

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЛАЙНОВ
ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭКОНОМИЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

В.Н.Бергун, А.М.Гришин

В работах [1,2] предложен итерационно-интерполяционный метод для решения параболических, гиперболических и эллиптических уравнений математической физики, а также доказана сходимость последовательности приближений при бесконечном увеличении числа итераций в случае решения задачи Коши, определяющей фундаментальные решения уравнения теплопроводности, и на примере решения ряда других задач математической физики показана эффективность этого метода. В дальнейшем при помощи этого метода получены разностные схемы для решения некоторых важных задач теории горения, тепломассообмена и пограничного слоя [3], а в работе [4] приведен алгоритм метода и установлена однозначная связь между приближениями в рамках итерационно-интерполяционного метода и соответствующими сплайнами по пространственной переменной. В продолжении этой работы, опубликованном в [5], была доказана сходимость приближений предложенного метода для одной линейной краевой задачи как при увеличении числа итераций, так и при увеличении числа интерполяционных узлов.

В данной работе рассмотрены некоторые свойства систем итерационно-интерполяционного метода первого и второго приближений для линейного уравнения параболического типа. Показано, что в случае линейного начального приближения система обыкновенных дифференциальных уравнений первого приближения итерационно-интерполяционного метода совпадает с соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений метода кубической сплайн-коллокации [6]. Показано, что точность приближений в итерационно-интерполяционном методе можно повысить путем уменьшения шага разностной сетки, уве-

личения номера приближения для точности начального приближения. Получены оригинальные явные и неявные разностные схемы для решения уравнения теплопроводности, и показано, что при помощи итерационно-интерполяционного метода можно получать однородные разностные схемы для параболических уравнений с разрывными коэффициентами. Предлагается для построения однородных экономичных разностных схем при решении многомерных задач использовать сплайновые приближения итерационно-интерполяционного метода и метод расщепления [8]. Приведен пример решения многомерной краевой задачи для одной нелинейной системы уравнений параболического типа.

§1. Некоторые свойства приближений итерационно-интерполяционного метода

Рассмотрим в области $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= K(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial t} - H(t, x, u) \frac{\partial u}{\partial x} - F(t, x, u), \\ \alpha_1(t) \frac{\partial u}{\partial x} &= \gamma_1(t) - \delta_1(t)u \quad \text{при} \quad x = 0, \\ \alpha_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} &= \gamma_2(t) - \delta_2(t)u \quad \text{при} \quad x = 1, \\ u(0, x) &= f(x), \quad K(t, x, u) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Из алгоритма итерационно-интерполяционного метода [1, 5] и определения сплайна [9] следует, что первое и последующие приближения $u^n(x, t)$ ($n = 1, 2, \dots$) в этом методе представляют собой сплайны* по переменной x , построенные на сетке $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$, которые интерполируют значения $u_1^{(n)}(t) = u^{(n)}(x_1, t)$, $i = 0, N$, в любой фиксированный момент времени t .

Пусть в каждом интервале (x_{i-1}, x_i) "нулевое" приближение к решению задачи (1.1) выбрано в виде

$$\varphi_i^{(0)} = \frac{x_i - x}{h_i} u_{i-1}^{(1)} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} u_i^{(1)}, \quad (1.2)$$

где $u_i^{(1)} = u_1^{(1)}(t)$ — функции, подлежащие определению.

Аппроксимируя функции $u(t, x)$ и $F(t, x, u)$ для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) независимым образом полиномами вида (1.2), получаем в первом приближении следующее аналитическое представление искомой функции на i -м интервале:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(1)} &= \left(\frac{x_i}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{11}(v) dv - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{21}(v) dv - \frac{(x - x_{i-1})x_i}{h_i^2} \times \right. \\ &\times \left. \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{41}(v) dv + \frac{x - x_{i-1}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{21}(v) dv \right) \dot{u}_{i-1} + \left(-\frac{x_{i-1}}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{11}(v) dv + \right. \\ &+ \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{21}(v) dv + \frac{(x - x_{i-1})x_{i-1}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{11}(v) dv - \\ &- \frac{x - x_{i-1}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mu_{21}(v) dv \Big) \dot{u}_i + \left(\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} H d\zeta \right] dv - \right. \\ &- \frac{x - x_{i-1}}{h_i^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} H d\zeta \right] dv \Big) (u_{i-1} - u_i) + \\ &+ \frac{h_i^3 - h_i^2(x - x_{i-1}) + (x - x_i)^3}{6h_i} F_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})[h_i^2 - (x - x_{i-1})^2]}{6h_i} F_i + \\ &+ \left(1 - \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \right) u_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} u_i, \end{aligned}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$,

$$\mu_{11}(x) = \int_{x_{i-1}}^x K d\zeta, \quad \mu_{21}(x) = \int_{x_{i-1}}^x K \zeta d\zeta.$$

