МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 72

УДК 518.12

ЛОКАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ МАШИННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

В.К.Исаев, В.В.Сонин, Л.И.Шустова

В настоящее время для восстановления таблично заданой функции и ее производных между узлами сетки широко используется интерполяция кубическими сплайнами [1,2], непрерывными вместе со своими первыми двумя производными. Этот метод дает достаточно высокое качество аппроксимации, но при практической (машинной) реализации обладает следующими недостатками:

1. Для получения коэффициентов сплайна требуется решать систему линейных алгебраических уравнений специального вида.

2. В процессе расчетов необходимо хранить найденные ранее коэффициенты.

3. Для построения сплайна требуется задать граничные условия на восстанавливаемую функцию.

От недостатков пп.1 и 2 полностью свободны методы локальной сплайн-аппроксимации, предложенные В.С.Рябеньким [3,4].

В настоящей работе представлены некоторые результаты анализа качества восстановления и дифференцирования функций многих переменных с помощью алгоритмов, описанных в [1] и являющихся следствием общей схемы [4]. В качестве интерполяционного аппарата используется сплайн $S_5(x)$ пятой степени дефекта 3 с непрерывными первыми двумя производными. В одномерном случае вычисление значения $S_5(x)$ для любого $x \in [x_{j-1}, x_j]$ производится по значениям $f(x_{j-2})$, $f(x_{j-1})$, $f(x_j)$, $f(x_{j+1})$; в двумерном случае строится локальная сетка 4x4 и алгоритм реализуется последовательной интерполяцией по одной переменной (по схеме вычисления частичного сплайна [1,4]). Для вычисления значения $S_5(x)$ в памяти ЭВМ необходимо хранить только таблицу значений исходной функции и граничные усло-

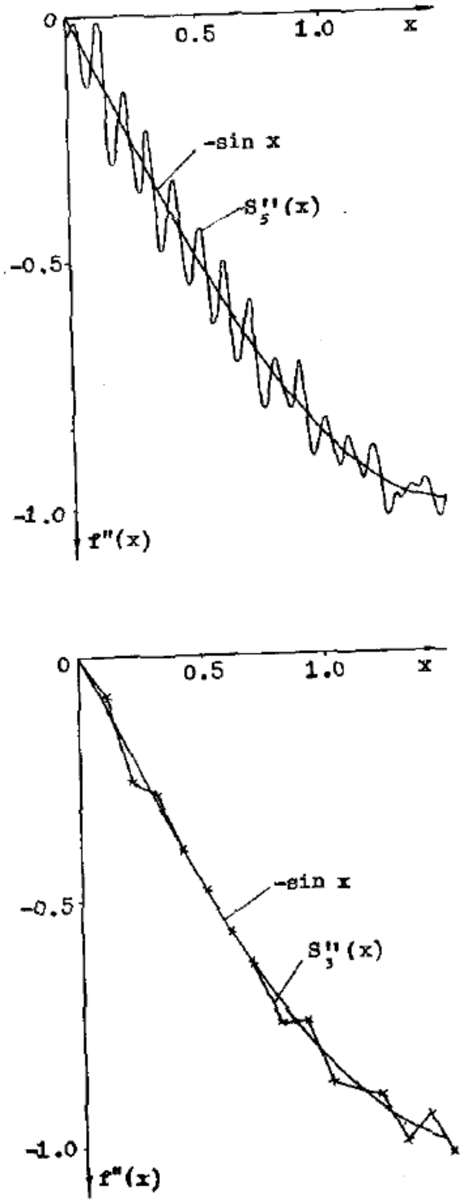

Рис. I

вия. Для сравнения результатов интерполяции по одним и тем же значениям функции и граничным условиям строились нелокальный сплайн третьей степени $S_3(x)$ и локальный сплайн пятой степени $S_5(x)$, удовлетворяющий тем же самым условиям гладкости, что и $S_3(x)$. Сплайн $S_3(x)$ вычислялся по программам (на языке АЛГОЛ-60), приведенным в [5] и лишь незначительно модифицированным. Для вычисления $S_5(x)$ был составлен пакет программ на языке АЛГОЛ-60, для которых структура массивов исходных данных принята такой же, как в [5].

Сравнение результатов интерполяции функции одного переменного с помощью $S_3(x)$ и $S_5(x)$ показано ниже на примере функции $f(x) = \mathrm{SIN}\ x$, заданной в I6 узлах на отрезке $[0,\frac{\pi}{2}]$ (шаг 0.I) с точностью 4 знака после запятой.

