

УДК 517.9:66. 3.5

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ ВСЕХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.П.Доронин, Р.Г.Лукьянова, С.И.Фадеев

В данной работе рассматривается численное решение краевых задач, описывающих стационарные процессы типа распределения температуры в среде с постоянными коэффициентами переноса и источниками тепла, интенсивность которых зависит от температуры. В этой интерпретации краевая задача формулируется для уравнения (или системы уравнений), представляющего баланс тепла, причем на границах среды по предположению заданы однородные краевые условия.

В силу отмеченных особенностей уравнение баланса тепла имеет вид

$$L[\theta(x)] + \sigma F[\theta(x)] = p(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

$$a_1 \frac{d\theta}{dx} + b_1 \theta = 1 \text{ при } x = 0, \quad a_2 \frac{d\theta}{dx} + b_2 \theta = 0 \text{ при } x = 1.$$

Здесь x — линейная координата, θ — температура, $p(x)$ — заданная функция, принадлежащая классу гладкости C^m , $a_1, b_1, a_2, b_2, \sigma$ — постоянные, причем $\sigma \geq 0$.

Определим $L[\theta]$ как линейный однородный дифференциальный (интегродифференциальный) оператор с постоянными коэффициентами и старшей производной второго порядка. Случай, когда $L[\theta]$ — интегродифференциальный оператор, связан с преобразованием к (I) системы уравнений, описывающей теплообмен между двумя средами, из которых одна нетеплопроводна.

Зависимость источников тепла от температуры определяется нелинейным положительным оператором $F[\theta]$. Будем считать, что $F[\theta(x)]$ принадлежит тому же классу, что и $\theta(x)$, т.е. классу C^{m+2} .

Преобразуем (I) к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [1]:

$$\theta(x) = \theta(x) + \sigma \int_0^1 G(x, \xi) F[\theta(\xi)] d\xi, \quad (2)$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора L [2],

$$L[G] + \delta(x - \xi) = 0, \quad (3)$$

δ — дельта-функция, а $\theta(x)$ — решение задачи (I) при $\sigma = 0$

$$\theta(x) = - \int_0^1 G(x, \xi) p(\xi) d\xi.$$

Поскольку L — оператор с постоянными коэффициентами, то вычисление функции Грина в конечном виде не представляет затруднений.

В силу нелинейности оператора F , параметры, входящие в формулировку задачи (I) или интегрального уравнения (2), могут определять, вообще говоря, несколько решений, и в этом случае не все решения будут устойчивы по Ляпунову: если в качестве начального условия для параболического уравнения

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = L[\bar{\theta}] + \sigma F[\bar{\theta}] - p \quad (4)$$

выбрать $\bar{\theta}(x, 0)$, в известном смысле близким к решению (I), то $\bar{\theta}(x, t)$ будет стремиться к $\theta(x)$ при $t \rightarrow \infty$, если $\theta(x)$ устойчиво [3]. Поэтому представляют интерес численные методы, позволяющие находить все решения (I) и, следовательно, построить бифуркационную кривую, с которой естественно сопоставлять результаты по исследованию устойчивости решений.*)

Отметим, что известные численные методы решения краевой задачи (I) (например, метод параболического спуска) позволяют достаточно эффективно строить устойчивые решения. В случае, когда требуется найти как устойчивые, так и неустойчивые решения (последние часто представляют самостоятельный интерес для приложений), обычно применяется метод стрельбы. При этом существенно то обстоятельство,

*) Бифуркационной кривой будем называть график функции $\sigma = \sigma[\theta(0)]$ задачи (I). В рассматриваемых примерах эта функция однозначная, но ее обратная функция может быть многозначной.

что решение задачи Коши для (I) с начальными данными при $x = 0$ и удовлетворяющее граничному условию при $x = 1$, оказывается уже единственным.

I. Рассмотрим еще один способ нахождения всех стационарных решений, использующий интегральное представление краевой задачи, что является непосредственным обобщением метода, рассмотренного в [4], на случай уравнения (I) или систему уравнений типа (I). Не останавливаясь на обосновании этого метода, заметим, что результаты вычисления, полученные с его помощью, можно контролировать решением задачи Коши.

