МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 72

УДК 517.947.43:518.61

# АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ТИПА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

П.Е.Соболевский, Хоанг Ван Лай

I. Постановка задачи. Различные краевые задачи для параболических уравнений могут быть сведены (см.,например, [I]) к задаче Коши

$$x'(t) + Ax(t) = f(t) \quad (0 \le t \le T), \quad x(0) = x_0, \qquad (1.1)$$

в некотором банаховом пространстве $E$. Здесь $A$ – действующий в $E$ линейный неограниченный оператор, порожденный эллиптическим дифференциальным оператором и системой граничных условий.

Приближенное решение задачи (I.I) может быть проведено (см., например, [2]) в два этапа. Сначала от задачи с неограниченным оператором в бесконечномерном пространстве переходят к последовательности задач с ограниченными операторами в конечномерных пространствах. Этот переход осуществляется заменой оператора $A$ ограниченными по разностному или вариационно-разностному методу.Затем приближенно решаются задачи с ограниченными операторами. В данной работе исследуется этот второй этап. Следовательно, можно считать, что задача (I.I) – это задача в некотором конечномерном пространстве $E$. Однако исследование не должно опираться на величину размерности $E$ и оценку нормы оператора $A$. В связи с этим в дальнейшем не используется то, что пространство $A$ конечномерно и оператор $A$ ограничен.

Решение задачи (I.I) имеет вид

$$x(t) = x_0 \cdot \exp(-tA) + \int_0^t f(s) \exp[(s-t)A]ds .$$

Поэтому приближенное решение задачи (I.I) опирается на приближенное построение полугруппы $\exp(-tA)$ и квадратурные формулы.

В данной работе исследуются некоторые приближенные методы построения полугруппы $\exp(-tA)$ в случае гильбертова пространства и положительно определенного самосопряженного оператора $A$. В таких условиях задача сводится к скалярной задаче приближения функции $\exp(-z)$ на полуоси $[0, +\infty)$.

В [2] изучается приближение функции $\exp(-z)$ рациональными дробями

$$R(z) = П(z)\cdot[Q(z)]^{-1}.$$

Здесь $П(z)$ и $Q(z)$ - многочлены степеней $k$ и $m$ соответственно. Показывается, что при любых $0\le k\le m$ существует дробь $R_{k,m}(z)$, которая реализует infimum

$$\delta_{k,m} = \inf_{R(z)} \sup_{z\ge 0} | \exp(-z) - R(z)|,$$

и справедлива оценка

$$\delta_{k,m} \le C_1 q^m$$

при некоторых $C_1>0$, $0<q<1$. Отсюда следует оценка

$$\sup_{0\le t\le T} \|\exp(-tA) - R_{k,m}(tA)\|_{E\to E} \le C_1 q^m, \qquad (1.2)$$

которая гарантирует равномерно по $0\le t\le T$ приближение $R_{k,m}(tA)$ к $\exp(-tA)$ за счет роста $m$.

Мы будем изучать другой характерный для теории сплайнов (см., например, [3]) метод приближения $\exp(-tA)$ рациональными дробями $R(z) = П(z)\cdot[Q(z)]^{-1}$ при фиксированных $k$ и $m$ на малых отрезках $\left[0,\frac{1}{n}\right]$.

Положим

$$\exp(-jtA)\approx [R(tA)]^j, \quad 0\le t\le \frac{1}{n}, \quad j=1,2,\dots \qquad (1.3)$$

Тогда из тождества

$$\exp(-jtA) - [R(tA)]^j = \sum_{l=0}^{j-1}[R(tA)]^{j-l-1}\exp(-ltA)[\exp(-tA)-R(tA)] \qquad (1.4)$$

следует, что для сходимости (при $n\to\infty$) этого метода достаточно установить оценки устойчивости дроби

$$\|[R(tA)]^l\|_{E\to E} \le C_2, \quad l=1,2,\dots, \qquad (1.5)$$

и оценки скорости сходимости по норме разности $\exp(-tA)-R(tA)$ к нулю при $t\to+0$. Однако из (I.2) не следует стремления к нулю этой



разности даже для $R(tA) = R_{k,m}(tA)$. Такая разность может стремиться к нулю лишь на гладких элементах - на элементах из области определения некоторой степени оператора $A$. Удается оценить нормы выражения *)

$$\{\exp(-tA) - R(tA)\}A^{-(m+k+1)}. \qquad (1.6)$$

В связи с этим приходим к следующей задаче.

