М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
1977 год   Выпуск 72

УДК 518.62:681.335

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙН-ФУНКЦИЯМИ НА АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

А.В.Козловских, Б.М.Шумилов

1. Пусть заданы значения некоторой функции $f_k = f(t_k)$ в фиксированные моменты времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots < t_N$. Требуется построить функцию $u(t)$, интерполирующую кривую $f(t)$ в узлах $\{t_k\}$, причем ее первая и вторая производные должны по возможности хорошо приближать соответствующие производные $f(t)$. Устройства,производящие интерполяцию такого типа, могут быть использованы,в частности, при решении на аналоговых вычислительных машинах дифференциальных уравнений, коэффициенты и возмущения которых являются функциями независимой переменной и производными этих функций.

2. Как известно [1], задача численного дифференцирования относится к классу некорректно поставленных задач, для которых не имеет места непрерывная зависимость решения от исходных данных. Согласно теории акад.А.Н.Тихонова, эффективным способом устранения трудностей, связанных с неустойчивостью задач такого рода,является существенное сужение допустимого класса искомых функций. Так, в рассматриваемом случае лемма Тихонова [1,с.55] сводит решение задачи к отысканию минимума интеграла от квадрата второй производной на множестве интерполирующих функций $u(t)$, имеющих интегрируемую с квадратом вторую производную.

Обычными методами вариационного исчисления можно получить необходимые условия экстремума [2]:

а) дифференциальное уравнение дуг экстремали (уравнение Эйлера–Пуассона)

$$\frac{d^4u_k}{dt^4} = 0, \quad u(t) = u_k(t), \quad t_k < t < t_{k+1};$$

б) условия непрерывности вторых производных в узлах (условия Вейерштрасса-Эрдмана);

в) $\ddot{u}(t_0) = \ddot{u}(t_N) = 0$, как естественные краевые условия. Отсюда следует, что искомая функция является интерполяционным кубическим сплайном, который обеспечивает хорошую точность интерполяционного процесса [3].

Проблему построения кубических интерполяционных сплайнов можно рассматривать как проблему склеивания N решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^4u_k}{dt^4} = 0 , \tag{I}$$

каждое из которых удовлетворяет уравнению (I) на различных открытых интервалах $t_k < t < t_{k+1}$, при этом построенный сплайн должен интерполировать заданную функцию $f(t)$ в узлах сетки $\{t_k\}$, удовлетворять определенному набору краевых условий и принадлежать классу $K^3(t_0, t_N)$ (см. [3]).

Для решения полученной краевой задачи производится ее редукция к задаче Коши [4]. При этом недостающее начальное условие получается варьированием соответствующей производной до достижения минимума функционала

$$I = \int_{t_0}^{t_k} |\dddot{u}|\,dt, \qquad 0 < k \le N.$$

Поскольку данный функционал не убывает на отрезке, минимизацию можно проводить для возрастающей последовательности интервалов.

3. Рассмотрим уравнение (I) для участка $t_k < t < t_{k+1}$. Последовательно интегрируя и подставляя вместо текущего t его значения на границах, получаем:

$$u(t_{k+1}) = \frac{a_k}{6}(t_{k+1}-t_k)^3 + \frac{1}{2}\ddot{u}(t_k)(t_{k+1}-t_k)^2 +$$

$$+ \dot{u}(t_k)(t_{k+1}-t_k) + u(t_k) = f_{k+1}. \tag{2}$$

При вычислении a_k на первом участке в (2) подставляются начальные условия, например, $\ddot{u}_0 = 0$, $u_0 = f_0$, а $\dot{u}_0$ в первом приближении можно определить по двум точкам данного участка. Для определения остальных a_k используем $\ddot{u}_k$, $\dot{u}_k$ и u_k, полученные в результате интегрирования на предыдущем участке, так как из условия непрерывности в узле имеем:

$$\ddot{u}_{k-1}(t_k-0) = \ddot{u}_k(t_k+0) = \ddot{u}_k,$$

$$\dot{u}_{k-1}(t_k-0) = \dot{u}_k(t_k+0) = \dot{u}_k,$$

$$u_{k-1}(t_k-0) = u_k(t_k+0) = u_k.$$

4. Схема для реализации полученного алгоритма состоит из четырех интеграторов, блоков переменных и постоянных коэффициентов, инверторов и диодов (рис. I). Моделирование проводилось на аналоговой вычислительной машине МПТ-9.

