М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)

1977 год   Выпуск 72

УДК 518:517

СОПОСТАВЛЕНИЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВ СПЛАЙНОВ И АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

В.Л.Рвачёв, Е.А.Федотова

В работе [3] исследуются некоторые свойства конечномерных подпространств $F_n \subset C^\infty$, сконструированных с помощью сдвигов и сжатий так называемых атомарных функций, то есть финитных, бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих соотношениям вида

$$Z\vec{y} = \sum_{i=1}^{m} A_i \vec{y}\,(\alpha x - C_i), \quad \alpha > 1,$$

где Z – обыкновенный дифференциальный оператор, A_i – матрицы. В частности, рассмотрен вопрос о приближении функций $f(x) \in C^1[a,b]$ элементами подпространства $F_n \subset C^\infty[a,b]$, порожденного функциями $Fup_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$, где $Fup_i(x)$ – определенные линейные комбинации сдвигов и сжатий финитной, бесконечно дифференцируемой функции $up(x)$, удовлетворяющей функционально-дифференциальному соотношению $up'(x) = 2\{up(2x+1) - up(2x-1)\}$.

В настоящей работе атомарные функции применяются для решения краевых задач математической физики и проводится сопоставление точности приближения функциями из F_n и сплайнами в методе коллокаций.

Как известно [4], любую функцию $f(x) \in C^1[a,b]$ можно приблизить с помощью линейной комбинации сдвигов и сжатий B-сплайна Шенберга степени m.

$$f(x) \approx \sum_{k=-(m-2)}^{n+m-2} C_k B_m\left(\frac{x-a}{h} - k+2\right) = \sum_{k=-(m-2)}^{n+m-2} C_k Sp_k(x),$$

где $B_m(x) = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k C_{m+1}^k (x-k)_+^m$; $\operatorname{supp} B_m(x) = [0, m+1]$.

В частности,

$$B_3(x) = \frac{1}{4}\{x_+^3 - 4(x-1)_+^3 + 6(x-2)_+^3 - 4(x-3)_+^3 + (x-4)_+^3\}.$$

Пусть отрезок $[a,b]$ разбит на части точками $x_i = a+ih$, $i=0,1,\ldots,n$. На каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ $m-1$ базисных сплайнов $Sp_i(x)$ отличны от нуля, т.е. кратность покрытия отрезка $[a,b]$ с помощью $Sp_i(x)$ равна $m-1$. Обозначим конечномерное пространство, порожденное базисом $Sp_i(x)$, через $B_m^{n+2m-3}[a,b]$, где верхний индекс определяет размерность этого пространства, а нижний – равен степени выбранных сплайнов.

Рассмотрим более подробно пространство, сконструированное с помощью сдвигов и сжатий функции $up(x)$ [1,3]:

$$up(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{-k}t}{2^{-k}t}\,dt,$$

$$\operatorname{supp} up(x) = [-1, 1].$$

Назовем функцией $Fup_m(x)$ функцию, равную [1]:

$$Fup_m(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k a_k\, up(x-k2^m), & x \in \left[-1, -1+\frac{m+2}{2^{m+1}}\right], \\ Fup_m\left(\frac{m+2}{2^{m+1}} - x\right), & x \in \left[-1+\frac{m+2}{2^{m+1}}, -1+\frac{m+2}{2^m}\right], \\ 0 - \text{в остальных точках}, \end{cases}$$

где $a_k = \sum_{j=0}^{[\frac{k}{2}]} C_m^{k-2j}$.

Кратность покрытия отрезка $[a,b]$ с помощью линейной комбинации функций $F_j(x) = Fup_m\left(\frac{x-a}{(m+1)h} - j+2\right)$ равна m. Очевидно, что аппроксимационные свойства функций $F_j(x)$, $j=-m+2, -m+3, \ldots$ определяются характером функции $up(x)$ и зависят от m. Так, например, функция $Fup_2(x)$ имеет вид

$$Fup_2(x) = up(x) - 2up\left(x-\frac{1}{4}\right) + 2up\left(x-\frac{1}{2}\right) - 2up\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

при $x \in [-1, 0]$.

Обозначим линейное пространство, порожденное функциями $F_j(x)$, через $F_m^{n+2m-1}[a,b]$, где верхний индекс по-прежнему равен размерности этого пространства, а нижний – кратности покрытия отрезка $[a,b]$ функциями $F_j(x)$.