Для построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $u_i(t)$ следует потребовать, чтобы

$$\left. \frac{\partial \varphi_i^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=x_i} = \left. \frac{\partial \varphi_{i+1}^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=x_i},$$

и учесть начальные и граничные условия задачи.

* Для нелинейных уравнений используется независимая аппроксимация нелинейных членов.

В частности, если в краевой задаче (I.1) положить $K \equiv 1$, $\Phi \equiv 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 1$, то функция

$$\varphi_i^{(1)} = -\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} \ddot{u}_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{6h_i} \ddot{u}_i + \\ + \frac{(x_i - x)}{h_i} \left(u_{i-1} - \frac{h_i^2}{6} \ddot{u}_{i-1} \right) + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \left(u_i - \frac{h_i^2}{6} \ddot{u}_i \right)$$

представляет собой кубический сплайн дефекта I, где значения u_i ($i = 0, \dots, N$) при $h_i = \frac{1}{N}$ определяются из системы

$$2\ddot{u}_0 + \ddot{u}_1 = \frac{6}{\alpha_1 h_i^2} [\alpha_1(u_1 - u_0) + h(u_0 - \gamma_1)],$$

$$\ddot{u}_{i-1} + 4\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1} = \frac{6}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\ddot{u}_{N-1} + 2\ddot{u}_N = \frac{6}{\alpha_2 h^2} [\alpha_2(u_{N-1} - u_N) + h(\gamma_2 - u_N)], \quad u_i(0) = f(x_i).$$

Здесь и в дальнейшем при рассмотрении систем первого приближения индекс номера приближения опускается, а n -е приближение на сетке Δ , образованное функциями $\varphi_i^{(n)}$, $i = 1, N$, обозначается через $\varphi_\Delta^{(n)}$.

Из алгоритма метода следует, что при $n \geq 1$, $K \equiv 1$, $\Phi \equiv 0$ функция $\varphi_\Delta^{(n)}$ представляет собой сплайн на сетке Δ $(2n+1)$ -го порядка дефекта I, а соответствующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений итерационно-интерполяционного метода обладают свойством оптимальной аппроксимации по переменной x . С другой стороны, при исследовании свойств полинома $\varphi_\Delta^{(n)}$ при фиксированном t в этом случае можно использовать математический аппарат теории сплайнов, разработанный в [9-11].

В ряде случаев удается получить точное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений итерационно-интерполяционного метода. Получим, например, такое решение в первом и втором приближениях для первой краевой задачи теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Psi(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = \gamma_1, \quad u(1, t) = \gamma_2.$$

Система уравнений первого приближения на равномерной сетке Δ при $h = 1/(N+1)$ имеет вид

$$\ddot{u}_{i-1} + 4\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1} = \frac{6(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})}{h^2} + \Psi_{i-1} + 4\Psi_i + \Psi_{i+1}, \quad (1.3)$$

$$u_0 = \gamma_1, \quad u_{N+1} = \gamma_2, \quad u_i(0) = 0, \quad i = 1, N. \quad (1.4)$$

Записывая систему (1.3), (1.4) в матричной форме и используя свойства ортогонального преобразования В, которое имеет вид [12]

$$B = \|b_{ks}\| = \|(-1)^{k+s} \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{ks\pi}{N+1}\|, \quad 1, k = 1, 2, \dots, N,$$