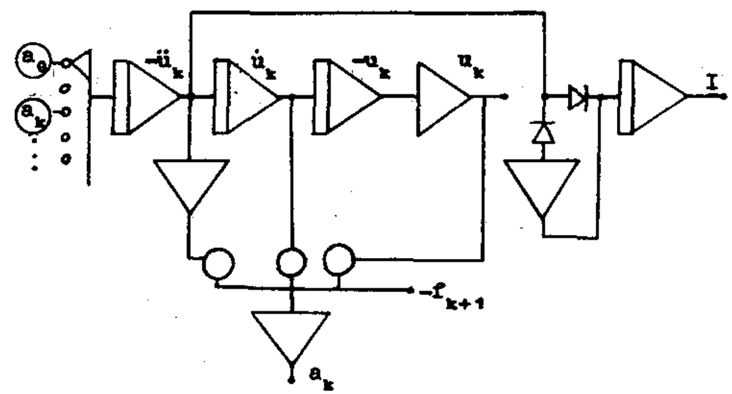

Рис. I

На рис.2 приведены сплайн, его первая и вторая производные для функции, заданной в таблице.

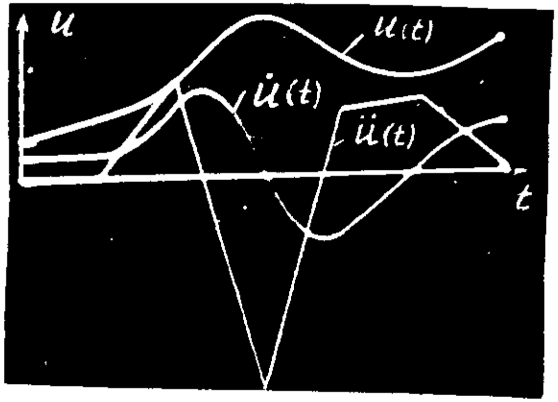

Рис. 2

Таблица

t	u	k	a
0	I0	0	0,4
I	I6	I	23
2	26	2	-72
3	4I	3	67
4	3I	4	2,4
5	26	5	-I5
6	36		

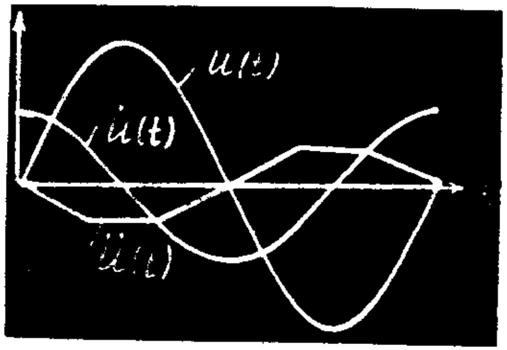

Рис. 3

Рис. 4

Кроме того, по разработанной методике проводилось построение кубического сплайна, интерполирующего функцию $f(t) = \sin \omega t\,(\omega < 1)$, заданную в семи равноотстоящих узлах на периоде. Получены осциллограммы интерполяционного сплайна и двух его производных (рис.3). На рис. 4 приведена разность между точным значением $\sin \omega t$, полученным как решение дифференциального уравнения и функцией-интерполятором. Максимальная относительная погрешность не превышает I%. Полученные результаты согласуются с оценками погрешности интерполяции кубическими сплайнами [3].

Литература

I. ТИХОНОВ А.Н., АРСЕНИН В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. М., "Наука", I974.

2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Экстремальное свойство кубических многозвенников и задача сглаживания. -В кн.: Вычислительные системы. Вып.42. Новосибирск, I970, с.I09-I58.

3. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", I972.

4. ЛЕВИН Л. Методы решения технических задач с использованием аналоговых вычислительных машин. М., "Мир", I966.

Поступила в ред.-изд.отд.
I3 октября I976 года