Для того чтобы избежать затруднений, связанных с неединственностью (2), будем задавать, как и в методе стрельбы, значение $\theta(0)$ (область изменения $\theta(0)$ обычно заранее известна из физической интерпретации задачи). Полагая в (2) $x = 0$, получаем

$$\theta_0 = \theta_0 + \sigma \int_0^1 G(0, \xi) F[\theta(\xi)] d\xi, \quad (5)$$

$$\theta_0 = \theta(0), \quad \theta_0 = \theta(0).$$

Используем (5) для исключения параметра σ в (2):

$$\theta(x) = \theta(x) + (\theta_0 - \theta_0) \frac{\int_0^1 G(x, \xi) F[\theta(\xi)] d\xi}{\int_0^1 G(0, \xi) F[\theta(\xi)] d\xi}. \quad (6)$$

Функциональное уравнение (6) и является конечной целью преобразования задачи (I).

Если решение (6) найдено, то параметр σ , соответствующий заданному θ_0 , определится единственным образом из (5). Придавая θ_0 различные значения, после решения (6) можем поточечно построить зависимость σ от θ_0 — бифуркационную кривую задачи (I).

В рассмотренных далее примерах, связанных с математическим моделированием в химической технологии, оказалось возможным применить метод последовательных приближений для решения функционального уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \theta^{(k+1)}(x) &= \theta(x) + \sigma^{(k)} \int_0^1 G(x, \xi) F[\theta^{(k)}(\xi)] d\xi, \\ \sigma^{(k)} &= \frac{\theta_0 - \theta_0}{\int_0^1 G(0, \xi) F[\theta^{(k)}(\xi)] d\xi}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где k — номер итерации, $k = 0, 1, 2, \dots$; начальное приближение для θ имеет вид:

$$\theta^{(0)}(x) = \frac{\theta_0}{\theta_0} \theta(x). \quad (8)$$

Число итераций естественно связать с относительной погрешностью $\varepsilon > 0$; $\theta^{(k+1)}(x)$ принимается за решение (6), если $\frac{|\sigma^{(k+1)} - \sigma^{(k)}|}{\sigma^{(k)}} < \varepsilon$.

Заметим, что метод последовательных приближений с той особенностью, что на каждой итерации $\theta^{(k)}(x)$ принимает заданное значение θ_0 при $x = 0$, можно применить непосредственно к (1). Тожественный с (7) прием состоит в следующем. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} L[\tilde{\theta}^{(k+1)}(x)] &= p(x) - \sigma^{(k)} \Phi^{(k)}(x), \\ \Phi^{(k)}(x) &\equiv F[\theta^{(k)}(x)], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $\Phi^{(k)}(x)$ и $\sigma^{(k)}$ известны из предыдущих итераций. Решение (9) определяет $\theta^{(k+1)}(x)$, $\Phi^{(k+1)}(x)$ и $\sigma^{(k+1)}$ в виде:

$$\begin{aligned} \theta^{(k+1)}(x) &= \frac{\theta_0}{\tilde{\theta}^{(k+1)}(0)} \tilde{\theta}^{(k+1)}(x), \quad \Phi^{(k+1)}(x) \equiv F[\theta^{(k+1)}(x)], \\ \sigma^{(k+1)} &= \frac{\theta_0}{\tilde{\theta}^{(k+1)}(0)} \sigma^{(k)}. \end{aligned}$$

При $k = 0$ $\sigma^{(0)} = 1$, а $\theta^{(0)}(x)$ определено в (8).

2. Для вычисления итераций (7) разобьем отрезок $[0, 1]$ на n частей и представим каждый из интегралов, входящих в (7), в виде

102

суммы интегралов по элементарным отрезкам $[x_s, x_{s+1}]$, $x_{s+1} = x_s + h_s$, $s = 0, 1, \dots, n-1$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$. В результате получим следующее уравнение (индексы, определяющие номера итераций, опустим):

$$\left. \begin{aligned} \theta(x) &= \theta(x) + \sigma \left[\sum_{s=0}^{i-1} A_s(x) + \sum_{s=i}^{n-1} B_s(x) \right], \\ \sigma &= \frac{\theta_0 - \theta_0}{\sum_{s=0}^{n-1} B_s(0)}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь

$$A_s(x) = \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_+(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad B_s(x) = \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_-(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi$$

$$G_+ = G|_{x \geq \xi}, \quad G_- = G|_{x \leq \xi},$$

$\Phi(\xi)$ определена в (9). В дальнейшем будем обозначать через Φ_s и $\frac{d\Phi_s}{d\xi}$ соответственно $\Phi(x_s)$ и $\frac{d\Phi}{d\xi}(x_s)$. Аналогичные обозначения будут использоваться для $\theta(x)$ и $\theta(x)$.