Будем говорить, что дробь $R_0(z)$ порождает оптимальный алгоритм вида (I.3), если она реализует infimum

$$\gamma_n = \inf_{R(z)} \sup_{j=1,2,\dots} \sup_{0\le t\le\frac{1}{n}} \sup_{z\ge z_0} |\exp(-jtz)-[R(tz)]^j|\, z^{-(m+k+1)}, \qquad (I.7)$$

где $z_0>0$. Оказывается, что такая дробь существует, но её нахождение, как впрочем, и дроби $R_{k,m}(z)$, очень сложно. Поэтому представляет интерес нахождение дробей $R_{0m}(z)$, которые порождают алгоритм, сходящийся с той же скоростью, как и оптимальный алгоритм.

Будем говорить, что дробь $R_{0m}(z)$ порождает алгоритм оптимального типа, если

$$|\exp(-jtz) - [R_{0m}(tz)]^j|\, z^{-(m+k+1)} \le C_3\gamma_n,$$

где $j=1,2,\dots$, $0\le t\le\frac{1}{n}$, $z\ge z_0>0$, $0<C_3<+\infty$ и не зависит от $n$.

В данной работе показывается, что для оптимального алгоритма справедлива двухсторонняя оценка

$$C_4\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k} \le \gamma_n \le C_5\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k}, \qquad (I.8)$$

где $0<C_4\le C_5<+\infty$ и не зависят от $n$.

Это означает, что в отличие от [2] выражение

$$\|\{\exp(-jtA) - [R_0(tA)]^j\}A^{-(m+k+1)}\|_{E\to E}$$

стремится к нулю не только при $m\to+\infty$, но и при $n\to+\infty$. Далее установлено, что алгоритмы оптимального типа порождают известные дроби Паде $R_p(z)$ для функции $\exp(-z)$ (см., например, [4]). Наконец, в конце работы приведен аналогичный результат относительно двухслойных разностных схем для уравнений параболического типа.

---

*) Для такой степени удается получить двусторонние оценки.

2. Дробь Падэ. Рассмотрим задачу о приближении экспоненты $\exp(-z)$ дробями

$$R(z) = \Pi(z)[Q(z)]^{-1}$$

на малом отрезке $[0, z_1]$. Здесь и в дальнейшем

$$\Pi(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k,$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_m z^m$$

многочлены степеней $k$ и $m$ соответственно. Дробь $R(z)$ содержит $m+k+1$ независимых параметров. Поэтому из разложения разности $\exp(-z) - R(z)$ в ряд Маклорена следует оценка

$$|\exp(-z) - R(z)| \le C_6 z^{m+k+1} \quad (0 \le z \le z_1), \tag{2.1}$$

если выполнены соотношения

$$D^l[\exp(-z) - R(z)]|_{z=0} = 0 \quad (0 \le l \le m+k). \tag{2.2}$$

В [5] показано (путем разложения функции в ряд Тейлора в двух точках), что $R(z)$ удовлетворяет (2.I) и, следовательно, соотношениям (2.2), если

$$a_j = a_{jp} = (-1)^j \frac{(m+k-j)!\,k!}{(m+k)!\; j!(k-j)!}, \quad 0 \le j \le k,$$

$$b_i = b_{ip} = \frac{(m+k-i)!\; m!}{(m+k)!\; i!(m-i)!}, \quad 0 \le i \le m.$$

Это известная дробь Падэ $R(z) = \Pi_p(z)[Q_p(z)]^{-1}$.

