

АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЛОПАСТИ ГИДРОТУРБИНЫ

Н.Н.Павлов, В.А.Скороспелов

При автоматизации геометрических расчетов и процесса подготовки управляющей информации для изготовления лопастей гидротурбин на станках с ЧПУ возникает проблема построения математической модели лопасти. Основные особенности этой проблемы состоят в следующем:

а) лопасть имеет сложные пространственные обводы, и ее поверхность в целом не удается описать некоторой функцией ее координат;

б) исходная информация о поверхности лопасти и ее граничных дугах есть некоторая совокупность точек, представленных своими радиусами-векторами относительно пространственной декартовой системы координат;

в) предполагается, что исходные точки, вообще говоря, не лежат на самой поверхности лопасти, а расположены в некоторой ограниченной ее окрестности;

г) поверхность лопасти по своему физическому назначению является непрерывной по крайней мере до касательной плоскости и достаточно плавной. Количественная характеристика плавности поверхности выражается через ее дифференциальные свойства, такие, как изменение нормальных кривизн, скорость изменения нормальных кривизн и т.д.

Условия "в" и "г" означают, что метод построения математической модели лопасти не должен основываться на интерполяции по заданным точкам. По мнению авторов, наиболее приемлемым является подход, при котором математическая модель ищется среди некоторого класса плавных (с точки зрения рассматриваемой проблемы) поверхностей как некоторое приближение к заданной.

В общих чертах методику решения поставленной выше проблемы можно представить следующим образом:

1. Вся поверхность лопасти условно разбивается на три части (рис.1): поверхность всасывающей стороны (I), поверхность стороны нагнетания (II), входная поверхность (III).

2. Граничные дуги поверхностей I, II и линия входной кромки аппроксимируются методом наименьших квадратов кубическим параметрическим сплайном дефекта 2, который определен на сетке $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N = 1$.

Опыт показал, что достаточно иметь $N^* \leq 3$. Размер сетки в этих пределах и расположение ее узлов определяются конкретно для каждой кривой в зависимости от характера ее поведения в пространстве.

3. Среди некоторого множества вектор-функций

$$\vec{R} = \vec{R}(u, v; \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_s), \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

где $\vec{q}_i = (q_{xi}, q_{yi}, q_{zi})$ — варьируемые параметры, ищутся уравнения поверхностей I и II, минимизирующие сумму квадратов расстояний до заданных точек.

Входная поверхность строится так, чтобы она проходила через входную кромку и соприкасалась с поверхностями I и II до касательной плоскости.

Совокупность трех поверхностей образует поверхность лопасти (рис.2).

В §1 излагается метод аппроксимации граничных дуг кубическим параметрическим сплайном. В §2 описывается метод построения аппроксимирующей поверхности по заданным граничным дугам. Ввиду того, что способ построения входной поверхности носит частный характер, он в статье не приводится.

Представленная в статье методика реализована в рамках автоматизированной системы проектирования и технологической подготовки производства лопастей гидротурбин [3].

§1. Аппроксимация граничных дуг

Пусть аппроксимируемая дуга задана упорядоченным массивом точек, представленных своими радиусами-векторами $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ $i=0, \dots, N$. Аппроксимирующая кривая берется в виде кубического параметрического сплайна дефекта 2 $\vec{R}(t) \in C^1[0,1]$, определенного на сетке