На рис. I приведены значения вторых производных функции $f''(x) = -\mathrm{SIN}\ x$, локального сплайна $S_5''(x)$ и нелокального кубического сплайна $S_3''(x)$. Соответствующие материалы по представлению функций $f(x)$ и $f'(x)$ показывают, что аппроксимация функции и ее

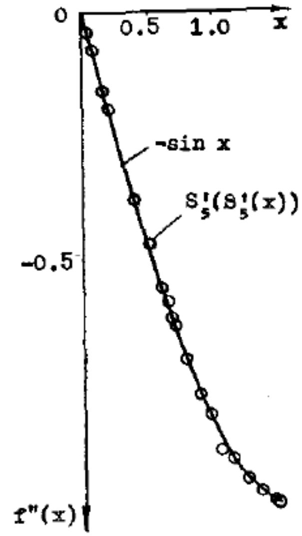

Рис. 2

первой производной с помощью локального и нелокального сплайнов дает одинаковое хорошее совпадение с точными значениями, но для вычисления локального сплайна требуется меньший объем памяти ЭВМ.

На рис. I четко проявляется основной недостаток локальной сплайн-аппроксимации – колебательный характер поведения второй производной $S_5''(x)$ на каждом подынтервале. Анализируя соответствующие формулы, нетрудно показать, что амплитуда колебаний величины $S_5''(x) - f''(x)$ равна произведению вто-