Приведем здесь другое доказательство оценки (2.I), которое позволяет установить ее точность. Так как

$$(m+k-i)! = \int_0^{+\infty} s^k s^{m-i} e^{-s}\, ds,$$

то

$$Q_p(z) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(m+k-i)!}{(m+k)!} \frac{m!}{i!(m-i)!} z^i = \frac{1}{(m+k)!}\int_0^{+\infty} s^k (s+z)^m e^{-s} ds.$$

Аналогично имеем

$$\Pi_p(z) = \frac{1}{(m+k)!}\int_0^{+\infty} s^m (s-z)^k e^{-s} ds.$$



Таким образом, получим, что

$$Q_p(z)\exp(-z) - \Pi_p(z) = \frac{1}{(m+k)!}\Big[\int_0^{+\infty} s^k (s+z)^m e^{-(s+z)} dz -$$

$$- \int_0^{+\infty} s^m (s-z)^k e^{-s} ds\Big] = \frac{1}{(m+k)!}\Big[\int_z^{+\infty} s^m (s-z)^k e^{-s}\, ds -$$

$$- \int_0^{+\infty} s^m (s-z)^k e^{-s} ds\Big] = \frac{(-1)^k}{(m+k)!}\int_0^{z} s^m (z-s)^k e^{-s} ds =$$

$$= \frac{(-1)^k z^{m+k+1}}{(m+k)!}\int_0^1 s^m (1-s)^k e^{-sz}\, ds. \tag{2.3}$$

Отсюда следуют оценки

$$|Q_p(z)\exp(-z) - \Pi_p(z)| \le C_7 z^{m+k+1}, \quad z \ge 0, \quad C_7 = \frac{m!\,k!}{(m+k)!\,(m+k+2)!}, \tag{2.4}$$

$$|Q_p \exp(-z) - \Pi_p(z)| \ge C_8 z^{m+k+1}, \quad 0 \le z \le z_1, \quad C_8 = C_7 \exp(-z_1). \tag{2.5}$$

Так как $Q_p(z) \ge 1$, то $R_p(z)$ удовлетворяет оценке (2.I) с

$$C_6 = C_7 = \frac{m!\,k!}{(m+k)!\,(m+k+2)!}$$

при любых $z \ge 0$. Так как $Q_p(z) \le C_9 = C_9(z_1)$ при $0 \le z \le z_1$, то справедлива обратная оценка

$$|\exp(-z) - R_p(z)| \ge C_8 (C_9)^{-1} z^{m+k+1},$$

т.е. оценка (2.I) является точной.

Оценка (2.5) также показывает, что справедливо неравенство

$$D^{m+k+1}[Q_p(z)\exp(-z) - \Pi_p(z)]|_{z=0} \ne 0. \tag{2.6}$$

Пусть $R_1(z) = \Pi_1(z)[Q_1(z)]^{-1}$ и $R_2(z) = \Pi_2(z)[Q_2(z)]^{-1}$ – две несократимые дроби (под этим понимается, что числитель и знаменатель несократимой дроби не имеют одинаковых множителей вида $(z-\alpha)$). Пусть для $R_1(z)$ и $R_2(z)$ выполнена оценка (2.I). Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$|\Pi_1(z)\, Q_2(z) - \Pi_2(z) Q_1(z)| \le C_{10} z^{m+k+1}.$$