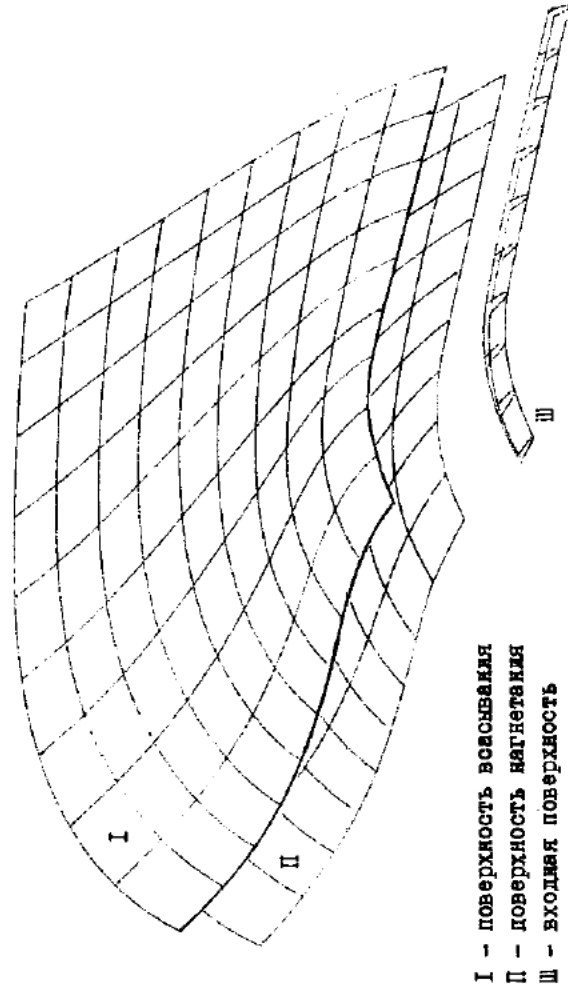


Рис. 1. Схематическое изображение составных частей поверхности лопасти

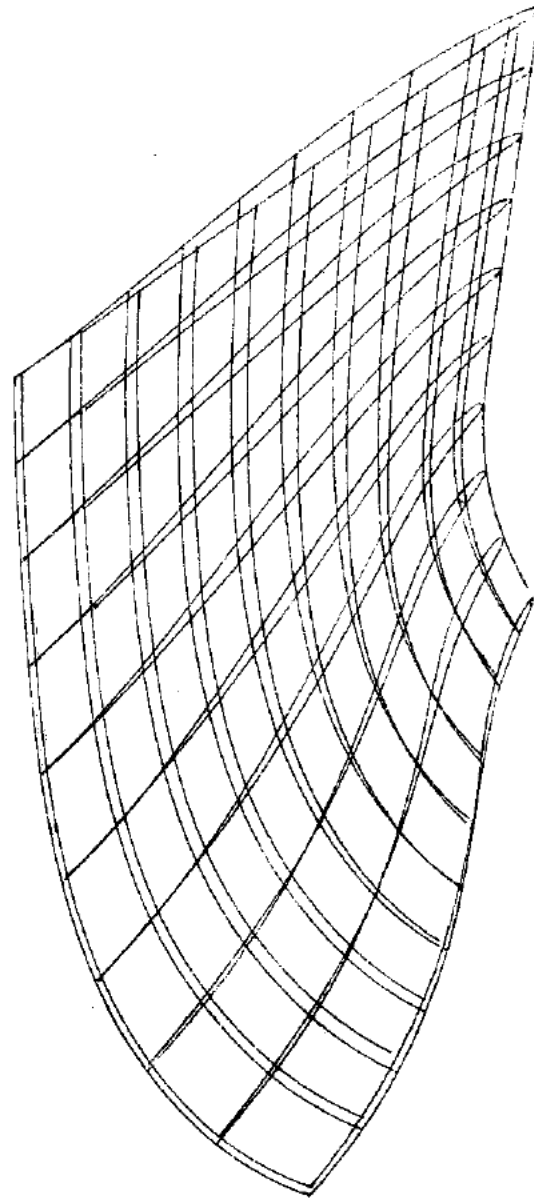


Рис.2. Поверхность лопасти

$0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N$ ($N \leq 3$). На отрезке $[T_{L-1}, T_L]$, $1 \leq L \leq N$, кривая представима в виде:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_{L-1} F_0^{(L)}(t) + \vec{R}_L F_1^{(L)}(t) + \vec{H}_{L-1} G_0^{(L)}(t) + \vec{H}_L G_1^{(L)}(t),$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_0^{(L)}(t) &= (T_L - t)^2 [2(t - T_{L-1}) - h_L] / h_L^3, \\ F_1^{(L)}(t) &= 1 - F_0^{(L)}(t), \\ G_0^{(L)}(t) &= (T_L - t)^2 (t - T_{L-1}) / h_{L-1}^2, \\ G_1^{(L)}(t) &= -(t - T_{L-1})^2 (T_L - t) / h_{L-1}^2, \end{aligned} \right\} \quad (I.1)$$

$$h_L = T_L - T_{L-1}, \quad \vec{R}_L = \vec{R}(T_L), \quad \vec{H}_L = \vec{R}'(T_L).$$

Положим $\vec{R}_0 = \vec{r}_0$, $\vec{R}_N = \vec{r}_n$, остальные коэффициенты сплайна $\{\vec{R}_L, L=1, N-1, \vec{H}_L, L=0, N\} = \{\vec{q}_k, k=1, 2N\}$ подлежат определению. Для этого рассмотрим функционал

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_{2N}) = \sum_{i=1}^{n-1} \min_{t_i \in [a, 1]} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2. \quad (I.2)$$

Требуется найти $\vec{q}_k$, $|\vec{q}_k| < +\infty$, $k=1, 2N$, доставляющие ему минимум.