Рассмотрим простейшую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второй степени

$$\left.\begin{aligned} -y''(x) + t(x)y(x) &= f(x), \\ y(a) = y(b) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Отыскивая приближенное решение $y(x)$ в виде

$$y(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} C_i Sp_i(x),$$

где $Sp_i(x) \in B_3^{n+3}[a,b]$ методом коллокаций с узлами в точках $x_i = a+ih$, мы получим алгебраическую систему

$$T_B \vec{C} = \vec{f},$$

где

$$\vec{f} = (0, f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), 0),$$

$$\vec{C} = (C_{-1}, C_0, \dots, C_n, C_{n+1}),$$

$$T_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \\ \left(-\frac{3}{2h^2}+\frac{1}{4}t_0\right) & \left(\frac{3}{h^2}+t_0\right) & \left(-\frac{3}{2h^2}+\frac{1}{4}t_0\right) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \left(-\frac{3}{2h^2}+\frac{1}{4}t_1\right) & \left(\frac{3}{h^2}+t_1\right) & \left(-\frac{3}{2h^2}+\frac{1}{4}t_1\right) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \left(-\frac{3}{2h^2}+\frac{1}{4}t_2\right) & \left(\frac{3}{h^2}+t_2\right) & \left(-\frac{3}{2h^2}+\frac{1}{4}t_2\right) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}.$$

Аппроксимируя аналогичное решение с помощью функций $F_j(x)$

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} B_i F_i(x),$$

имеем алгебраическую систему:

$$T_F \vec{B} = \vec{f},$$

где

$$T_F = \begin{pmatrix} \frac{5}{72} & \frac{13}{36} & \frac{5}{72} & 0 & 0 & \dots \\ \left(-\frac{1}{2h^2}+\frac{5}{72}t_0\right) & \left(\frac{1}{h^2}+\frac{13}{36}t_0\right) & \left(-\frac{1}{2h^2}+\frac{5}{72}t_0\right) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \left(-\frac{1}{2h^2}+\frac{5}{72}t_1\right) & \left(\frac{1}{h^2}+\frac{13}{36}t_1\right) & \left(-\frac{1}{2h^2}+\frac{5}{72}t_1\right) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось в [2], порядок аппроксимации решения дифференциального уравнения (I) с помощью сплайнов составляет $O(h^2)$.

Вопрос о точности аппроксимации уравнения (I) с помощью $F_j(x)$ равносилен оценке порядка аппроксимации точного решения $\bar{y}(x)$ уравнения (I), его первой и второй производных с помощью линейной комбинации $\sum_{j=-1}^{n+1} U_j \operatorname{up}(\frac{x-a}{4h} - j)$, так как именно такие функции входят в выражение $\operatorname{Fup}_2(x)$ через $\operatorname{up}(x)$. Справедлива

ТЕОРЕМА. Функцию $y(x) \in C^4[a,b]$ можно приблизить с помощью линейной комбинации

$$U(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} U_j \operatorname{up}(\frac{x-a}{4h} - j)$$

так, чтобы $\max_{[a,b]} |y^{(\alpha)}(x) - U^{(\alpha)}(x)| \Big|_{x=x_i} = O(h^2)$, где $\alpha = 0,1,2;\ i = 0,1,2,\dots,n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы основано на том, что мы строим линейную комбинацию сдвигов и сжатий функции $\operatorname{up}(x)$

$$F(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} A_j \operatorname{up}(\frac{x-a}{4h} - j),$$

такую что она интерполирует $y''(x)$ в узлах $x = x_i$. Затем функцию $f_1(x) = y(x) - F(x)$ приближаем функцией

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} B_{2i} \operatorname{up}(\frac{x-a}{2h} - i),$$

так что выполняются условия $F_1'(x_{2i}) = f_1'(x_{2i})$. Причем легко показать, что при этом $F_1''(x) = O(h^2)$. Тогда

$$U(x) = F(x)+F_1(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} U_i up\left(\frac{x-a}{4h} - i\right) = \sum_{i=-1}^{n+1} D_i F_i(x)$$

приближает функцию $y(x)$, так что в узлах x_i

$$| y^{(\alpha)}(x_i) - U^{(\alpha)}(x_i) | = O(h^2).$$

Пользуясь этой теоремой и тем фактом, что матрица T_F является неприводимо диагонально преобладающей[*)], получим, что точность такого способа приближения точного решения двухточечной краевой задачи (I) равна $O(h^2)$, т.е. по порядку такая же, какую дает сплайн-аппроксимация.

