = P_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_z}, \quad p_s = P_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_s+1,\dots,\ell_j-1,\dots,\ell_z}.$$

Тогда уравнение (5) совпадает с уравнением Колмогорова для состояния ℓ_j системы $\tilde{S}$ в случае установившегося режима. Суммируя по всем j, получаем решение (5). Лемма доказана.

Для доказательства единственности решения системы уравнений, составленной из соотношений типа (5), достаточно рассмотреть всевозможные значения $\ell_1,\dots,\ell_z$, $\sum^{z} \ell_i = z$, а затем рекуррентно выразить все вероятности $P_{\ell_1,\dots,\ell_z}$, например, через $P_{000\dots0}$. Но-

скольку все $P_{\ell_1,\dots,\ell_z} > 0$, то, добавляя условие нормироки (4), однозначно определяем вероятности $P_{\ell_1,\dots,\ell_z}$.

Заметим, что соотношения (5) далеко не исчерпывают тот запас задач, в котором можно использовать предложенный метод. В самом деле, если интенсивности переходов элементов системы S из состояния в состояние заданы, то в тех случаях, когда нужно написать интенсивности переходов для любого состояния системы, всегда можно ввести фиктивную систему $\tilde{S}$ (или набор таких систем), функционирование которой в стационарном режиме описывается уравнениями Колмогорова. Очевидно, что эти уравнения могут иметь более сложную структуру, нежели соотношения (5). Если обратить внимание на структуру соотношений (5), то легко заметить, что они построены по определенному правилу, удобному для получения рекуррентных соотношений. Это мнемоническое правило можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим граф для одного состояния системы S, например $A_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_z}$. Разорвем его по каждому из состояний C_i, $i = \overline{1,z}$ (рис.2, вертикальные черточки).

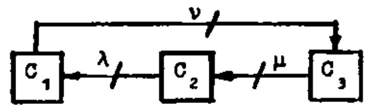

Рис. 2

Возьмем одно из состояний C_j. В нем находится ℓ_j элементов системы. Пусть событие произошло в одном из состояний (например, C_s), соседних с C_j. Интенсивность, с которой событие произошло, есть $\delta_{m_s}^{\ell_s+1}\lambda_{sj}$, а соответствующая ей вероятность –

$$P_{\ell_1,\dots,\ell_{s-1},\dots,\ell_s+1,\dots,\ell_{j-1},\ell_j-1,\ell_{j+1},\dots,\ell_z}.$$

Поскольку событие может произойти в любом из состояний, соседних с C_j, то, взяв сумму всех событий, мы получим левую часть соотношений (5). Правая часть (5) определяется очевидным образом по сумме всех "выходов" из состояния C_j. Пользуясь этим правилом вместе с условием нормировки (4), мы однозначно определяем искомые показатели.

Заметим еще раз, что для единственности решения задачи нам требуется не только существование стационарного режима функционирования системы, но и выполнение условия эргодичности.

3. Решение задачи. Для нахождения вероятностей π (2) используем метод, основанный на вышеприведенном утверждении (см.стр.45). Граф состояний функционирования ЭМ в ОВС представлен на рис.2. Учитывая мнемоническое правило и соотношение (5), имеем

$$(N-j-s)\lambda\pi_{js}=(s+1)\nu\pi_{js+1},\quad j+s\le N,$$

$$\delta_m^j\mu\pi_{js}=(N-j-s+1)\lambda\pi_{j-1,s},\quad j>0,\ j+s\le N,$$

$$s\nu\pi_{js}=\delta_m^{j+1}\mu\pi_{j+1,s-1},\quad s>0,\ j+s\le N.$$

Откуда

$$\pi_{js}=(\pi_{00}\cdot N!\,\lambda^{j+s})/[(N-s-j)!\,s!\,\nu^s\mu!\,\varphi(m,j)],\quad j+s\le N,$$

где

$$\varphi(m,j)=\begin{cases} j!,\ \text{если}\ m>j,\\ m!\,m^{j-m},\ \text{если}\ m\le j.\end{cases}$$

Учитывая условие нормировки (3), находим π_{00}.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если ни в одном из состояний $\{C_i\}$, $i=\overline{1,\tau}$, не возникает очередей на обслуживание из элементов, находящихся в этих состояниях, то граф состояний системы S, построенный на основе дифференциальных уравнений, полученных методами теории массового обслуживания, распадается на независимые одинаковые подграфы, являющиеся графами состояний для одного элемента системы. В этом случае задача может быть решена методами комбинаторного анализа для переходного режима функционирования системы [6].