получаем

$$\varphi_i^{(1)} = \frac{(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)}{6h_i} (\ddot{u}_{i-1} - \Psi_{i-1}) + \frac{x_i - x}{h_i} \Psi_{i-1} + \\ + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \Psi_i + \frac{(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})}{6h_i} (\ddot{u}_i - \Psi_i), \quad (1.5) \\ i = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь

$$u_i(t) = \sum_{\alpha=1}^N b_{i\alpha} \int_0^t e^{-\delta_\alpha^2(t-\tau)} F_\alpha(\tau) d\tau, \quad (1.6)$$

$$\delta_k^2 = -\frac{\lambda_k}{h^2(1+\frac{1}{\delta_k})} > 0, \quad \lambda_k = -2(1+\cos \frac{k\pi}{N+1}),$$

$$F_k(\tau) = \sum_{s=1}^N b_{ks} \Psi_s(\tau) + \frac{6}{6+\lambda_k} [b_{k1}b_1 + b_{kN}b_N],$$

$$b_1 = \frac{u_0}{h^2} - \frac{\ddot{u}_0 - \Psi_0}{6}, \quad b_N = \frac{u_{N+1}}{h^2} - \frac{\ddot{u}_{N+1} - \Psi_{N+1}}{6}.$$

Для рассматриваемой задачи система обыкновенных дифференциальных уравнений второго приближения имеет вид

$$\ddot{u}_{i-1} + 4\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1} - \frac{h^2}{60} (7\ddot{u}_{i-1} + 16\ddot{u}_i + 7\ddot{u}_{i+1}) =$$

$$= \frac{6(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}))}{h^2} + \psi_{i-1} + 4\psi_i + \psi_{i+1} - \frac{h^2}{60}(7\ddot{\psi}_{i-1} + 16\ddot{\psi}_i + 7\ddot{\psi}_{i+1}), \quad (1.7)$$

$$u_n = \gamma_1, \quad u_{n+1} = \gamma_2, \quad u_1(0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1.8)$$

В этом случае $\varphi_{\Delta}^{(2)}$ является полиномом пятой степени относительно x , а решение системы (1.7), (1.8) имеет вид (1.6), где

$$F_k(\tau) = \frac{10(\lambda_k + 6)^2}{3(\lambda_k^2 + 30\lambda_k + 120)} \sum_{s=1}^n b_{ks} \psi_s(\tau) +$$

$$+ \frac{20(\lambda_k + 6)(b_{k1}b_1 + b_{kn}b_n)}{\lambda_k^2 + 30\lambda_k + 120} +$$

$$+ \frac{h^2(30 + 7\lambda_k)(b_{k1}\ddot{b}_1 + b_{kn}\ddot{b}_n)}{3(\lambda_k^2 + 30\lambda_k + 120)},$$

$$\delta_k^2 = - \frac{20\lambda_k(\lambda_k + 6)}{h^2(\lambda_k^2 + 30\lambda_k + 120)}.$$

Если в качестве $\varphi_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, выбрать интерполяционный многочлен второй степени*, то для задачи (1.2) получим известную систему обыкновенных дифференциальных уравнений метода прямых [13]

$$\dot{u}_{i+1} + 10\dot{u}_i + \dot{u}_{i-1} = \frac{12(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}))}{h^2} + \psi_{i+1} +$$

$$+ 10\psi_i + \psi_{i-1}, \quad (1.9)$$

$$u_0 = \gamma_1, \quad u_{n+1} = \gamma_2, \quad u_1(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

Решение этой системы имеет вид (1.6), если

$$\delta_k^2 = \frac{12(1 + \cos \frac{\pi k}{n+1})}{h^2(5 - \cos \frac{\pi k}{n+1})}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

* В этом случае первое приближение на сетке Δ будем обозначать $\varphi_{\Delta}^{(1)}$.

Погрешность аппроксимации системы (1.3), (1.4) при решении задачи (1.2) есть $O(h^2)$, а погрешность аппроксимации систем обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7), (1.8) и (1.9), (1.10) есть $O(h^4)$.

