М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)
1977 год   Выпуск 72

УДК 517.5

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЛОКАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ И ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В.Н.Коновалов

Пусть Ω^n – произвольное открытое множество точек $x=(x_1,\dots,x_n)$ евклидова пространства $R^n (n\geq 1)$, r – некоторое натуральное число, а $\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ и $\overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ – линейные нормированные пространства, которые определяются следующим образом. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ состоит из непрерывных на Ω^n функций $f(x)$ таких, что на любом замкнутом интервале $\bar{I}^1_e = [x_0, x^0] \subset \Omega^n$ с заданным на нем направлением $e = \dfrac{x^0 - x_0}{|x^0 - x_0|}$ след $f(x)$ на $\bar{I}^1_e$

$$f_{|\bar{I}^1_e}(x) \overset{df}{=} f(x_0 + te),\quad t\in [0, |x^0 - x_0|\,]$$

имеет обычную производную

$$f^{(r-1)}_{|\bar{I}^1_e}(x) = \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\, f(x_0 + te),$$

которая абсолютно непрерывна на $\bar{I}^1_e$. Кроме этого, полагаем что $f(x)\in \overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ только тогда, когда ограничена норма

$$\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)} = \sup_{\bar{I}^1_e\subset \Omega^n}\ \operatorname*{essup}_{x\in \bar{I}^1_e} |\, f^{(r)}_{|\bar{I}^1_e}(x)|.$$

Пространство $\overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ состоит из непрерывных на Ω^n функций $f(x)$, имеющих в каждой точке $x\in \Omega^n$ всевозможные частные и смешанные

производные $f^{(\bar{s})}(x)$ до порядка $r-1$ ($f^{(0)} \overset{df}{=} f$), которые на любом замкнутом интервале $\bar{I}^1_{e_j}\subset\Omega^n$, $1\leq j\leq n$, параллельном одному из единичных векторов e_j, задающих систему координат в R^n, являются абсолютно непрерывными. При этом, функция $f(x)\in \overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)$, если для нее ограничена норма.

$$\|f\|_{\overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)} = \max_{|\bar{r}|=r}\ \sup_{\substack{\bar{I}^1_{e_j}\subset \Omega^n,\\ j=1,\dots,n,}}\ \operatorname*{essup}_{x\in \bar{I}^1_{e_j}} |f^{(\bar{r})}(x)|,$$

где max взят по всем производным порядка r.

ТЕОРЕМА. Справедливы равенства

$$\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n) = \overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)$$

и неравенства

$$c_1\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)} \leq \|f\|_{\overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)} \leq c_2\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)},$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от f и Ω^n

Вложение $\overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n) \to \overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ проверяется достаточно просто. Обратное вложение $\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n) \to \overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ не является тривиальным и доказывается методом прямых и обратных теорем приближения. При этом в качестве аппарата приближения использованы некоторые локальные сплайны $\sigma_{\frac{\varepsilon}{N}}(f; x)_l$.

Соотношение $\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n) \to \overset{\square}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ легко устанавливается с помощью нижеприведенных лемм.

Пусть $\bar{Q}^n_\varepsilon = \{x: 0\leq x_j - x^0_j\leq \varepsilon,\ j=1,\dots,n\}$ – n-мерный куб такой, что куб $\bar{Q}^n_{2\varepsilon} = \{x: 0\leq x_j - x^0_j \leq 2\varepsilon,\ j=1,\dots,n\}$ содержится в Ω^n.

ЛЕММА I. Если $f\in \overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)$, то для любого $l = r+1, r+2, \dots$ найдется последовательность функций $\sigma_{\frac{\varepsilon}{N}}(f; x)_l$ $(N = 1, 2, \dots)$, совпадающих на любом кубе $Q^n_{\frac{\varepsilon}{2^{l-1}N}}(\bar{i}, \bar{k}) = \{x: x^0_j +$

$+ i_j \frac{\varepsilon}{N} + k_j \frac{\varepsilon}{2^{l-1}N} < x_j < x_j^0 + i_j \frac{\varepsilon}{N} + (k_j + 1) \frac{\varepsilon}{2^{l-1}N},\ j = 1,\dots,n\}$, $i_j = 0,1,\dots,N$, $k_j = 0,1,\dots,(N - i_j)2^{l-1} - 1$, $j = 1,\dots,n$, с многочленом степени не выше $r-1+1$ по каждой переменной и имеющих на $\bar{Q}^n_\varepsilon$ всевозможные непрерывные производные $\sigma^{(\bar r)}_{\frac{\varepsilon}{N}}(f;\,x)_l$ порядка r, и при этом

$$\lim_{N\to\infty} \max_{x\in \bar{Q}^n_\varepsilon} |\, f(x) - \sigma_{\frac{\varepsilon}{N}}(f;\,x)_l| = 0,$$

$$\max_{|\bar r|=r} \max_{x\in \bar{Q}^n_\varepsilon} |\sigma^{(\bar r)}_{\frac{\varepsilon}{N}}(f;\,x)_l| \le c_1 \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)},$$

где постоянная c_1 не зависит от ε, N, Ω^n и $\bar{Q}^n_\varepsilon$.