Прежде чем вычислять вероятности ρ_i, $i=1,2,\ldots$, заметим, что здесь мы имеем дело с моделью теории массового обслуживания с обратной связью, так как если задача решается на минимально возможном числе k ЭМ и одна из k ЭМ выходит из строя, то задача становится в очередь, а затем решается снова. Это означает, что данная задача, которая обслуживается с интенсивностью β_k, в случае выхода из строя одной из k ЭМ с интенсивностью λ как бы порождает новую задачу. Учитывая

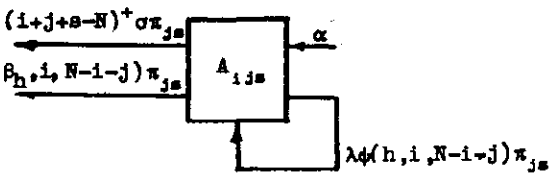

Рис.3

это замечание, вероятности ρ_i будем искать следующим образом. Фиксируем некоторое состояние системы A_{ijs}, $i=0,1,\ldots$, $j+s\le N$. На основании метода, примененного при вычислении π_{js}, минимальный граф, необходимый для получения рекуррентных соотношений, используемых для определения ρ_i, имеет вид, представленный на рис.3.

Используя формулу (5), получаем

$$\rho_{i-1}[\alpha+\lambda\phi(h,i,N-j-s)\pi_{js}]=[\sigma(i+s+j)^{+}+\varphi(\beta_h,i,N-j-s)]\pi_{js}\rho_i,\quad i>0,\qquad (6)$$

где функции $\phi(h,i,N-j-s)$, $\varphi(\beta_h,i,N-j-s)$ определяют число возможных подсистем, занятых решением задач ранга $\tau=\overline{k,\ell}$, и удовлетворяют условиям

$$\varphi(\beta_h,i,N-j-s)=\sum_{i=0}^{\ell-k}x_i\,\beta_{k+i},$$

где

$$x_i\in E_{[\alpha]}=\{0,1,\ldots,[\alpha]\},\quad [\alpha]=\left[\frac{N-j-s}{k+i}\right],$$

причем $\sum^{\ell-k}x_i(k+i)=N-j-s$, $\phi(h,i,N-j-s)=x_0$, $(a)^{+}$ – положительная часть числа α.

Суммируя (6) по всем j, s $(j+s\le N)$, будем иметь

$$\rho_{i-1}\Big[\alpha+\lambda\sum_0^N\sum_0^{N-j}\phi(h,i,N-j-s)\pi_{js}\Big]=$$

$$=\Big\{\sum_0^N\sum_0^{N-j}[\sigma(i+s+j-N)^{+}+\varphi(\beta_h,i,N-j-s)]\pi_{js}\Big\}\rho_i.\qquad (7)$$

Для определения ρ_i, $i=0,1,2,\ldots$, нам потребуется рассмотреть всевозможные разбиения системы на подсистемы. Окончательно ρ_i находится по формуле полной вероятности.

Рассмотрим два частных случая.

Случай 1. $k=\ell=1$, $\beta_i=\beta_1=\beta$.

Имеем

$$\phi(h,i,N-s-j)=\delta^i_{N-j-s},\quad \varphi(\beta_h,i,N-j-s)=\beta\delta^i_{N-j-s}.$$

Тогда из (7)

$$\rho_{i-1}\left\{\alpha+\lambda\sum_0^{N}\sum_0^{N-j}\pi_{js}\,\delta^{i}_{N-j-s}\right\}=\rho_i\left\{\sum_0^{N}\sum_0^{N-j}\pi_{js}\left[\beta\delta^{i}_{N-j-s}+\sigma(i+j+s-N)^{+}\right]\right\}. \qquad (8)$$

Значение ρ_0 определяется из условия нормировки (3), а π_{js} удовлетворяет формуле (6).

С л у ч а й 2. $k=h$, $\ell=N$, $\nu\to\infty$, β_i, $i=\overline{n,N}$.

Из (7) получаем $\varphi(\beta_n, i, N-j-s)=\beta_{N-j}$, $\phi(h,i,N-j-s)=N-n$.