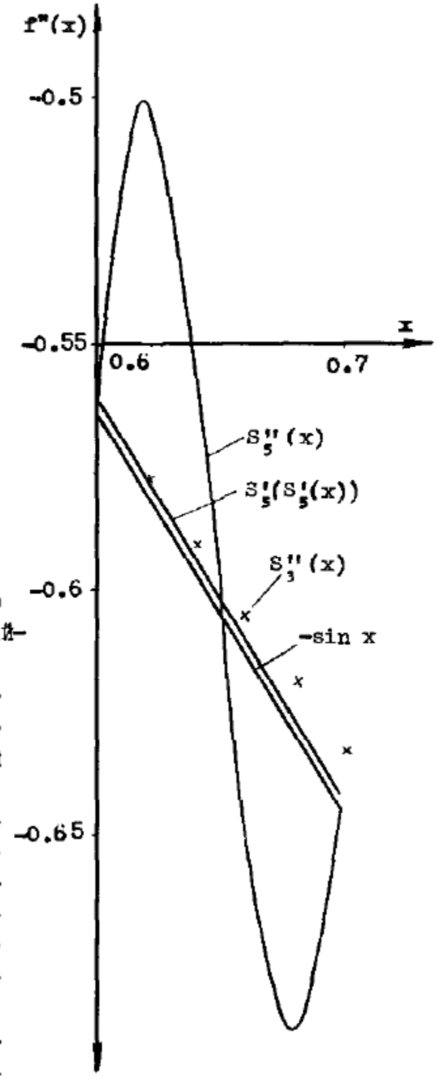

Рис. 3

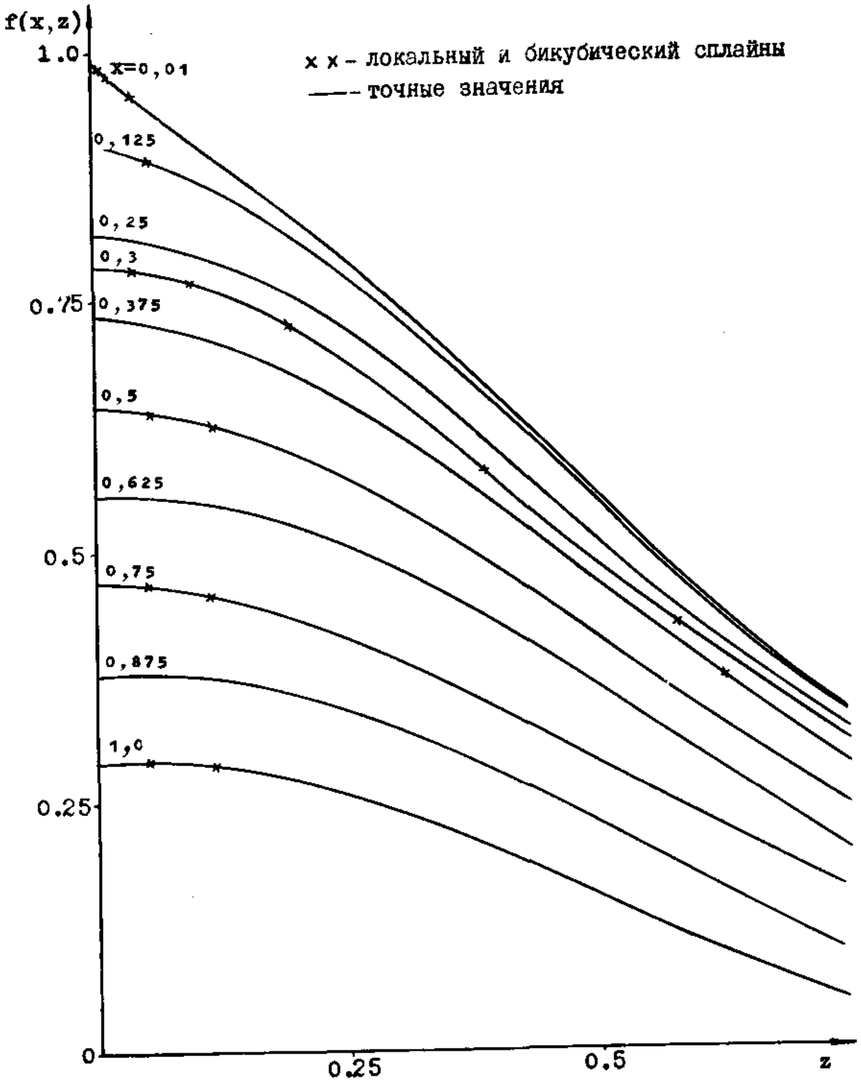

Рис. 4

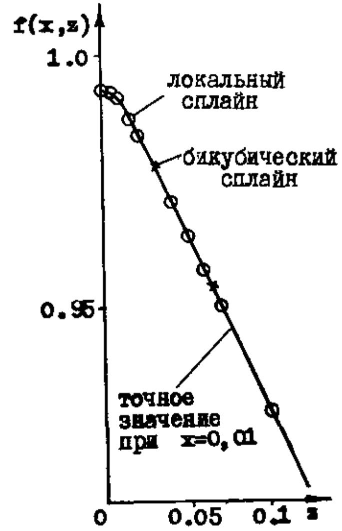

Рис. 5

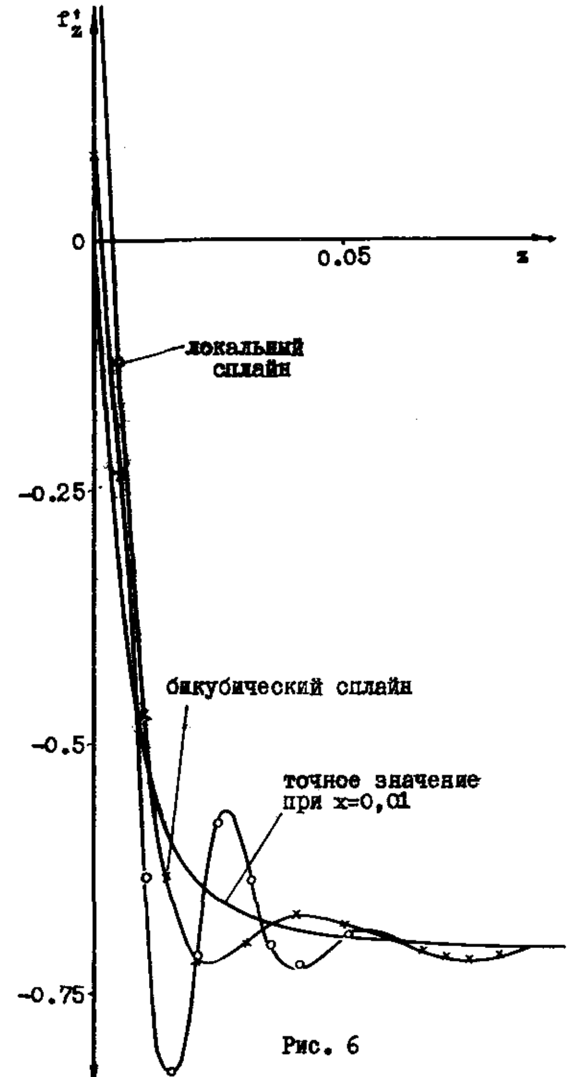

Рис. 6

рой разности функции $f(x)$ на рассматриваемом подынтервале и константы, не зависящей от $f(x)$. На практике погрешности во второй производной локального сплайна оказываются неприемлемо велики. Поэтому для улучшения качества восстановления $f''(x)$ был предложен следующий эвристический алгоритм:

1) для заданной таблицы $x_j = 0,1,\ldots,n$ функции $f(x)$ строится локальный сплайн $S_5(x)$ и таблица $\varphi(x_j) = S'_5(x_j)$, $j = 1,\ldots,n-1$;

2) для функции $\varphi(x)$ по ее таблице строится локальный сплайн $S_5[\varphi(x)]$ и его производная $S'_5[\varphi(x)]$ полагается равной второй производной искомой функции $f(x)$.