Слева, под знаком модуля стоит многочлен степени $m+k$. Поэтому $\Pi_1(z)Q_2(z) = \Pi_2(z)Q_1(z)$. Отсюда и из несократимости $R_1(z)$ и $R_2(z)$ следует, что $R_1(z) = R_2(z)$, т.е. неравенство (2.I) имеет единственное несократимое решение. Покажем теперь, что дробь $R_p(z)$ несократима. Доказательство проведем индукцией по числу $m+k$. Очевидно, дробь Падэ при $m+k=1$ несократима. Предположим, что все дроби Падэ для $m+k \le i-1$ несократимы, и докажем несократимость таких дробей при $m+k=i$. Предположим противное. Пусть

$$R_p(z) = R_*(z) = \Pi_*(z)[Q_*(z)]^{-1}$$

и степень $\Pi_*(z)$ равна $k_1<k$, а степень $Q_*(z)$ равна $m_1<m$. Из (2.I) следует, что

$$|\exp(-z) - R_*(z)| \le C_6 z^{m+k+1} \le C_6 z^{m_1+k_1+1} \quad (0 \le z \le z_1 \le 1) \quad (2.7)$$

Обозначим через $R_p'(z)$ дробь Падэ, для которой справедливы неравенства

$$C_{11} z^{m_1+k_1+p} \le |\exp(-z) - R_p'(z)| \le C_{12} z^{m_1+k_1+1}. \quad (2.8)$$

Так как $R_p'(z)$ несократима по предположению индукции, то $R_p'(z) = R_*(z)$. Тогда (2.7) и (2.8) приводят к противоречию. Таким образом, единственной дробью, удовлетворяющей (2.I), является дробь Падэ, и эта дробь несократима. Однако, разумеется, числитель и знаменатель такой дроби $R(z)$ могут отличаться от числителя и знаменателя дроби $R_p(z)$ скалярным ненулевым множителем. Следовательно, справедливы тождества

$$a_j = a_{jp}\cdot b_0 \quad (0 \le j \le k), \qquad b_i = b_{ip}\cdot b_0 \quad (1 \le i \le m), \quad (2.9)$$

так как $b_{0p} = 1$.

В [4] дан отличный от [5] подход к построению дроби, приближающей произвольную гладкую функцию, а не только $e^{-z}$. В предположении $Q(0) = b_0 \ne 0$ система уравнений (2.2) эквивалентна системе

$$D^l[Q(z)\exp(-z) - \Pi(z)]|_{z=0} = 0, \qquad 0 \le l \le k+m \quad (2.10)$$

Это уже линейная система уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\Pi(z)$ и $Q(z)$. Доказано, что при $b_0 \ne 0$ остальные коэффициенты однозначно определяются. Запишем систему (2.10) в виде



$$(a_0, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m)A = b_0\tilde{b}. \quad (2.11)$$

Здесь $A$ – некоторая квадратная матрица и $\tilde{b}$ – некоторый ненулевой вектор. Из однозначной разрешимости (при заданном $b_0 \ne 0$) этой системы вытекает, что $\det A \ne 0$. Заметим, что однозначная разрешимость (2.II) следует из (2.9).

3. Оценка сверху для $\gamma_n$. Будем говорить, что дробь $R(z)$ устойчива, если

$$|[R(z)]^j| \le C_{13} \qquad (j = 1, 2, \dots, z \ge 0).$$

Покажем, что дробь $R_p(z)$ устойчива и $C_{13} = 1$. Для этого достаточно доказать, что $|a_{jp}| \le b_{jp}$ $(0 \le j \le k)$. Действительно,

$$|a_{jp}| = (m+k-j)!k![(m+k)!j!(k-j)!]^{-1} \le$$

$$\le (m+k-j)!m![(m+k)!(m-j)!]^{-1} = b_{jp} \quad (0 \le j \le k).$$

Отсюда следует, что величина $\gamma_n$ конечна.

ТЕОРЕМА I. Имеет место следующая оценка

$$\gamma_n \le C_5 \left(\frac{1}{n}\right)^{m+k}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\gamma_n \le \sup_{j=1,2,\dots} \ \sup_{0 \le t \le \frac{1}{n}} \ \sup_{0 < z_0 \le z} |\exp(-jtz) - [R(tz)]^j| z^{-(m+k+1)} =$$

$$= \sup_{j=1,2,\dots} \ \sup_{0<t\le\frac{1}{n}} \ \sup_{z_0 \le z} \frac{|\exp(-tz) - R_p(z)|}{z^{m+k+1}} \sum_{l=0}^{j-1} [R_p(tz)]^{j-l-1} \exp(-ltz).$$