Тогда

$$\rho_{i-1}\left[\alpha+\lambda\sum_{j=N-n}^{N}\pi_j(N-j)\right]=\left\{\sum_{j=0}^{N-n}\left[(i-1)\sigma+\beta_{N-1}\right]\pi_j+i\sigma\sum_{j=N-n-1}^{N}\pi_j\right\}\rho_i,$$

где π_j удовлетворяет (6) при $s=0$, $\pi_0=\left[\sum_0^{N}\pi_j/\pi_0\right]^{-1}$, $j=\overline{1,N}$; π_j/π_0 – коэффициент при π_j. Зная ρ_i, $\rho = 0, 1, \ldots$, легко вычислить такие показатели, как $\mathcal{N}=\sum_1^{N}\sum_1^{N-j} j\,\pi_{js}$ – среднее число ЭМ, находящихся в состоянии отказа; $\mathcal{M}=\sum_1^{\infty} i\,\rho_i$ – среднее число задач, находящихся в системе; $m=N-\sum_1^{N}\sum_1^{N-j}(j+s)\,\pi_{js}$ – среднее число исправных ЭМ; $\bar{S}=\{S_\ell\}$, $\ell=\overline{1,N}$, – вектор-коэффициент реальной готовности, являющийся вероятностью того, что в ОВС находится не менее ℓ свободных, исправных ЭМ, $i+j+\ell\le N$,

$$S_\ell=\sum_{i=0}^{N-\ell}\ \sum_{j=0}^{N-\ell-i}\ \sum_{s=0}^{N-\ell-i-j}\rho_i\,\pi_{js}. \qquad (9)$$

Поскольку $\nu\gg\mu>\lambda$, то

$$S_\ell\cong\sum_{i=0}^{N-\ell}\ \sum_{j=0}^{N-\ell-i}\rho_i\,\pi_j, \qquad (10)$$

где π_j – вероятность того, что в ОВС j ЭМ находится в состоянии отказа.

На рис.4 представлены координаты вектор-коэффициента реальной готовности для $N=10$, $\sigma=10^{-}$, $m=1$, $\nu=100$ и

1) $\alpha=0$, $\beta=0$, $\lambda=10^{-1}$, $\mu=1$,
2) $\alpha=5$, $\beta=10$, $\lambda=0$, $\mu=0$,
3) $\alpha=5$, $\beta=10$, $\lambda=1$, $\mu=1$,
4) $\alpha=5$, $\beta=10$, $\lambda=10^{-1}$, $\mu=1$,
5) $\alpha=5$, $\beta=10$, $\lambda=10^{-2}$, $\mu=1$.

Коэффициенты готовности, вычисленные по формуле (9) для $\nu=10^{2}$ и по формуле (10) при $\nu\to\infty$, совпадают с точностью до 0,002. Следовательно, при практических вычислениях удобно пользоваться формулой (10).

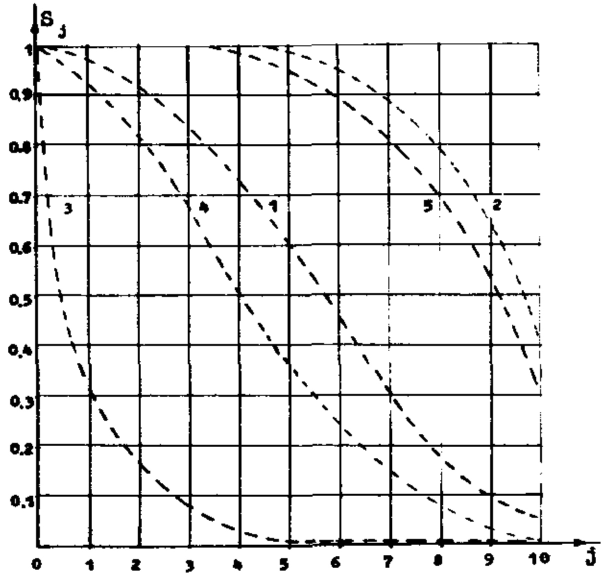

Рис. 4

4. Р а с ч е т ф у н к ц и и $W(t)$. Учет надежности элементарных машин существенно усложняет аналитические выражения для показателей осуществимости. С другой стороны, современные вычислительные машины обладают достаточно высокой надежностью. Поэтому целесообразно рассмотреть показатели осуществимости для случая, когда $\lambda\to 0$, т.е. считать все ЭМ абсолютно надежными. Для этого необходимо и достаточно выполнение условий

$$\frac{\alpha\lambda(\mu+\nu)}{N\beta\mu\nu}<\varepsilon, \quad \text{если} \quad N\lambda\le m\left(\lambda+\mu+\frac{\lambda\mu}{\nu}\right), \qquad (11)$$

$$\frac{\alpha(N\lambda-m\mu)}{Nm\beta\mu}<\varepsilon, \quad \text{если} \quad N\lambda>m\left(\lambda+\mu+\frac{\lambda\mu}{\nu}\right), \qquad (12)$$