Т а б л и ц а

№ задачи	$\max\limits_{[a,b]} \Delta y_F$	$\max\limits_{[a,b]} \Delta y_B$	$\bar{y}(x_0)$	x_0	$\dfrac{\max\limits_{[a,b]} \Delta y_B}{\max\limits_{[a,b]} \Delta y_F}$
I	$0,559 \times 10^{-2}$	$0,845 \times 10^{-2}$	-I	0,75	I,5
2	$0,164 \times 10^{-2}$	$0,175 \times 10^{-2}$	I	0,5	I,I
3	$0,216 \times 10^{-2}$	$0,282 \times 10^{-2}$	+0,985	0,45	I,3
4	$0,558 \times 10^{-3}$	$0,835 \times 10^{-3}$	-0,288	0,7	I,5
5	$0,165 \times 10^{-3}$	$0,228 \times 10^{-3}$	-0,182	0,2	I,4

Численный эксперимент, проведенный на большом количестве двухточечных краевых задач типа (I), подтверждает эти выводы. Более того, во всех без исключения примерах мы получили, что погрешность сплайн-аппроксимации по значению больше, чем при использовании функций из F_2^{n+3}. В таблице частично приведены результаты такого просчета при $x \in [0,1]$, $h = 0,05$.

Через Δy_F обозначена *абсолютная погрешность решения* с помощью функций $F_j(x)$; Δy_B – погрешность сплайн-аппроксимации,

*) *Прим.ред.* Матрица T_F не обладает диагональным преобладанием. Для получения матрицы с диагональным преобладанием необходимо предварительно преобразовать T_F, например путем исключения элементов первого и последнего столбцов из второй и предпоследней строк. Кроме того, необходимо наложить ограничение на знак функции $t(x)$ $(t(x) \geq 0)$.

x_0 – точка, в которой погрешности достигают своего максимума, $\bar{y}(x_0)$ – значение точного решения в этой точке.

I) $t(x) = x$; $\bar{y}(x) = \sin 2\pi x$;
$f(x) = (4\pi^2+x) \sin 2\pi x$.

2) $t(x) = e^x$; $\bar{y}(x) = \sin\pi x$;
$f(x) = (\pi^2+e^x) \sin\pi x$.

3) $t(x) = \dfrac{1}{x-0,1\pi}$; $\bar{y}(x) = \sin\pi x$;
$f(x) = (\pi^2+t(x)) \sin\pi x$.

4) $t(x) = 2tg^2x+1$; $\bar{y}(x) = \dfrac{1}{\cos x} + x-1-\dfrac{x}{\cos 1}$;
$f(x) = -(1+2tg^2x)\left(\dfrac{x}{\cos 1} + 1-x\right)$.

5) $t(x) = \sqrt{x}$; $\bar{y}(x) = \sqrt{x^5} - x$;
$f(x) = -\dfrac{15}{4}\sqrt{x} + x^3 - \sqrt{x^3}$.

Можно отметить, что графики погрешности того и другого способа аппроксимации имеют один и тот же характер.

Конечно, такой численный эксперимент не может служить доказательством того, что погрешность аппроксимации решения с помощью функций $F_j(x)$ меньше, чем погрешность сплайн-аппроксимации, но можно утверждать, что эти погрешности имеют один и тот же порядок.

Можно отметить еще одно свойство атомарных функций. Дело в том, что справедлива теорема о вложении пространства F_m^{n+2m-1} в $F_{m+k}^{n+2m+2k-1}$, а именно: элементы базиса пространства F_m^{n+2m-1} могут быть выражены линейно с помощью элемента базиса $F_{m+k}^{n+2m+2k-1}$. Так, например, $Fup_2(x) = Fup_3(x)+3Fup_3\left(x-\frac{1}{8}\right)+3Fup_3\left(x-\frac{1}{4}\right) + Fup_3\left(x-\frac{3}{8}\right)$

Благодаря этому свойству может быть предложен итерационный метод, аналогичный релаксационному методу Р.Федоренко на последовательности сеток [5].

Литература

1. РВАЧЕВ В.А. Применение функций up(x) в вариационно-разностных методах. Новосибирск. Препринт ВЦ СО АН СССР, 1975.

2. РВАЧЕВ В.А., ФЕДОТОВА Е.А. Об использовании кубических сплайнов в решении краевых задач математической физики.-В кн.:Краевые задачи математической физики, Харьков, 1976, с. 41-46.

3. РВАЧЕВ В.Л., РВАЧЕВ В.А. Атомарные функции в математической физике. Глава в кол. монографии "Математизация знаний и научно-технический прогресс", Киев, "Наукова думка", 1975.

4. ВАРГА Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., "Мир", 1974, 127 с.

5. ФЕДОРЕНКО Р.П. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. -"Журн. вычислит. математики и мат. физики", 1961, т.1, № 5, с.922-927.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 сентября 1976 года