Переформулируем задачу: ищется минимум функционала

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_{2N}, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 \quad (I.3)$$

при условиях

$$\frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 = 0, \quad t_i \in [0, 1], \quad i = 1, n-1. \quad (I.4)$$

Эти задачи тождественны, если предположить, что функции $\varphi_i(t_i) = [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2$ выпуклы. Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа получаем систему $6n + 2(n-1)$ уравнений относительно того же числа неизвестных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{q}_k} \sum_{i=1}^{n-1} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 + \frac{\partial}{\partial \vec{q}_k} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 &= 0, \\ & k=1, 2N, \\ \frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{i=1}^{n-1} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 + \frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 &= 0, \quad i = 1, n-1. \end{aligned} \right\} \quad (I.5)$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{i=1}^{n-1} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 = \frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 = 0,$$

а,

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 = \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 = \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} \varphi_i(t_i),$$

но из выпуклости $\varphi_i(t_i)$ следует, что $\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} \varphi_i(t_i) > 0$, следовательно, $\lambda_i = 0$, $i = 1, n-1$. Система (I.5) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial \vec{q}_k} \sum_{i=1}^{n-1} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 = 0, \quad k = 1, 2N, \quad (I.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \vec{r}_i]^2 = 0, \quad i = 1, n-1. \quad (I.7)$$

Для решения системы (I.6)-(I.7) применен следующий итерационный процесс: неизвестные разбиваются на две группы $\vec{q}_k$, $k=1, 2N$; t_i , $i=1, n-1$.

На L -й итерации сначала определяются $\{\vec{q}_k^{(L)}\}$ из решения подсистемы (I.6) при фиксированных значениях переменных $\{t_i^{(L-1)}\}$, затем определяются $\{t_i^{(L)}\}$ из решения подсистемы (I.7) при фиксированных значениях $\{\vec{q}_k^{(L)}\}$.

Сходимость этого итерационного процесса к решению системы вытекает из сходимости последовательности $\{H^{(L)}\}$ к некоторому $H_{\min}$. Действительно, из выпуклости функционала (I.3) по каждой из групп

переменных следует, что $\forall L \ n^{(L+1)} \leq n^{(L)}$, при этом последовательность $\{n^{(L)}\}$ ограничена снизу нулем и, следовательно, с необходимостью имеет предел.

Задавшись некоторым $\epsilon > 0$, можно прервать процесс приближения к решению, как только $[n^{(j)} - n^{(j+1)}] / n^{(0)} < \epsilon$.

Выпуклость функций $\varphi_i(t_i)$ в нашем случае обусловлена тем, что граничные дуги поверхности лопасти достаточно плавные, и исходные точки заданы с погрешностью, не превышающей величины $k_{\max}$ ($k_{\max}$ — максимальная кривизна аппроксимируемой дуги).

Пусть $I_L = \{t_i^{(j)} : t_i \in (T_{L-1}, T_L), t_i^{(j)} \neq t_k^{(j)}, i \neq k\}$, $L = \overline{1, N}$, тогда для невырожденности матрицы подсистемы (I.6) необходимо, чтобы

$$\left. \begin{aligned} n(I_1) + \dots + n(I_N) &\geq 2N, \\ n(I_1) &\geq 1, \quad n(I_N) \geq 1, \\ n(I_L) + n(I_{L+1}) &\geq 3, \\ L &= 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (I.8)$$

где через $n(I_L)$ обозначено число элементов в множестве I_L . Доказательство основано на установлении факта линейной независимости столбцов симметрической матрицы.

В качестве начального приближения решения берется $t_i^{(0)} = s_i / s_n$, где $s_i = \sum_{j=1}^i |\vec{r}_j - \vec{r}_{j-1}|$, $t_0^{(0)} = 0$.

Следует отметить, что произвол выбора узлов сетки сплайна ограничен условиями (I.8).