или (в силу того, что $\nu\gg\mu>\lambda$)

$$\frac{\alpha\lambda}{N\beta\mu} < \varepsilon, \quad \text{если} \quad N\lambda \le m(\lambda+\mu). \qquad (13)$$

В самом деле, для абсолютно надежной ОВС имеем $\frac{\alpha}{N\beta} < 1$, а с учетом надежности $\frac{\alpha}{\mathcal{K}\beta} < 1$, тогда

$$\frac{\alpha}{N\beta} + \varepsilon = \frac{\alpha}{\mathcal{K}\beta}. \qquad (14)$$

Для $\mathcal{K}$ справедлива формула (6)

$$\mathcal{K} = \begin{cases} N\mu\nu/(\lambda\mu+\lambda\nu+\mu\nu), & \text{если } N\lambda \le m\left(\lambda+\mu+\frac{\mu\lambda}{\nu}\right), \\ \frac{m\mu}{\lambda}, & \text{если } N\lambda > m\left(\lambda+\mu+\frac{\mu\lambda}{\nu}\right). \end{cases} \qquad (15)$$

Из (14) и (15) получаем (11),(13), а при $\nu\to\infty$ аналогично получаем (12).

Погрешность ε определяется практическими соображениями.

Пусть $N = 100$, $\mu = 0,1$, $\varepsilon = 10^{-}$, тогда при $\lambda < 10^{-3}$ $\alpha < 10$, если $\beta = 0,1$; $\alpha < 100$, если $\beta = 1$, и т.д. Вычислим функцию распределения $W(t)$ времени пребывания любой задачи в системе для ОВС, состоящей из N ЭМ, на которую поступает пуассоновский поток простых задач интенсивностью α и интенсивностью обслуживания каждой задачи β.

Положим $W(t) = P\{\tau \le t\}$, где $P\{\tau \le t\}$ – вероятность того, что любая задача, поступившая в систему, будет находиться в ней в течение времени $\tau \le t$.

Очевидно, что если задача, поступившая в систему, застает очередь длиной $i > 0$, то время t пребывания задачи в системе складывается из длительности решения задач, стоящих перед ней, и непосредственного времени решения нашей задачи. Следовательно, $W(t)$ можно представить в виде:

$$W(t) = \int_0^t \tilde{W}(t-\tau)\, dG(\tau), \qquad (16)$$

где $G(\tau)$ – распределение времени решения задачи. В нашем случае $G(\tau) = 1 - e^{-\beta\tau}$.

Если при поступлении задачи в ОВС имеется хотя бы одна свободная ЭМ, то она сразу начинает решение. Тогда соответствующая вероятность имеет вид: $\sum\limits_{i=0}^{N-1} P_i$.

Если задача, поступившая в систему, застает очередь длиной i, то вероятность того, что она будет ждать своего решения в течение времени $\tau \le t$, есть

$$\mathcal{J}(t,i) = \int_0^t \frac{(N\beta)^{i+1}\tau^i e^{-N\beta\tau}}{\Gamma(i+1)}\, d\tau = 1 - e^{-N\beta t}\sum_0^i \frac{(N\beta t)^s}{s!}. \qquad (17)$$

По формуле полной вероятности получаем

$$\tilde{W}(t) = \sum_0^{N-1} p_i + \sum_{i=0}^{\infty} p_{N+i}\, \mathcal{J}(t,i).$$

Учитывая (16), имеем

$$W(t) = \int_0^t \Big[\sum^{N-1} p_i + \sum_{i=0}^{\infty} p_{N+i}\, \mathcal{J}(t-\tau, i)\Big]\, d(1-e^{-\beta\tau}),$$

где $\mathcal{J}(t-\tau, i)$ вычисляется по формуле (17).