Простейшая вычислительная схема может быть получена путем замены $\Phi(\xi)$ на кусочно-постоянную функцию $\Phi^*(\xi)$:

$$\Phi^*(\xi) \equiv F_s^* = \frac{1}{2} (\Phi_s + \Phi_{s+1}), \quad x_s + 0 \leq \xi \leq x_{s+1} - 0.$$

При этом погрешность вычисления A_s и B_s имеет порядок h_s^3 . Положив в (10) $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, сведем задачу к решению системы n трансцендентных относительно θ_i уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \theta_i + \sigma \left(\sum_{s=0}^{i-1} A_{is}^* F_s^* + \sum_{s=i}^{n-1} B_{is}^* F_s^* \right), \\ \sigma &= \frac{\theta_0 - \theta_0}{\sum_{s=0}^{n-1} B_{0s}^* F_s^*}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$A_{is}^* = \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_+(x_i, \xi) d\xi, \quad B_{is}^* = \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_-(x_i, \xi) d\xi.$$

Найденное таким способом численное решение задачи принадлежит классу C^1 , если $p(x)$ из класса кусочно-непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода.

Более высокая, чем в предыдущем случае, точность вычислений достигается заменой $\Phi(\xi)$ на эрмитов сплайн $Q(\xi)$ [5]. Пусть, например, $Q(\xi)$ - кубический эрмитов сплайн: в точках разбиения отрезка $[0,1]$ $Q(\xi)$ и $\frac{dQ}{d\xi}$ принимают соответственно значения $\Phi(\xi)$ и $\frac{d\Phi}{d\xi}$. Обозначим:

$$Q(\xi) = Q^{(s)}(\xi) \text{ при } x_s \leq \xi \leq x_{s+1}, \quad (12)$$

$$Q^{(s)}(x_s + h_s t) = t a_0^{(s)} + (1-t) b_0^{(s)} + t(1-t) [t a_1^{(s)} + (1-t) b_1^{(s)}],$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

Здесь

$$a_0^{(s)} = \Phi_{s+1}, \quad a_1^{(s)} = -h_s \frac{d\Phi_{s+1}}{d\xi} + a_0^{(s)} - b_0^{(s)},$$

$$b_0^{(s)} = \Phi_s, \quad b_1^{(s)} = h_s \frac{d\Phi_s}{d\xi} - a_0^{(s)} + b_0^{(s)}.$$

В выражение $\frac{d\Phi}{d\xi}$ входит производная $\frac{d\Phi}{d\xi}$. Поэтому будем рассматривать совместно с (10) уравнение

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} + \sigma \left[\sum_{s=0}^{i-1} A_s'(x) + \sum_{s=1}^{n-1} B_s'(x) \right], \quad (13)$$

где

$$A_s'(x) = \int_{x_s}^{x_{s+1}} \frac{\partial G_+}{\partial x}(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi, \quad B_s'(x) = \int_{x_s}^{x_{s+1}} \frac{\partial G_-}{\partial x}(x, \xi) \Phi(\xi) d\xi.$$

Положив в (10) и (13) $x = x_1$, сведем задачу к решению системы

2n трансцендентных относительно θ_1 и $\frac{d\theta_1}{d\xi}$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta_1 + \sigma \left(\sum_{s=0}^{i-1} A_{1s} + \sum_{s=1}^{n-1} B_{1s} \right), \\ \frac{d\theta_1}{dx} &= \frac{d\theta_1}{d\xi} + \sigma \left(\sum_{s=0}^{i-1} A_{1s}' + \sum_{s=1}^{n-1} B_{1s}' \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь

$$\sigma = \frac{\theta_0 - \theta_0}{\sum_{s=0}^{n-1} B_{0s}},$$

$$A_{1s} = \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_+(x_1, \xi) Q^{(s)}(\xi) d\xi, \quad B_{1s} = \int_{x_s}^{x_{s+1}} G_-(x_1, \xi) Q^{(s)}(\xi) d\xi,$$

$$A_{1s}' = \int_{x_s}^{x_{s+1}} \frac{\partial G_+}{\partial x}(x_1, \xi) Q^{(s)}(\xi) d\xi, \quad B_{1s}' = \int_{x_s}^{x_{s+1}} \frac{\partial G_-}{\partial x}(x_1, \xi) Q^{(s)}(\xi) d\xi.$$