Т а б л и ц а I

Значения точных и приближенных решений*	Аргумент x					N
	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	
u_T	0.26712	0.46334	0.59685	0.67416	0.69945	9
u_T^1	0.57550	0.40903	0.26126	0.12706	0	
$\varphi_{\Delta}^{(1)}$	0.26807	0.46514	0.59932	0.67707	0.70251	
$\varphi_{\Delta}^{(1)'} $	0.57780	0.41098	0.26267	0.12780	0	
$\varphi_{\Delta}^{(2)}$	0.26712	0.46334	0.59685	0.67416	0.69945	
$\varphi_{\Delta}^{(2)'} $	0.57545	0.40889	0.26104	0.12678	0	
$\bar{\varphi}_{\Delta}^{(1)}$	0.26713	0.46335	0.59687	0.67418	0.66947	
$\bar{\varphi}_{\Delta}^{(1)'} $	0.57547	0.40890	0.26105	0.12679	0	
$\varphi_{\Delta}^{(1)}$	0.26716	0.46341	0.59695	0.67428	0.69952	49
$\varphi_{\Delta}^{(1)'} $	0.57560	0.40911	0.26131	0.12709	0	

В табл. I для $\psi = 0.5$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $l = 4$, $t = 2$ при различных x приведены точное решение задачи (1.2), взятое из работы [11], и значения функций $\varphi_{\Delta}^{(1)}(x, t)$, $\varphi_{\Delta}^{(1)'}(x, t)$, $\varphi_{\Delta}^{(2)}(x, t)$, $\varphi_{\Delta}^{(2)'}(x, t)$, $\bar{\varphi}_{\Delta}^{(2)}(x, t)$, $\bar{\varphi}_{\Delta}^{(2)'}(x, t)$, которые соответствуют приближенному решению краевой задачи (1.2).

Из анализа данных табл. I (в согласии с результатами работ [1-5]) следует, что точность расчетов в итерационно-интерполяционном методе можно повысить тремя способами:

- 1) увеличением числа узлов сетки Δ ;
- 2) путем увеличения степени полинома нулевого приближения $\varphi_{\Delta}^{(0)}$;
- 3) увеличением номера приближения.

§2.0 разностных схемах сплайновой интерполяции

Каждому приближению итерационно-интерполяционного метода соответствует некоторая система обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой может быть получено разностным методом. При этом основное отличие разностной схемы сплайновой интерполяции от обычной разностной схемы состоит в том, что по схемам сплайновой интерполяции на каждом временном слое получается сплайн по пространственной переменной.

В табл. 2 приведены некоторые разностные схемы итерационно-интерполяционного метода в случае задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const} > 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

и условия их устойчивости по начальным данным.

В случае, если начальное приближение является линейным, неявные разностные схемы итерационно-интерполяционного метода разрешимы методом прогонки [10].

Покажем, что итерационно-интерполяционный метод можно применять и для расчета задач с разрывными коэффициентами.

С этой целью рассмотрим в области D первую краевую задачу для уравнения теплопроводности ($D = \{0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}) + \Psi(x, t), \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t) = \gamma_1, \quad u(1, t) = \gamma_2, \quad (2.3)$$

где $0 < C_1 \leq K(x, t) \leq C_2$ в области D , C_1 и C_2 — постоянные.

Если $K(x, t)$ и $\Psi(x, t)$ имеют разрыв первого рода, например на прямой $x = \xi$ в области D , то на линии разрыва должны выполняться условия сопряжения [14]. Положим

$$\phi_i^{(0)} = \alpha \left[\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h} x + \frac{x_i \psi_{i-1} - x_{i-1} \psi_i}{h} \right] + \beta \psi_i, \quad \alpha + \beta = 1,$$

$$\varphi_i^{(0)} = \alpha \left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} x + \frac{x_i u_{i-1} - x_{i-1} u_i}{h} \right] + \beta u_i,$$

$$K_i^{(0)} = K \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, t \right) = K_{i-\frac{1}{2}},$$