Тогда

$$W(t) = 1 - e^{-\beta t} - \frac{p_N}{1-\frac{\alpha}{N\beta}}\left[1 - e^{-\beta t} - \mathcal{J}(t)\right],$$

где

$$\mathcal{J}(t) = 1 - \frac{N\beta-\alpha}{(N-1)\beta-\alpha}\, e^{\beta t} + \frac{\beta e^{-\beta t}}{(N-1)\beta+\alpha}, \quad \text{если} \quad \alpha \ne (N-1)\beta,$$

$$\mathcal{J}(t) = 1 - e^{-\beta t} - \beta t e^{-\beta t}, \quad \text{если} \quad \alpha = (N-1)\beta.$$

На рис.5 представлена функция $W(t)$ для $N = 10$, $\beta = 1$ и $\alpha = \overline{5,9}$. Графику с номером $i = \overline{1,5}$ соответствует значение $\alpha = 4+i$. Из графика видно, что для ОВС коллективного пользования ($\beta \div 1$) достигается высокая осуществимость решения задач ($t < 6$ час.).

Таким образом, функционирование системы достаточно полно характеризуется $\{A, S_1, S_2$ – реализацией решения $\}$, аналитическим выражением которого являются показатели осуществимости решения задач на ОВС. Метод, примененный для вычисления этих показателей, более эффективен по сравнению с традиционными методами теории массового обслуживания, когда число параметров в исходной задаче больше двух.

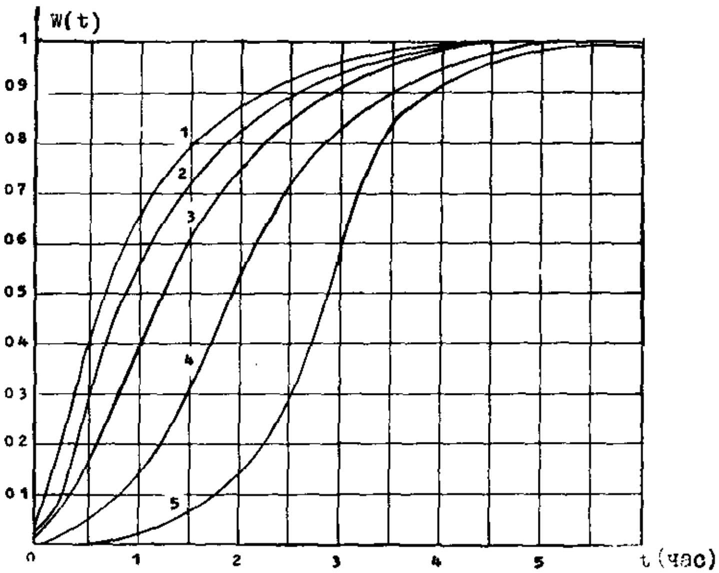

Рис. 5

Числовые результаты показывают, что даже из малонадежных ЭВМ можно строить достаточно высоконадежные системы. Такие ОВС можно эффективно использовать для коллективного пользования. ОВС,построенные на базе современных ЭВМ, обладают высокой осуществимостью решения и могут быть использованы для реализации сложных задач.

Литература

I. ЕВРЕИНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности.Новосибирск,"Наука", 1966.

2. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Исследование функционирования однородных вычислительных систем. Дис. на соиск.учен.степени доктора техн. наук. Л., 1973 (ЛЭТИ).

3. ФЛЕЙШМАН Б.С. Конструктивные методы оптимального кодирования для каналов с шумами. М.,Изд-во АН СССР,1963.

4. ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Об осуществлении решения задач на однородных вычислительных системах. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.5I. Новосибирск,1972, с.38-47.

5. СААТИ Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.,"Сов.радио",1971.

6. ПАВСКИЙ В.А. Вычисление показателей надежности для переходного режима функционирования вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.60.Новосибирск,1974, с.84-103.

7. ПАВСКИЙ В.А. Об осуществимости решения потока простых задач на однородных вычислительных системах. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.5I. Новосибирск,1972, с.48-59.

8. ПАВСКИЙ В.А. Функционирование ОВС как системы массового обслуживания с обратной связью. - В кн.: Тезисы докладов XIX научно-технич. конф., посвященной дню радио и связиста. Сек.: вычислительные устройства и системы. Новосибирск, 1976, с.14-16.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 октября 1976 года