К начальному приближению (8) добавим $\frac{d\theta^{(0)}}{dx}$ - начальное приближение для производной.

Отметим, что погрешности вычислений A_s, B_s, A_s' и B_s' имеет порядок h_s^5 . Если $p(x)$ - из класса C^1 , то численное решение задачи, как и $\Phi(x)$, принадлежит классу C^3 .

Предлагаемый алгоритм проверялся на точных решениях, в том числе на решениях с большими градиентами. Показательным в этом смысле явился следующий пример.

Точное решение краевой задачи

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \sigma(1-\theta) = 0, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad \theta = 0 \text{ при } x = 1$$

имеет вид

$$\theta(x) = 1 - \frac{\text{ch}(x\sqrt{\sigma})}{\text{ch}\sqrt{\sigma}}, \quad \theta_0 = 1 - \frac{1}{\text{ch}\sqrt{\sigma}},$$

т.е. $\sqrt{\sigma} \rightarrow \infty$ при $\theta_0 \rightarrow 1$, как $\ln \frac{2}{(1-\theta)}$, а график функции $\theta(x)$ все более напоминает "ступеньку". Численное решение строилось при заданных значениях θ_0 , отличающихся от 1 на величинах порядка $10^{-6} - 10^{-8}$. Чтобы получить значения σ , близкие к точным, число узлов равномерного разбиения отрезка $[0,1]$ доводилось до 1200-1600. Результаты вычислений свидетельствуют об устойчивости счета при решении системы (14) большой размерности для рассматриваемого примера. На этом же примере были опробованы схемы, в которых гладкость эрмитового сплайна доводилась до C^4 .

3. В качестве приложения метода рассмотрено решение трех краевых задач, моделирующих стационарные процессы химических реакций. В первом примере мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка; во втором примере - систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой одно уравнение второго порядка, а два других - первого порядка; в третьем примере - систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Применявшийся численный метод состоял в редукции краевых задач к системам типа (14) при равномерном разбиении отрезка по x . Вычисления в известном объеме воспроизвели результаты, полученные ранее рядом авторов [6-8], которые численным способом исследовали множественность решений аналогичных краевых задач. Отметим, что бифуркационные кривые для краевых задач в последних двух примерах, насколько нам известно, впервые приводятся в данной работе.

ПРИМЕР I. Математическая модель реакции в зерне катализатора шарообразной формы связана с решением следующей краевой задачи (в безразмерных переменных):

$$1[\theta(x)] + \alpha \theta^2(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (15)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{d\theta}{dx} = -N\theta \text{ при } x = 1;$$

$$1[\theta] = \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\theta}{dx}, \quad F[\theta] = (c - \theta)e^{\frac{\theta}{a+b\theta}},$$

$$c = \alpha\theta(1) + \beta.$$

Здесь x - линейная координата, отнесенная к радиусу шара, θ - "безразмерная" температура; $\sigma, N, a, b, \alpha, \beta$ - безразмерные положительные параметры, характеризующие физико-химические свойства среды.

Вспользуемся функцией Грина оператора 1

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G_-(x, \xi) = \xi^2 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{N-1}{N} \right), & x \leq \xi, \\ G_+(x, \xi) = \xi^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{N-1}{N} \right), & x \geq \xi, \end{cases}$$

для интегрального представления (15)

$$\theta(x) = \sigma \left\{ \int_0^x G_+(x, \xi) F[\theta(\xi)] d\xi + \int_x^1 G_-(x, \xi) F[\theta(\xi)] d\xi \right\}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\sigma}{x^2} \int_0^x \xi^2 F[\theta(\xi)] d\xi, \quad (17)$$

и, кроме того,

$$\theta(1) = \frac{\sigma}{N} \int_0^1 \xi^2 F[\theta(\xi)] d\xi.$$

Таким образом, решение (15) - монотонно убывающая от θ_0 до $\theta(1)$ положительная функция, $0 < \theta_0 < c$.