Так как $R_p(z)$ – устойчивая дробь и $C_{13} = 1$, то

$$\gamma_n \le \sup_{0<t\le\frac{1}{n}} \ \sup_{tz_0 \le z} \frac{|\exp(-z) - R_p(z)|}{z^{m+k+1}} t^{m+k+1} \sum_{l=0}^{+\infty} \exp(-ltz) \le$$

$$\le \sup_{0<z} |\exp(-z) - R_p(z)| z^{-m-k-1} \sup_{0<t\le\frac{1}{n}} t[1 - \exp(-tz_0)]^{-1} n^{-m-k}.$$

Из (2.I) вытекает (3.I), где $C_5 = C_7 z_0^{-1}$. Теорема I доказана.

Методом, изложенным в [6], можно доказать, что из ограниченности $\gamma_n$ следует существование дроби $R_n(z) = \Pi_n(z)\,[Q_n(z)]^{-1}$,

$$\Pi_n(z) = a_{0n} + a_{1n}z + \ldots + a_{kn}z^k,$$

$$Q_n(z) = b_{0n} + b_{1n}z + \ldots + b_{mn}z^m,$$

которая реализует infimum в (I.7). Эти дроби образуют оптимальный алгоритм приближения функции $e^{-z}$, и справедлива оценка

$$\frac{|\exp(-jtz)-[R_n(tz)]^j|}{z^{m+k+1}} \le C_5\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k} = \frac{1}{z_0}\;\frac{m!k!}{(m+k)!(m+k+2)!}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k}. \quad (3.2)$$

$$(z \ge z_0 > 0).$$

Из (3.2) следует, что оптимальный алгоритм при фиксированном $n$ сходится быстрее, чем оптимальный алгоритм из [2]. Кроме того, этот алгоритм сходится при фиксированных $k$ и $m$, если $n \to +\infty$.

Нахождение оптимального алгоритма – это сложная задача. Оказывается, что он в определенном смысле близок к алгоритму Падэ. Без ограничения общности можно предполагать, что выполнены условия нормировки

$$\sum_{i=0}^{m}(b_{in})^2 = \sum_{i=0}^{m}(b_{ip})^2, \quad b_{0n} > 0. \quad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 2. Имеют место следующие равенства

$$\lim_{n\to+\infty} a_{jn} = a_{jp} \quad (0 \le j \le k), \quad \lim_{n\to+\infty} b_{in} = b_{ip} \quad (0 \le i \le m). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.I) вытекает, что

$$\left|\exp\left(-\frac{z}{n}\right) - R_n\left(\frac{z}{n}\right)\right| z^{-(m+k+1)} \left|\sum_{l=0}^{n-1} \exp\left[-\frac{z}{n}(n-l-1)\right]\left[R_n\left(\frac{z}{n}\right)\right]^l\right| =$$

$$= \left|\exp(-z) - \left[R_n\left(\frac{z}{n}\right)\right]^n\right| z^{-(m+k+1)} \le C_5\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k}.$$

Ниже будет установлена оценка

$$\alpha_n\left(\frac{z}{n}\right) = \sum_{l=0}^{n-1} \exp\left[-\frac{z}{n}(n-l-1)\right]\left[R_n\left(\frac{z}{n}\right)\right]^l \ge C_{14}\cdot n, \; C_{14} > 0, \quad (3.5)$$



при $z_0 \le z \le 2z_0$ и достаточно большом $n$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\left|\exp\left(-\frac{z}{n}\right) - R_n\left(\frac{z}{n}\right)\right| \le \frac{C_5}{C_{14}}(2z_0)^{m+k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1} \quad (z_0 \le z \le 2z_0). \quad (3.6)$$