ЛЕММА 2. Если для функции $f\in \overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)$ и некоторого куба $\bar{Q}^n_\varepsilon$ выполняется лемма I, то $f(x)$ имеет на $\bar{Q}^n_\varepsilon$ всевозможные непрерывные производные $f^{(\bar s)}(x)$ до порядка $r-1$, а производные порядка $r-1$ являются абсолютно непрерывными на любом отрезке $\bar{I}^1_{e_j} \subset \bar{Q}^n_\varepsilon$ $(1 \le j \le n)$, параллельном одной из координатных осей, и

$$\max_{|\bar r|=r} \sup_{\bar{I}^1_{e_j} \subset \bar{Q}^n_\varepsilon,} \operatorname*{essup}_{x\in \bar{I}^1_{e_j}} |\, f^{(\bar r)}(x)\,| \le c_2 \|\, f\|_{\overset{\circ}{W}{}^r_M(\Omega^n)},$$

$$j = 1,\dots,n,$$

где c_2 не зависит от ε, Ω^n и $\bar{Q}^n_\varepsilon$.

Сплайны $\sigma_{\frac{\varepsilon}{N}}(f;\,x)_l$ в леммах I,2 имеют следующую конструкцию:

$$\sigma_{\frac{\varepsilon}{N}}(f;x)_l = \sum_{x^{(i)}\in \bar{Q}^n_\varepsilon} p_r(f;x,x^{(i)})\,\delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(x,x^{(i)})_l, \quad (1)$$

где $p_r(f;x,\,x^{(i)})$ – многочлены степени $\le r-1$, обеспечивающие хорошие локальные приближения $f(x)$ в окрестностях точек $x^{(i)}=(x^0_1 + i_1 \frac{\varepsilon}{N},\dots,\ x^0_n + i_n \frac{\varepsilon}{N})$, $0\le i_j \le N$, $j=1,\dots,n$, а $\delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(x,\,x^{(i)})_l$ является произведением одномерных сплайнов

$$\delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(x,x^{(i)})_l = \prod_{j=1}^{n} \delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(x_j - x_j^{(i_j)})_l\,,$$

каждый из которых получается с помощью соответствующего сдвига функции $\delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(t)_l$, определяемой рекуррентными соотношениями:

$$\delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(t)_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } |t| < \frac{\varepsilon}{N}, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |t| = \frac{\varepsilon}{N}, \\ 0, & \text{если } |t| > \frac{\varepsilon}{N}, \end{cases}$$

$$\delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(t)_1 = \frac{N}{\varepsilon}\int_{t-\frac{\varepsilon}{2N}}^{t+\frac{\varepsilon}{2N}} \delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(t)_0\,dt, \qquad \delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(t)_l = \frac{N}{\varepsilon}\int_{2t-\frac{\varepsilon}{N}}^{2t+\frac{\varepsilon}{N}} \delta_{\frac{\varepsilon}{N}}(t)_{l-1}\,dt\,.$$

Многочлены $p_r(f;\,x,x^{(i)})$, входящие в сумму (I), могут быть построены следующим образом.

При любом h, $0< h \le \frac{\varepsilon}{rN}$, обозначив через

$$f_{r,h}(x)=\frac{1}{h^{rn}}\underbrace{\int_0^h\cdots\int_0^h}_{rn} f(x_1+\tau_{11}+\dots+\tau_{1r},\dots,x_n+\tau_{n1}+\dots+\tau_{nr})\,d\tau_{11}\dots d\tau_{nr}$$

среднюю функцию Стеклова порядка r и положив

$$\varphi_{r,\frac{\varepsilon}{N}}(f;\,x) = (-1)^r \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k+1} \binom{r}{k} f_{r,\frac{k\varepsilon}{r^2N}}(x),$$

возьмем в качестве $p_r(f;x,x^{(i)})$ многочлены Тейлора степени $r-1$ функции $\varphi_{r,\frac{\varepsilon}{N}}(f;\,x)$, построенные относительно точки $x^{(i)}$:

$$p_r(f;\,x,x^{(i)}) \overset{\mathrm{df}}{=} t_{r-1}(\varphi_{r,\frac{\varepsilon}{N}};\,x,x^{(i)}\,).$$

В заключение отметим, что леммы I,2 по форме отличаются от классических прямых теорем (типа Джексона) и обратных (типа Бернштейна-Валле-Пуссена), однако существует определенная связь между леммами I,2 и результатами А.Зигмунда [I, §4.7.9], С.Б. Стечкина [2], Р.М.Тригуба [3,4], С.М. Никольского [5, § 5.2.2 и 5.3.2], Г.Алексича и Г.Суноути [6], В.К.Дзядыка [7] и автора [8].

Литература

I. ЗИГМУНД А. Тригонометрические ряды. М.-Л., ГОНТИ, 1939, 323 с.

2. СТЕЧКИН С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций. -"Изв. АН СССР. Серия мат.", 1951, т.15, с. 219-242.

3. ТРИГУБ Р.М. Конструктивные характеристики некоторых классов функций.-"Изв. АН СССР. Сер.матем.", 1965, т.29, с.615-630.

4. ТРИГУБ Р.М. Характеристика классов Липшица целого порядка на отрезке по скорости полиномиальной аппроксимации. -В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1973, т.18, с.63-70.

5. НИКОЛЬСКИЙ С.М. Приближение функции многих переменных и теоремы вложения. М., "Наука", 1969, 480 с.

6. ALEXITS G., SUNOUCHI J.I. Characterization of classes of functions by polynomial approximation.-"Acta scient.math."(Szeged), 1970, v.31, p.1-7.

7. ДЗЯДЫК В.К. Аппроксимационная характеристика классов Липшица $W^r H^1 (r=0,1,2,\dots)$. - "Analysis mathematika", 1975, t.1, p.19-30.

8. КОНОВАЛОВ В.Н. Аппроксимационные характеристики типа теорем Вейерштрасса функций многих переменных.-"Докл. АН УССР, Серия А", 1975, № 12, с. 1074-1077.

Поступила в ред.-изд.отд.
18 октября 1976 года