Таблица 2

Разностные схемы ($\tau = 6\tau\alpha/h^2$, $u_i^n = (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$, τ — шаг по времени, $u_i^n = (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$, $0 \leq \alpha \leq 1$)	Шаблон схемы	Погрешность аппроксимации	Условия устойчивости
I $u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n + 4(u_{i-1}^{n+1} - u_i^n) + u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n = \tau\alpha x$ $x [\alpha u_{i+1}^{n+1} + (1-\alpha)u_i^n], 0 \leq \alpha \leq 1$		$O(\tau, h^2), \alpha \neq \frac{1}{2}$ $O(\tau^2, h^2), \alpha = \frac{1}{2}$	$0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ $\tau \leq \frac{1}{(1-2\alpha)}$
II $3u_{i-1}^{n+1} - 4u_{i-1}^n + u_{i-1}^{n-1} + 4(3u_{i-1}^{n+1} - 4u_i^n + u_{i-1}^{n-1}) + 3u_{i+1}^{n+1} - 4u_{i+1}^n + u_{i+1}^{n-1} = 2\tau\alpha u_{i+1}^{n+1}$		$O(\tau^2, h^2)$	Абсолютно устойчива
III $u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1} + 4(u_{i-1}^{n+1} - u_i^n) + u_{i+1}^n - u_{i+1}^{n-1} = \tau\alpha u_i^n$		$O(\tau, h^2)$	$\frac{3}{8} \leq \tau \leq \frac{21}{8}$
IV $60\tau[u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n + 4(u_{i-1}^{n+1} - u_i^n) + u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n] - h^2[7(u_{i-1}^{n+1} - 2u_{i-1}^n + u_{i-1}^{n-1}) + 16(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}) + 7(u_{i+1}^{n+1} - 2u_{i+1}^n + u_{i+1}^{n-1})] = 60\tau\alpha u_{i+1}^{n+1}$		$O(\tau, h^4)$	$\tau \geq 1$

тогда при выбранном способе аппроксимации получаем однородную систему дифференциальных уравнений для первого приближения:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{6} \ddot{U}_{i-1} + \left(\frac{2}{3} \alpha + \beta \right) \ddot{U}_i + \frac{\alpha}{6} \ddot{U}_{i+1} = \\ & = K_{i+\frac{1}{2}} \frac{U_{i+1} - U_i}{h} - K_{i-\frac{1}{2}} \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + \frac{\alpha}{6} \Psi_{i-1} + \\ & + \left(\frac{2}{3} \alpha + \beta \right) \Psi_i + \frac{\alpha}{6} \Psi_{i+1}, \quad U_0 = \gamma_1, \quad U_N = \gamma_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$U_i(0) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad \alpha + \beta = 1, \quad h = \frac{1}{N}. \quad (2.5)$$

Неявная разностная схема, соответствующая системе (2.4), (2.5), является однородной и консервативной [14].

Разностные схемы итерационно-интерполяционного метода в некоторых случаях совпадают с вариационно-разностными [15]. Так, для краевой задачи

$$-U'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad U(0) = U(1) = 0 \quad (2.6)$$

система вариационно-разностных уравнений имеет вид

$$-(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1})/h^2 = (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})/6, \quad U_0 = U_N = 0. \quad (2.7)$$

С другой стороны, система (2.7) есть разностная схема итерационно-интерполяционного метода первого приближения, если начальное приближение выбрано линейным. В [7] доказано, что (2.7) является схемой оптимальной аппроксимации.

Оптимальностью погрешности некоторых разностных схем итерационно-интерполяционного метода объясняется тот факт, что при расчете по таким схемам точность вычислений повышается [1, 2, 5].

Рассмотренные выше примеры показывают, что в простейших случаях итерационно-интерполяционный метод, по существу, совпадает с известными методами, например кубической сплайн-коллокации [6], однако возможность итерации и учета априорной информации о поведении искомого решения показывают, что этот метод является самостоятельным методом решения краевых задач.

§3. Применение итерационно-интерполяционного метода и метода расщепления для построения одной экономичной разностной схемы

В настоящее время при решении многомерных задач математической физики широко используются экономичные разностные схемы [14].

Такие схемы можно также конструировать, используя комбинацию итерационно-интерполяционного метода и один из принципов расщепления [8]. Получаемые при этом разностные схемы обладают отмеченными ранее в § 1, 2 свойствами.

Приведем в качестве примера один из вариантов построения такой схемы для расчета характеристик воспламенения и горения неоднородного безгазового состава, имеющего форму полубесконечного цилиндра [16].

Математически эта задача сводится к решению системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + (1 - \eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \gamma_1 (1 - \eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad 0 \leq x < x_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\pi_n}{\delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \pi_n \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \epsilon (1 - \eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \gamma_2 (1 - \eta) \exp \frac{\theta}{1 + \beta \theta}, \quad x_0 < x \leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\theta|_{t=0} = -\theta_N, \quad \eta|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \theta|_{z=0} = 0, \quad \theta|_{x=1} = -\theta_N, \quad (3.3)$$

$$\theta|_{z=\infty} = -\theta_N, \quad \theta|_{x=x_0-0} = \theta|_{x=x_0+0},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=x_0-0} = \pi_\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=x_0+0}. \quad (3.4)$$

Здесь x, z — цилиндрические координаты, $x = x_0 = \text{const}$ — граница раздела двух реагирующих сред, θ — температура, η — глущ-

бина превращения, θ_n , κ_λ , δ , β , γ_1 , γ_2 , b , ϵ - некоторые постоянные.