Такую процедуру восстановления будем называть методом построения сплайна от сплайна. На рис.2 приведены результаты восстановления второй производной на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$, а на рис.3 в увеличенном масштабе – для отдельного подынтервала.

Аналогичные результаты по восстановлению значений функции двух переменных и ее производных нелокальным кубическим и локальным сплайнами по изложенной выше методике можно проиллюстрировать на примере выполнения таблично заданной поверхности конуса

$$y=f(x,z)= 1 -\sqrt{\frac{x^2+z^2}{2}}. \quad (1)$$

Результаты расчетов приведены на рис.4. Точность построения графиков не позволяет показать величину ошибки. Для выявления погрешностей на рис.5 приведена в десятикратном масштабе одна из кривых рис.4. Порядок погрешностей обеих сплайн-функций получается одинаковым – максимальные ошибки в третьей значащей цифре. Частные производные функции (I) имеют особенность в точке $x = 0, z = 0$, в связи с этим при восстановлении первой и второй производных вблизи точки $x = 0, z = 0$ сплайны $S_3'(x,z)$ и $S_5'(x,z)$ имеют сравнительно большие погрешности.

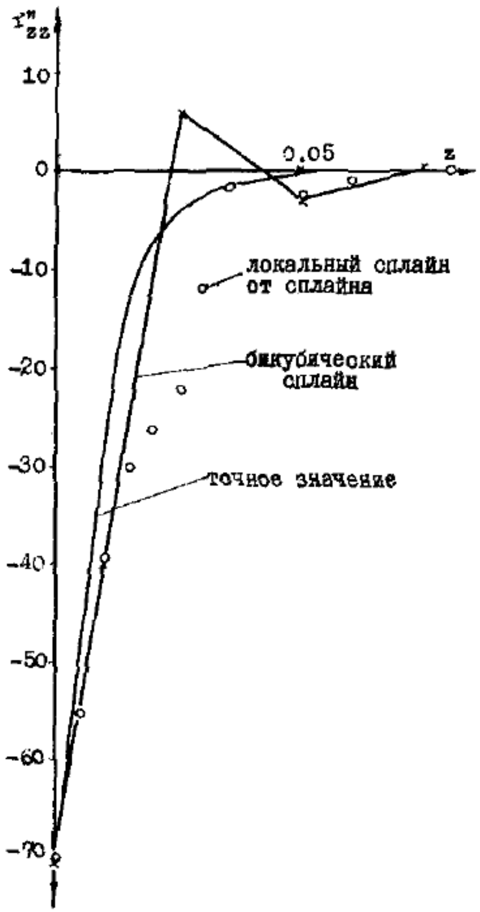

Рис. 7

Типичные примеры приведены на рис.6 для одной из первых и на рис.7 – для одной из вторых производных, причем погрешности приближения сплайнами $S_3(x,z)$ и $S_5(x,z)$ примерно одинаковы.

По мере удаления от особой точки погрешность производных существенно уменьшается и вне круга $x^2 + z^2 > 0{,}001$ становится приемлемой. Отметим, что при использовании $S_3(x,z)$ в рассматриваемом примере потребовалось 2104 ячейки оперативной памяти ЭВМ, для $S_5(x,z)$ – 144 ячейки.

Детальное исследование качества восстановления табличных функций одной и двух переменных проводилось авторами при решении ряда задач аналитического представления кривых и поверхностей летательных аппаратов. Было показано, что описанные выше алгоритмы локальной сплайн-аппроксимации и ее модификация обеспечивают удовлетворительное качество восполнения функции и ее первых двух производных. Положительные результаты апробирования указанных алгоритмов позволили авторам при участии А.М.Рябова разработать пакет прикладных программ для формирования, увязки и сглаживания теоретических обводов ряда агрегатов летательных аппаратов (включая крыло), в том числе для ЭВМ с малым объемом памяти (типа "Мир").

Литература

1. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками. – В кн.: Вычислительные системы. Вып.38. Новосибирск, 1970, с.23-73.

3. РЯБЕНЬКИЙ В.С. Об устойчивости конечноразностных схем и о применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для системы уравнений с частными производными. Дисс. на соиск.учен.степени канд.физ.-мат.наук, 1952 (Моск.гос.ун-т)

4. РЯБЕНЬКИЙ В.С. Локальные формулы гладкого восполнения и гладкой интерполяции функций по их значениям в узлах неравномерной прямоугольной сетки. М., Ин-т приклад.математики АН СССР, 1974. Препринт № 21.

5. МИХАЛЕВИЧ Ю.И., ОМЕЛЬЧЕНКО О.К. Процедуры кусочно-полиноминальной интерполяции функции одной и двух переменных. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1970.

Поступила в ред.-изд. отд.
23 октября 1976 года