Если бы в неравенстве (3.6) можно было справа $\left(\frac{1}{n}\right)$ заменить на $\left(\frac{z}{n}\right)$ при $0 \le z \le nz_1$, то отсюда бы следовало, что $R_n(z) = R_p(z)$. Из более слабого неравенства будет следовать, что $R_n(z)$ близка к $R_p(z)$. Действительно, условие (3.3) означает, что $Q_n\left(\frac{z}{n}\right)$ равномерно ограничены на отрезке $[z_0, 2z_0]$. Поэтому

$$\left|Q_n\left(\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right) - \Pi_n\left(\frac{z}{n}\right)\right| \le C_{15}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1} \quad (z_0 \le z \le 2z_0).$$

Разложив $\exp\left(-\frac{z}{n}\right)$ в ряд Тейлора, получим, что

$$Q_n\left(\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right) - \Pi_n\left(\frac{z}{n}\right) = A_n\left(\frac{z}{n}\right) + B_n\left(\frac{z}{n}\right),$$

$$A_n\left(\frac{z}{n}\right) = d_{0,n} + d_{1,n}\left(\frac{z}{n}\right) + \ldots + d_{m+k,n}\left(\frac{z}{n}\right)^{m+k},$$

$$B_n\left(\frac{z}{n}\right) = d_{m+k+1,n}\left(\frac{z}{n}\right)^{m+k+1} + d_{m+k+2,n}\left(\frac{z}{n}\right)^{m+k+2} + \ldots.$$

Очевидно, что

$$D^l B_n(z)|_{z=0} = 0 \quad (0 \le l \le k+m),$$

$$\left|B_n\left(\frac{z}{n}\right)\right| \le C_{16}\left(\frac{z}{n}\right)^{m+k+1} \le C_{16}(2z_0)^{m+k+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1} \quad (z_0 \le z \le 2z_0).$$

Следовательно,

$$\left|A_n\left(\frac{z}{n}\right)\right| \le C_{17}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1} \quad (z_0 \le z \le 2z_0).$$

Пусть теперь имеется последовательность многочленов $\varphi_n(z) = \alpha_{0n} + \alpha_{1n}z + \ldots + \alpha_{ln}z^l$. Пусть $|\varphi_n(z)| \le K_n$ $(z_0 \le z \le 2z_0)$. Тогда справедливы неравенства

$$|\alpha_{jn}| \le C_{18}K_n \quad (0 \le j \le n) \quad (3.7)$$

потому что коэффициенты $\alpha_{jn}(0 \le j \le n)$ можно линейным образом (см., например, [6]) выразить через значения многочлена $\varphi_n(z)$ в фиксированных точках отрезка $[z_0, 2z_0]$.

Положим $l=k+m$, $K_n=C_{17}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1}$ и

$$\varphi_n(z) = d_{0,n}+\frac{d_{1,n}}{n}z+\ldots+\frac{d_{m+k,n}}{n^{m+k}}\,z^{m+k}.$$

Тогда из (3.7) вытекает, что

$$|d_{i,n}| \le C_{17}\,C_{18}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1-i} \qquad (0\le i\le m+k). \qquad (3.8)$$

Положим теперь

$$\varepsilon_{in} = D^i[Q_n(z)e^{-z}-\Pi_n(z)]\big|_{z=0} \qquad (0\le i\le k+m). \qquad (3.9)$$

Тогда $\varepsilon_{in}=i!\,d_{i,n}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_{in}=0$.

Неоднородную систему уравнений (3.9) относительно коэффициентов $\Pi_n(z)$ и $Q_n(z)$ аналогично однородной системе (2.10) можно записать в виде

$$(a_{0n},a_{1n},\ldots,a_{kn},b_{1n},\ldots,b_{mn})A = b_{0n}\,\bar b+\bar\varepsilon_n.$$

Здесь $\bar\varepsilon_n$ – $(m+k+1)$-мерный вектор. Так как $\det A\ne 0$, то справедливы равенства

$$a_{jn}=a_{jp}b_{0n}+\varepsilon'_{jn}\quad(0\le j\le k),\qquad b_{in}=b_{ip}b_{0n}+\varepsilon''_{in}\quad(1\le j\le m)\,(3.10)$$