Система (14) в данном случае может быть записана (для $i = 1, 2, \dots, n$) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \sigma \left(\frac{1}{x_i} \sum_{a=0}^{i-1} A_a + \sum_{a=1}^{n-i} B_a - \frac{N-1}{N} \sum_{a=0}^{n-1} A_a \right), \\ \frac{d\theta_i}{dx} &= -\frac{\sigma}{x_i^2} \sum_{a=0}^{i-1} A_a, \quad c = \frac{\theta_0}{\sum_{a=0}^{n-1} (B_a - \frac{N-1}{N} A_a)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Здесь

$$A_a = \int_{x_a}^{x_{a+1}} \xi^2 \theta^{(a)}(\xi) d\xi, \quad B_a = \int_{x_a}^{x_{a+1}} \xi \theta^{(a)}(\xi) d\xi,$$

где $\theta^{(a)}(\xi)$ - эрмитов локальный сплайн, определенный в (12).

Будем считать известными c, N, a, b и α . После решения (18) при заданных значениях $\theta_0, 0 < \theta_0 < c$, строится бифуркационная кривая $\alpha(\theta_0)$ и функция $\beta(\theta_0)$

$$\beta(\theta_0) = c - \alpha\theta(1).$$

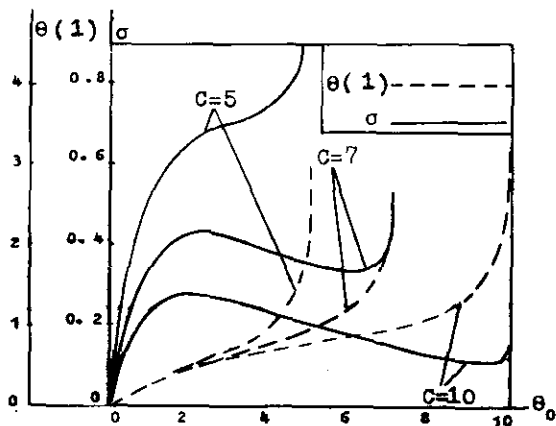


Рис. I

ПРИМЕР 2. Математическая модель реактора - "кипящий слой" - описывается системой уравнений (переменные взяты в безразмерном виде):

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - N(\theta - \theta_x) - B(\theta - \theta_T) + \sigma f(\theta)C &= 0, \\ \frac{d\theta_T}{dx} &= B(\theta - \theta_T), \quad \frac{dC}{dx} = -Kf(\theta)C, \\ f(\theta) &= \frac{\varphi(\theta)}{1 + \nu\varphi(\theta)}, \quad \varphi(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{1 + \lambda\theta}\right), \end{aligned} \quad (I9)$$

с граничными условиями:

$$\frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \theta_T = \theta_T^*, \quad C = 1 \quad \text{при } x = 0; \quad \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

Здесь θ пропорциональна температуре твердой фазы, θ_T пропорциональна температуре газа, C - концентрация, θ_x - постоянная, пропорциональная температуре холодильника; $P, N, B, K, \sigma, \nu, \lambda$ - безразмерные положительные параметры, характеризующие физико-химические свойства среды.

Разрешим второе и третье уравнения системы (I9) относительно θ_T и C и подставим найденные выражения в первое уравнение. В результате получим интегродифференциальное уравнение относительно θ :

$$1[\theta(x)] + \sigma F[\theta(x)] = p(x), \quad (20)$$

где

$$1[\theta(x)] = \frac{1}{P} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - (B + N)\theta + B^2 \int_0^x e^{-B(x-\xi)} \theta(\xi) d\xi,$$

$$F[\theta(x)] = f[\theta(x)] \exp\left\{-K \int_0^x f[\theta(\xi)] d\xi\right\},$$

$$p(x) = -N\theta_x - B\theta_T^* e^{-Bx}.$$

Как нетрудно убедиться, интегральное уравнение, соответствующее краевой задаче (20), можно записать в следующем виде:

$$\theta(x) = \theta(x) + K[g(x) \int_0^1 g(1-\xi) F[\theta(\xi)] d\xi +$$

$$-\frac{dg}{dx}(1) \int_0^x \int_0^{x-\xi} g(\tau) d\tau] F[\theta(\xi)] d\xi\}. \quad (21)$$