Двумерную нестационарную краевую задачу (3.1)-(3.4) представим в виде совокупности двух одномерных нестационарных задач

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t} &= w_k \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1-\sigma) f_k, \quad k=1,2; \quad w|_{t=0} = -\theta_n, \quad w|_{z=0} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=\infty} &= 0, \quad w|_{t=t_n} = v|_{t=t_n}, \end{aligned} \right\} (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\alpha_k}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \sigma f_k, \quad k=1,2; \quad v|_{x=1} = \theta_n, \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad v|_{t=t_{n+1/2}} = w|_{t=t_{n+1/2}}, \\ v|_{x=x_0-0} &= v|_{x=x_0+0}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=x_0-0} = \kappa_\lambda \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=x_0+0}, \end{aligned} \right\} (3.6)$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & \text{при } k=1, \\ \frac{\kappa_\lambda}{\delta} & \text{при } k=2, \end{cases} \quad w_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=1, \\ \kappa_\lambda & \text{при } k=2, \end{cases}$$

$$f_1 = (1-\eta) \exp \frac{\theta}{1+\beta\theta}, \quad f_2 = \epsilon(1-\eta) \exp \frac{b\theta}{1+\beta\theta},$$

$t_n = n\Delta\tau$, ($n = 0, 1, \dots, M$; $T = M\Delta\tau$), $\Delta\tau$ - шаг по времени.

В плоскости (x, z) введем в рассмотрение неравномерную разностную сетку

$$\omega = \{x_i = ih; 0 \leq i \leq I, z_{j+1} = z_j + l_j, \sum_{j=0}^{N-1} l_j = A\}.$$

Здесь $h = 1/I$ - шаг сетки по оси x , l_j - неравномерный шаг сетки по оси z (если $l_0 = l_1 = \dots = l_{N-1} = 1$, то $z_j = j1$,

$$A = 1(N-1), \quad t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta\tau}{2}, \quad A \gg 1).$$

Пусть

$$w(t_n, x_i, z_j) = w_{ij}, \quad w(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i, z_j) = \bar{w}_{ij},$$

$$v(t_{n+1}, x_i, z_j) = \hat{v}_{ij}, \quad v(t_{n+\frac{1}{2}}, x_i, z_j) = \bar{v}_{ij}.$$

Используя итерационно-интерполяционный метод для решения краевой задачи (3.5), получаем в первом приближении (индекс i для простоты опущен) систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} & l_j \frac{\bar{w}_{j+1} - w_{j+1}}{\Delta\tau} + 2(l_j + l_{j-1}) \frac{\bar{w}_j - w_j}{\Delta\tau} + l_{j-1} \frac{\bar{w}_{j-1} - w_{j-1}}{\Delta\tau} = \\ & = (1-\sigma) [l_j f_{kj+1} + 2(l_j + l_{j-1}) f_{kj} + l_{j-1} f_{kj-1}] + \\ & + 6w_k \frac{\bar{w}_{j+1} - \bar{w}_j}{l_j} - 6w_k \frac{\bar{w}_j - \bar{w}_{j-1}}{l_{j-1}}, \quad \bar{w}_0 = 0, \quad w_j = v_j, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{\bar{w}_{N-1} - w_{N-1}}{\Delta\tau} + 2 \frac{\bar{w}_N - w_N}{\Delta\tau} = (1-\sigma)(f_{kN-1} + 2f_{kN}) - 6w_k \frac{\bar{w}_N - \bar{w}_{N-1}}{l_{N-1}},$$

$$i = 0, 1, \dots, I-1; \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Соответственно для задачи (3.6) получим (индекс j для простоты опущен)