§2. Аппроксимация поверхности

Алгоритм построения аппроксимирующей поверхности во многом повторяет вышеописанный алгоритм.

Пусть исходная поверхность задана радиусами-векторами ей принадлежащих точек $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = \overline{0, n}$, и четырьмя граничными дугами, попарно зависящими от параметров $u \in [0, 1]$, $v \in [0, 1]$. Границы $\vec{r}_0(u), \vec{r}_1(u), \vec{r}_0(v), \vec{r}_1(v)$ могут быть произвольными векторными функциями, удовлетворяющими двум условиям:

- 1) $\vec{r}_k(t) \in C^1[0, 1]$, $k = 0, 1$, $t = u, v$;
- 2) $\vec{r}_i(u)|_{u=0} = \vec{r}_j(v)|_{v=1}$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1$.

Уравнение аппроксимирующей поверхности, взятое в форме, предложенной в [1], имеет вид:

$$\vec{R}(u, v; \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_9) = FG(u) \cdot A \cdot FG^T(v) + FG(u) \cdot \vec{r}(v) + FG(v) \cdot \vec{r}(u),$$

где $FG = [F_0, G_0, F_1, G_1, F_0 \times F_1]$; F_0, F_1, G_0, G_1 совпадают с (I.1) при $N = 1, T_0 = 0, T_1 = 1$, $\vec{r}(t) = [\vec{r}_0(t), 0, \vec{r}_1(t), 0, 0]$;

$$A = \begin{pmatrix} \vec{r}_{00} & 0 & \vec{r}_{01} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{q}_1 & 0 & \vec{q}_2 & \vec{q}_3 \\ \vec{r}_{10} & 0 & \vec{r}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{q}_4 & 0 & \vec{q}_5 & \vec{q}_6 \\ 0 & \vec{q}_7 & 0 & \vec{q}_8 & \vec{q}_9 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{00} = \vec{r}_0(u)|_{u=0}, \quad \vec{r}_{01} = \vec{r}_0(v)|_{v=1}, \quad \vec{r}_{10} = \vec{r}_1(u)|_{u=0}, \quad \vec{r}_{11} = \vec{r}_1(v)|_{v=1}.$$

Необходимо минимизировать функционал

$$H(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_9) = \sum_{i=0}^n \min_{u_i \in [0, 1]} [\vec{R}(u_i, v_i) - \vec{r}_i]^2$$

$$v_i \in [0, 1]$$

по совокупности переменных $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_9$.

Рассуждения, аналогичные приведенным в §1, сводят задачу минимизации к решению системы вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vec{q}_k} \sum_{i=0}^n [\vec{R}(u_i, v_i) - \vec{r}_i]^2 &= 0, \quad k = \overline{1, 9}, \\ \frac{\partial}{\partial u_i} [\vec{R}(u_i, v_i) - \vec{r}_i]^2 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial v_i} [\vec{R}(u_i, v_i) - \vec{r}_i]^2 &= 0, \quad i = \overline{0, n}. \end{aligned} \right\}$$

Решение ищется методом, описанным в §1. Начальное приближение берется в виде $\vec{q}_k^{(0)} = 0$, $k = \overline{1, 9}$. Условие (I.9) преобразуется к виду $n(I) \geq 9$, где $I = \{(u_i^{(j)}, v_i^{(j)}) : (u_i^{(j)}, v_i^{(j)}) \in (0, 1) \times (0, 1), (u_i^{(j)}, v_i^{(j)}) \neq (u_k^{(j)}, v_k^{(j)}), i \neq k\}$.

Л и т е р а т у р а

1. COONS S.A. Surfaces for computer-aided design of space forms. Massachusetts Inst. of Technology, 1967. Project MAC.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ИМАНОВ А. Алгоритм с расщеплением решения задачи сглаживания сплайн-функциями многих переменных. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды, т.7. Новосибирск, 1976.

3. ВАЙСБЕРГ Г.В., КОВАЛЕВА Л.Г., ПАВЛОВ Н.Н., СКОРОСПЕЛОВ В.А.,
ТУРУК П.А. Автоматизированная система проектирования и технологи-
ческой подготовки производства. - В кн.: Методы сплайн-функций. (Вы-
числительные системы. Вып. 68.) Новосибирск, 1976, с. 100-116.

Поступила в ред.-изд.отд.
27 июля 1977 года