Здесь

$$g(x) = \sum_{k=1}^3 u_k e^{r_k x}, \quad \theta(x) = \theta_x + \frac{\theta_T^* - \theta_x}{\Delta B} \sum_{k=1}^3 v_k e^{r_k x},$$

$$u_1 = r_1(r_3^2 - r_2^2), \quad u_2 = r_2(r_1^2 - r_3^2), \quad u_3 = r_3(r_2^2 - r_1^2),$$

$$v_1 = \frac{1}{r_1}(e^{r_3} - e^{r_2}), \quad v_2 = \frac{1}{r_2}(e^{r_1} - e^{r_3}), \quad v_3 = \frac{1}{r_3}(e^{r_2} - e^{r_1}),$$

$$K = \frac{\sigma P}{g(0) \frac{dg}{dx}(1)}, \quad \Delta = \sum_{k=1}^3 \frac{v_k}{B+r_k},$$

r_1, r_2, r_3 - корни кубического уравнения

$$(B + r)(r^2 - rN) = PB. \quad (22)$$

Геометрическая интерпретация (22) показывает, что существуют всегда три действительных корня, причем один корень положительный, а два других отрицательные. К (21) присоединим выражение производной

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dx} + \kappa \left\{ \frac{dg(x)}{dx} \int_0^1 g(1-\xi) F[\theta(\xi)] d\xi + \right. \\ \left. + \frac{dg(1)}{dx} \int_0^x g(x-\xi) F[\theta(\xi)] d\xi \right\}. \quad (23)$$

Конкретный вид системы (14), которая следует из (21)-(23), мы приводить не будем. Отметим, что применение метода последовательных приближений для решения (14) в рассматриваемом случае эффективно, если $P \leq 1$ и $P(N+V) \leq 10$: 3-4 итерации при $\epsilon \approx 10^{-3}$.

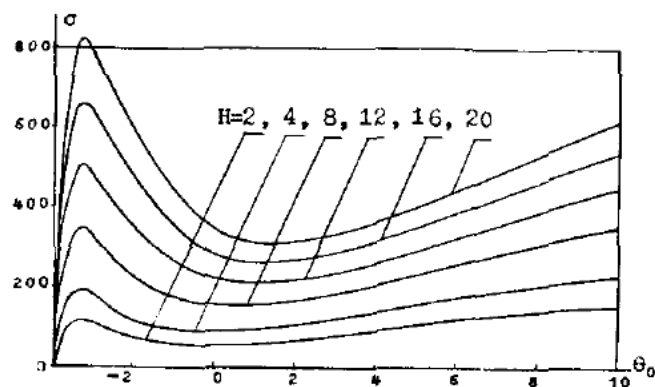


Рис. 2

Примеры построения бифуркационных кривых задачи (19) приведены на рис. 2. при следующих значениях параметров: $P = 0.5$, $V = 5$, $\kappa = 5$, $\theta_x = \theta_r^* = -4$, $v = 0.5$, $\lambda = 0.05$. В зависимости от величины N и σ число решений задачи может измениться от одного до трех.

ПРИМЕР 3. Математическая модель реактора - "неподвижный слой" - представлена краевой задачей для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно "безразмер-

ной" температуры θ и степени превращения вещества v

$$\left. \begin{aligned} I_1[\theta(x)] + \sigma_1 F[\theta(x), v(x)] &= -N\theta_x, \\ I_2[\theta(x)] + \sigma_2 F[\theta(x), v(x)] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -2P_1\theta, \quad \frac{dv}{dx} = -2P_2v \quad \text{при } x = 1.$$

Здесь

$$I_1[\theta] = \frac{1}{2P_1} \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d\theta}{dx} - N\theta, \quad I_2[v] = \frac{1}{2P_2} \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{dv}{dx},$$

$$F[\theta, v] = \varphi(\theta)(1-v), \quad \varphi(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{1+\lambda\theta}\right),$$

$P_1, P_2, N, \lambda, \sigma_1, \sigma_2$ - положительные постоянные, характеризующие физико-химические свойства среды, θ_x пропорциональна температуре холодильника.