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\hat{v}_0 - \bar{v}_0}{\Delta\tau} + \frac{\hat{v}_1 - \bar{v}_1}{\Delta\tau} = \sigma(2f_{10} - f_{11}) + \frac{12}{h^2\delta} (\hat{v}_1 - \hat{v}_0), \\ & \varphi \frac{\hat{v}_{i+1} - \bar{v}_{i+1}}{\Delta\tau} + 2(1+\varphi) \frac{\hat{v}_i - \bar{v}_i}{\Delta\tau} + \frac{\hat{v}_{i-1} - \bar{v}_{i-1}}{\Delta\tau} = \\ & = \frac{6\alpha_k}{h^2} [\varphi \hat{v}_{i+1} - (1+\varphi) \hat{v}_i + \hat{v}_{i-1}] + \frac{3\alpha_k}{hx_1} [\varphi \hat{v}_{i+1} + (1-\varphi) \hat{v}_i - \hat{v}_{i-1}] + \\ & + \sigma[\varphi f_{ki+1} + 2(1+\varphi) f_{ki} + f_{ki-1}], \quad i = 1, 2, \dots, I-1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где при $x = x_0$: $\varphi = \kappa_\lambda / \kappa_\lambda$ и $\varphi = \kappa_\lambda$, при $x \neq x_0$: $\varphi = 1$, $\varphi = 1$; $\hat{v}_1 = -\theta_n$, $\bar{v}_1 = \bar{w}_1$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Для решения системы (3.7) и (3.8) использовался метод прогонки [10, 14], а глубина превращения η вычислялась по формуле

$$\hat{\eta}_{ij} = \frac{\eta_{ij} + \gamma_k \Delta\tau \exp(b_k \hat{\theta}_{ij} / (1 + \beta \hat{\theta}_{ij}))}{1 + \gamma_k \Delta\tau \exp(b_k \hat{\theta}_{ij} / (1 + \beta \hat{\theta}_{ij}))},$$

$$i = 0, 1, \dots, I; \quad j = 0, 1, \dots, N; \quad k = 1, 2; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = b.$$

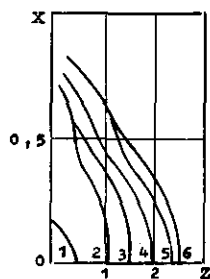


Рис. 1

Выписанная выше схема устойчива по начальным данным и правой части [14], а погрешность аппроксимации

$$\Psi_{II} = O(\Delta\tau, \bar{h}^2),$$

где $\bar{h} = \max(h, l_j)$, $j=0, \dots, N-1$.

В результате расчетов установлено, что если теплоотдача в боковую поверхность достаточно велика, то горение неоднородного безгазового состава прекращается. Положение фронта пламени в таком режиме показано на рис. 1 для $t = 30$ (15) 105 (кривые 1-6 соответственно), $\pi_\lambda = \pi_\mu = 1$, $x_0 = 0,3$; $\epsilon = 0,4$; $\beta = 0,177$; $\theta_F = 5$, $\gamma_1 = 0,2$; $\gamma_2 = 0,16$; $b = 1,1$; $\delta = 500$, $\Delta\tau = 0,01$; $l = 0,4$; $h = 0,05$.

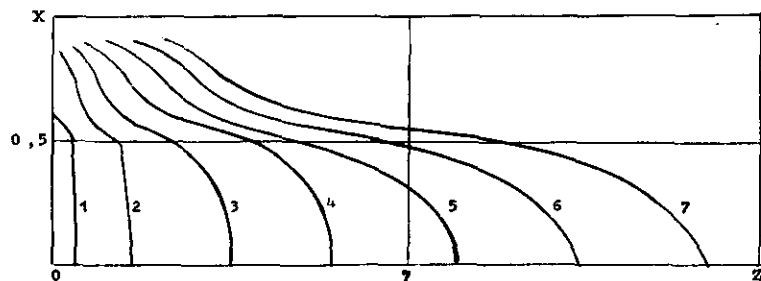


Рис. 2

Если δ достаточно велико, то с течением времени осевая скорость горения неоднородного безгазового состава стремится к определенному пределу, а искривление фронта пламени зависит от характеристик безгазовых составов. На рис. 2 показано положение фронта пламени для $t = 30$ (15) 120 (кривые 1-7 соответственно) при $\delta = 5000$, $x_0 = 0,5$, $\pi_\lambda = \pi_\mu = 1$, из которого следует, что по мере удаления фронта пламени от торца, влияние нагревателя ослабевает, а тепла, выделяемого химической реакцией, достаточно для формирования зоны прогрева при заданных условиях теплообмена.