аналогичные равенствам (2.9). В силу (3.8)

$$\lim_{n\to+\infty}\varepsilon'_{jn}=\lim_{n\to+\infty}\varepsilon''_{in}=0.$$

Далее, из (3.3) вытекает, что

$$0=\sum_{i=0}^{m}(b_{in})^2-\sum_{i=0}^{m}(b_{ip})^2=[(b_{0n})^2-(b_{0p})^2]\sum_{i=0}^{m}(b_{ip})^2+$$

$$+\,2b_{0n}\sum_{i=1}^{m}b_{ip}\,\varepsilon''_{in}+\sum_{i=1}^{m}(\varepsilon''_{in})^2.$$

Поскольку $b_{0n}$ равномерно ограничены, то

$$\lim_{n\to+\infty}[(b_{0n})^2-(b_{0p})^2]=0.$$

Так как $b_{0n}>0$, $b_{0p}=1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}b_{0n}=b_{0p}=1$. Следовательно, из (3.10) вытекает (3.4). Теорема 2 доказана.



Установим теперь оценку (3.5). Из (3.1) вытекает, что

$$\left|\exp\left(-\frac{z}{n}\right)-R_n\left(\frac{z}{n}\right)\right|\cdot z^{-(m+k+1)} \le C_5\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k} \le C_5\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$\left|\exp\left(-\frac{z}{n}\right)-R_n\left(\frac{z}{n}\right)\right| \le \frac{C_{19}}{n} \qquad (z_0\le z\le 2z_0).$$

Таким образом, при больших $n$ будем иметь

$$R_n\left(\frac{z}{n}\right) \ge \exp\left(-\frac{z}{n}\right)-\frac{1}{n}C_{19}>0.$$

Далее,

$$\alpha_n\left(\frac{z}{n}\right)\ge\sum_{l=0}^{n-1}\exp\left[-\frac{z}{n}(n-1-l)\right]\left[\exp\left(-\frac{z}{n}\right)-\frac{1}{n}C_{19}\right]^l=$$

$$=\exp\left(-\frac{n-1}{n}z\right)\sum_{l=0}^{n-1}\left[1-\frac{1}{n}C_{19}\exp\left(\frac{z}{n}\right)\right]^l\ge$$

$$\ge\exp(-2z_0)\left[1-\frac{1}{n}C_{19}\exp\left(\frac{2z_0}{n}\right)\right]^{n-1}\cdot n\ge nC_{14},$$

где $C_{14}>0$. Оценка (3.5) доказана.

4. Оценка снизу для $\gamma_n$. Установим, что оценка (3.1) точна. Справедлива

ТЕОРЕМА 3. Имеет место неравенство

$$\gamma_n\ge C_4\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k}, \qquad C_4>0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $\gamma_n\le\varepsilon_n\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k}$, где $\varepsilon_n\to 0$, когда $n$ пробегает некоторую подпоследовательность натуральных чисел. Как и в теореме 2, получим оценку

$$\left|Q_n\left(\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)-\Pi_n\left(\frac{z}{n}\right)\right|\le C_{15}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1}.$$

Пусть теперь

$$\bar A_n\left(\frac{z}{n}\right)=A_n\left(\frac{z}{n}\right)+d_{m+k+1,n}\left(\frac{z}{n}\right)^{m+k+1}.$$

Тогда легко видеть, что

$$\left|\bar A_n\left(\frac{z}{n}\right)\right|\le\left(C_{15}\varepsilon_n+C_{20}\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{m+k+1}.$$

Отсюда, как в теореме 2, получим для последнего коэффициента многочлена $A_n(\frac{z}{n})$ оценку

$$|d_{m+k+1,n}| \le C_{18}(C_{15}\ \varepsilon_n + C_{20}\frac{1}{n}) ,$$

т.е. $d_{m+k+1,n}$ стремится к нулю.