Используя выражения функций Грина операторов I_1 и I_2 , преобразуем (24) к системе двух интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \theta(x)^* &= \theta(x) + \sigma_1 \left\{ \int_0^x G_+(x, \xi) F[\theta(\xi), v(\xi)] d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 G_-(x, \xi) F[\theta(\xi), v(\xi)] d\xi \right\}, \\ v(x) &= \sigma_2 \left\{ \int_0^x e^{-2P_2(x-\xi)} F[\theta(\xi), v(\xi)] d\xi + \int_x^1 F[\theta(\xi), v(\xi)] d\xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

При этом употреблены следующие обозначения:

$$G_-(x, \xi) = \frac{1}{2[g(1)+\omega(1)]} g(x)g(1-\xi) \exp[-(\Delta - P_1)(\xi-x)],$$

$$G_+(x, \xi) = \frac{1}{2[g(1)+\omega(1)]} g(1-x)g(\xi) \exp[-(\Delta + P_1)(x-\xi)],$$

$$g(x) = 1 + e^{-2\Delta x} + \frac{P_1}{\Delta} (1 - e^{-2\Delta x}), \quad \omega(x) = \frac{N}{\Delta} (1 - e^{-2\Delta x}),$$

$$\Delta^2 = P_1^2 + 2HP_1, \quad \theta(x) = \theta_1 \left\{ 1 - \frac{g(x)}{g(1)+u(1)} \exp[-(\Delta-P_1)(1-x)] \right\}.$$

Наряду с (25) будем рассматривать выражения для производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= \frac{d\theta}{dx} + \sigma_1 \left\{ \int_0^x \frac{\partial G}{\partial x} (x, \xi) F[\theta(\xi), v(\xi)] d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^1 \frac{\partial G_-}{\partial x} (x, \xi) F[\theta(\xi), v(\xi)] d\xi \right\}, \\ \frac{dv}{dx} &= -2P_2 \sigma_2 \int_0^x e^{-2P_2(x-\xi)} F[\theta(\xi), v(\xi)] d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Из второго уравнения (26) следует, что $v(x)$ монотонно убывает с ростом x от v_0 до $v(1)$, $v_0 = v(0) < 1$.

Параметры σ_1 и σ_2 исключаются из (25)-(26) заданием при $x=0$ значений θ_0 и v_0 , $\theta_0 > \theta_*$, $0 < \theta_* < 1$. В результате мы получим по аналогии с (14) систему $4n$ трансцендентных уравнений относительно $\theta_1, v_1, \frac{d\theta_1}{dx}, \frac{dv_1}{dx}$, $i = 1, 2, \dots, n$, которую будем решать методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения достаточно взять выражения $\theta^{(0)}(x), v^{(0)}(x), \frac{d\theta^{(0)}}{dx}$ и $\frac{dv^{(0)}}{dx}$, где

$$\theta^{(0)}(x) = \frac{\theta_0}{\theta_*} \theta(x), \quad v^{(0)}(x) = v_0 \left(1 - \frac{P_2}{1+P_2} x^2 \right).$$

Бифуркационная кривая задачи (24) строится следующим образом. Будем считать известными параметры, входящие в формулировку задачи (24), кроме σ_1 . При произвольно фиксированных θ_0 и v_0 вычисленное значение σ_2 , вообще говоря, не будет равно заданному значению $\bar{\sigma}_2$. Поэтому для каждого θ_0 ищется такое $\bar{v}_0$, что $\sigma_2(\theta_0, \bar{v}_0) = \bar{\sigma}_2$. Оказывается, последнее равенство определяет единственное $\bar{v}_0$ (при изменении v_0 от 0 до 1 $\sigma_2(\theta_0, v_0)$ монотонно стремится к бесконечности), что позволяет поточечно построить кривые $\sigma_2(\theta_0)$ и $v_0(\theta_0)$, вдоль которых σ_2 равно заданному значению.