На рис. 3 для $\delta = 5000$, $\pi_\lambda = \pi_\mu = 1$ приведены графики осевой скорости горения для $x_0 = 1$; 0,5; 0,1; и 0 (кривые 1-4 со-

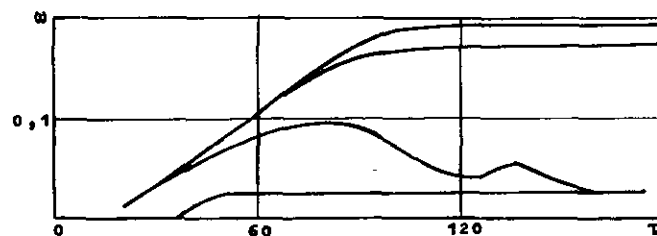


Рис. 3

ответственно), из которых следует, что с уменьшением x_0 осевая скорость горения уменьшается.

В заключение отметим, что метод расщепления по физическим процессам в сочетании с итерационно-интерполяционным методом целесообразно применять и для решения сложных нелинейных одномерных задач. Пример такого использования упомянутых выше методов дан в работе [17].

Л и т е р а т у р а

1. ГРИШИН А.М. Об одном видоизменении метода М.Е.Швеца. - "Инженерно-физический журнал". 1970, т.19, № 1, с.84-93.
2. ГРИШИН А.М. Об одном итерационно-интерполяционном методе. - В кн.: Труды Научно-исследовательского института прикладной математики и механики при Томском госуниверситете. Изд. ТГУ, 1973, с. 45-58.
3. БЕРЦУН В.Н., ГРИШИН А.М., ЗИНЧЕНКО В.И., СУББОТИН А.Н. Итерационно-интерполяционный метод решения некоторых нелинейных краевых задач. - В кн.: Тепло- и массоперенос, Минск, 1972, т.8, с.422-426.
4. ГРИШИН А.М., БЕРЦУН В.Н. Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов. - "ДАН СССР", 1974, т.214, №4, с.751-754.
5. GRISIN A.M., BERCUN V.N. The iteration-interpolation method and spline theory. - "Soviet Math. Dokl.", 1974, v.15, N 1.
6. ИЛЬИН И.А., ЛУКЬЯНОВ А.Т. Применение кубических сплайнов к решению второй краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом. - В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1976, т.7, № 1, с. 62-71.
7. БАБУШКА И., ВИТАСЕК Э., ПРАГЕР М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М., "Мир", 1969.
8. ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, "Наука", 1967.

9. АЛБЕРГ Дж., НИЛЬСОН Э., УОЛШ Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М., "Мир", 1972.

10. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование кубическими многозвенниками. -В кн.: Вычислительные системы. Вып. 38. Новосибирск, 1970, с. 23-73.

11. СТЕЧКИН С.Б., СУББОТИН Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике. М., "Наука", 1976.

12. ФАДЕЕВА В.Н. Метод прямых в применении к некоторым крайним задачам. -В кн.: Труды математического института им.Стеклова. АН СССР, 1949, № 28, с. 93-103.

13. БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений. М., 1959, т.2.

14. ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1972.

15. ПЕТРИК Т.Ф., ТАГАНОВ И.Н. Сравнительная характеристика различных сеточных методов решения параболического уравнения с разрывными данными. -В кн.: Математическое моделирование в науке и технике. Л., 1975, вып.2, ч.4, с. 28-33.

16. ГРИШИН А.М., БЕРЦУН В.Н. Горение с торца полубесконечного реагирующего цилиндра при наличии теплопотерь. -В кн.: Математическое моделирование аэротермохимических явлений. М., ВЦ АН СССР, 1974, с. 62-72.

17. ГРИШИН А.М., БЕРЦУН В.Н. Применение метода расщепления и итерационно-интерполяционного метода для расчета химически неравновесных нестационарных течений в пограничном слое. -В кн.: Труды 5 Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, Изд. ВЦ СО АН СССР, 1975, ч.1, с. 96-108.

Поступила в ред.-изд.отд.

1 октября 1976 года