С другой стороны,

$$d_{m+k+1,n} = \frac{1}{(m+k+1)!}\ D^{m+k+1}\,[Q_n(z)\ \exp(-z) - \Pi_n(z)]_{z=0} .$$

Тогда из теоремы 2 и неравенства (2.6) вытекает, что

$$\lim_{n\to+\infty} d_{m+k+1,n} = \frac{1}{(m+k+1)!}\ D^{m+k+1}[Q_p(z)\ \exp(-z) - \Pi_p(z)]_{z=0} \neq 0 .$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 3.

Так как из доказательства теоремы I следует, что для дроби Падэ верна оценка

$$|\exp(-jtz) - [R_p(tz)]^j|\ z^{-(m+k+1)} \le C_{15}\ (\frac{1}{n})^{m+k},$$

то из теоремы 3 вытекает, что алгоритм Падэ – это алгоритм оптимального типа, т.е. имеет место оценка

$$|\exp(-jtz)-[R_p(tz)]^j|z^{-(m+k+1)} \le \frac{C_5}{C_4}\ \gamma_n \quad (0\le t\le \frac{1}{n},\ j=1,2,\dots,\ z\ge z_0>0).$$

5. Разностные схемы оптимального типа. Разностный метод приближенного решения задачи (I.I) сводится к приближенному построению полугруппы в дискретном множестве точек. В случае двухслойных схем последовательность операторов $\exp(-j\frac{A}{n})$ $(j=1,2,\dots)$, $\frac{1}{n}$ – шаг разностной схемы, приближается последовательностями операторов вида $[R(\frac{A}{n})]^j$. Если $A$ – положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $E$, то эта задача сводится к задаче приближения числовой последовательности $\exp(-j\frac{z}{n})$, $j=1,2,\dots$, $z\le z_0>0$, последовательностями вида $[R(\frac{z}{n})]^j$.

Будем говорить, что дробь $R_0(z)$ порождает оптимальную разностную схему, если она реализует infimum

$$\sigma_n = \inf_{R(z)}\ \sup_{j=1,2,\dots}\ \sup_{z\ge z_0} |\exp(-j\frac{z}{n}) - [R(\frac{z}{n})]^j|\cdot z^{-(m+k+1)} .$$

Оптимальная разностная схема существует.

Будем говорить, что дробь $R_{0m}(z)$ порождает разностную схему оптимального типа, если

$$|\exp(-\frac{jz}{n}) - [R_{0m}(\frac{z}{n})]^j|\cdot z^{-(m+k+1)} \le C_{21}\cdot\sigma_n .$$

Изложенные выше методы доказательства годятся и для рассматриваемого случая. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Для $\sigma_n$ справедливы двухсторонние оценки

$$C_4(\frac{1}{n})^{m+k} \le \sigma_n \le C_5\ (\frac{1}{n})^{m+k} .$$

Дробь Падэ порождает разностную схему оптимального типа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (I.6) означает, что теорема 4 верна только для $x_0\in D\ (A^{k+m+1})$. Для $x_0\in D(A^\gamma)$, $1\le\gamma<m+k+1$, удалось установить лишь верхние оценки с показателем $\gamma-1$.

## Литература


I. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., ЗАБРЕЙКО П.П., ПУСТЫЛЬНИК Е.И., СОБОЛЕВСКИЙ П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., "Наука", I966.

2. ВАРГА Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., "Мир", I974.

3. АЛБЕРГ Д., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Д. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", I972.

4. GRAGG W.B. The Pade table and its relation to certain algorithms of numerical analysis.-"SIAM Rev.",1972,v.14,N 1,p.1-63.

5. HYMMEL P.M., SEEBECK C.L.A generalization of Taylor's expantion. - "Amer.Math.Monthly",1949,v.56, N 4.

6. АХИЕЗЕР Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., "Наука", I965.



Поступила в ред.-изд.отд.
30 августа I976 года