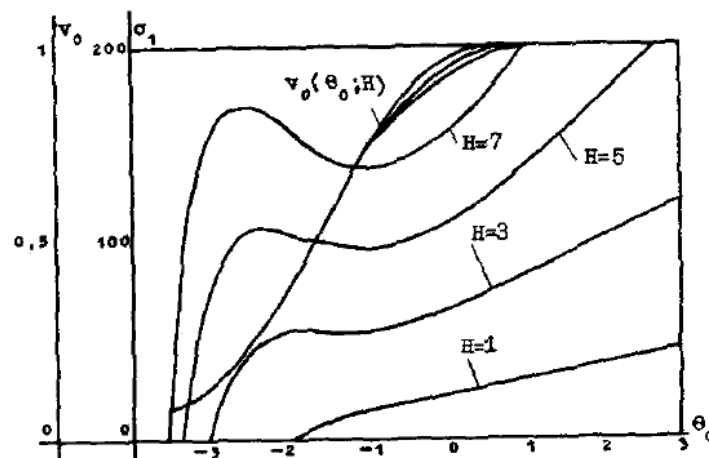


Рис. 3

Представленные на рис.3 результаты получены при следующих значениях параметров: $P_1 = 0.05$, $P_2 = 1$, $\lambda = 0.05$, $\sigma_2 = 5$, $\theta_* = -4$. Графики функции $v_0(\theta_0; N)$, $N = 1+7$, практически совпадают в большей части области определения v_0 . Нижняя из этих кривых соответствует значению $N=1$, средняя — $N=3$ и $N=5$, верхняя — $N=7$.

4. Существенным моментом в предлагаемом методе является преобразование краевой задачи к функциональному уравнению, решение которого оказывается уже единственным, либо построение итерационного процесса, аналогичного (9). И в том и другом случаях мы свели решение нелинейной краевой задачи к последовательности решений линейных краевых задач. Однако организация итерационного процесса может быть иной (правда, за счет усложнения алгоритма). В частности, возможно применение метода Ньютона к функциональному уравнению или квазилинеаризация с учетом особенности, отмеченной в (9) [9-10].

Другое обстоятельство, на которое нам хотелось бы обратить внимание, связано с распространением метода на случай нелинейных краевых задач типа задачи Дирихле для квазилинейного уравнения Пуассона:

$$\Delta\theta + \sigma\theta[\theta] = 0, \quad \theta|_{\Gamma} = 0, \quad (27)$$

где Γ — граница выпуклой области, обладающей симметрией относительно осей координат. Будем задавать θ_0 — значение θ в начале координат. Тогда метод последовательных приближений применительно к (27) строится таким образом, чтобы на каждой итерации решение линейной краевой задачи в начале координат было равно θ_0 .

В заключение авторы выражают благодарность Т.И.Зеленяку, по инициативе которого была проделана предлагаемая работа, и В.С.Шепелеву за обсуждение результатов.

Л и т е р а т у р а

1. ТРИКОМИ Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.
2. МИХЛИН С.Г. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.-Л., Гостехиздат, 1949.
3. ЗЕЛЕНЯК Т.И. Качественная теория краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка параболического типа. Новосибирск, 1972.
4. ЛУКЬЯНОВА Р.Г., ФАДЕЕВ С.И. О численном решении краевой задачи, связанной с электростатическим притяжением мембраны. — В кн.: Моделирование в пленочной электромеханике. (Вычислительные системы, вып. 66.) Новосибирск, 1975, с. 61-90.
5. ВАРГА Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., "Мир", 1974.
6. JUSS D. Some further observation concerning multiplicity and stability of distributed parameter systems. — "CES", 1972, v. 27, p.2299.
7. HLAVACEK V., HOFMANN H., KUBICEK M. Transient axial heat and mass transfer in tubular reactors. — "CES", 1971, v.26, p.1629.
8. ЕМЕЛЬЯНОВ И.Д., ШЕПЛЕВ В.С., СЛИНЬКО М.Г. Число стационарных состояний экзотермических процессов в организованном псевдо-ожигенном слое катализатора. — Докл. АН СССР, 1975, т.221, с.402-404.
9. КАНТОРОВИЧ Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика. — "Успехи мат. наук", 1948, т.3, вып. 6, с. 89-185.
10. БЕЛЛМАН Р., КАЛАБА Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., "Мир", 1968.

Поступила в ред.-изд.отд.

6 января 1977 года