МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1977 год Выпуск 72

УДК 518:517.944./947

СПЛАЙН-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

И.А.Ильин

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения вычислительных схем, основанных на дискретизации пространственных производных с помощью кубических сплайн-функций, для нелинейных уравнений параболического типа

$$U_t = f(t,x,U,U_{xx}) \ . \tag{1}$$

Таким схемы будем называть сплайн-разностными.

Поставим для уравнения (1) краевую задачу: найти решение уравнения (1) в области D: $\{x\in(a,b),\ t\in(0,T]\}$ удовлетворяющее начальному

$$U\big|_{t=0} = g(x) \tag{2}$$

и однородным граничным условиям

$$U\big|_{x=a} = U\big|_{x=b} = 0 \ . \tag{3}$$

На $[a,b]$ введем равномерную сетку Δ с шагом $h = \frac{b-a}{n}$ и рассмотрим кубический полусплайн $S(x,t)$, коэффициенты которого в каждый момент времени $t = k\tau$ удовлетворяют системе разностных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&a_i^k - a_i^{k-1} = \tau\theta f(t^k, x_i, a_i^k, M_i^k) + \tau(1-\theta) f(t^{k-1}, x_i, a_i^{k-1}, M_i^{k-1}) \ ,\\
&M_{i-1}^k + 4M_i^k + M_{i+1}^k = \frac{6}{h^2}(a_{i-1}^k - 2a_i^k + a_{i+1}^k), \quad i = 1,2,\dots,n,\\
&a_i^0 = g(x_i), \quad a_0^k = a_{n+1}^k = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

здесь $a_i^k = S(x_i, k\tau)$, $M_i^k = S_{xx}(x_i, k\tau)$.

Будем полагать, что функция $f(t,x,U,V)$ непрерывна по двум первым переменным, а по остальным удовлетворяет условию

$$l_0(U_1-U) \le f(t,x,U_1,V) - f(t,x,U,V) \le L_0(U_1-U),$$
$$l_2(V_1-V) \le f(t,x,U,V_1) - f(t,x,U,V) \le L_2(V_1-V) \qquad (5)$$

для $U_1 \ge U$, $V_1 \ge V$, при этом $l_2 \ge \delta^2 > 0$, $L_0 \le 0$.

Нетрудно видеть, что если $U(x,t) \in C^{4,2}\{[a,b] \times [0,T]\}$, то имеет место оценка

$$|U_t - S_t - f(t,x,U,U_{xx}) + f(t,x,a_i^k,M_i^k)|\Big|_{t=k\tau} = O(\tau + h^2)$$

равномерно по x на $[a,b]$.

ТЕОРЕМА I. Пусть решение краевой задачи (I)-(3) принадлежит классу $C^{4,2}\{[a,b]\cdot[0,T]\}$ и имеют место ограничения (5). Тогда при выполнении условия

$$\frac{12(1-\theta)L_2}{h^2} \le \frac{2}{\tau} + \frac{12\theta\, l_2}{h^2} + (1-\theta)l_0 - \theta L_0 \qquad (6)$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $A(\varepsilon)$, не зависящая от h, что

$$|U(x,k\tau) - S(x,k\tau)| \le A(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k O(\tau + h^2) \qquad (7)$$

равномерно по x на $[a,b]$.

Условие (6) гарантирует от "сильной" неустойчивости, и если $A(\tau) \le H$, то схема (4) устойчива в обычном смысле.

Для доказательства теоремы заметим, что величины

$$\rho_i^k = U(x_i,k\tau) - a_i^k, \quad R_i^k = U_{xx}(x_i,k\tau) - M_i^k$$

удовлетворяют системе линейных неравенств

$$\left.\begin{aligned}&\tau\theta[\bar A_i^k\rho_i^k + \bar B_i^k R_i^k] + \tau(1-\theta)[\bar A_i^{k-1}\rho_i^{k-1} + \bar B_i^{k-1}R_i^{k-1}] \le \rho_i^k - \rho_i^{k-1} \le \\ &\le \tau\theta[A_i^k\rho_i^k + B_i^k R_i^k] + \tau(1-\theta)\,[A_i^{k-1}\rho_i^{k-1} + B_i^{k-1}R_i^{k-1}],\ i=1,\dots,n\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где

$$A_i^j = \begin{cases} L_0, \rho_i^j > 0, \\ l_0, \rho_i^j \le 0, \end{cases} \qquad B_i^j = \begin{cases} L_2, \rho_i^j > 0, \\ l_0, \rho_i^j \le 0. \end{cases}$$

Справедлива

ЛЕММА. Пусть условие (7) выполнено, тогда система неравенств (8) совместна при любом k и многогранник ее решений M^k является ограниченным множеством, причем оператор R_h^k вычисления вершины многогранника M^k по вершинам многогранника M^0 удовлетворяет условию $\|R_h^k\| \le A(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k$, где ε и $A(\varepsilon)$ такие, как в теореме I.

Утверждение теоремы I немедленно вытекает из этой леммы.

ТЕОРЕМА 2. При выполнении условия $\tau\theta\left(|l_0| + \frac{12}{h^2}|L_0|\right) < 1$ метод простых итераций для системы (4) сходится.

Если решение исходной краевой задачи (I)-(3) имеет шесть непрерывных первых производных по x и две по t, то справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. а) Сплайн-разностная схема

$$\left.\begin{aligned}&a_i^k - a_i^{k-1} = \tau\theta f\left(t^k, x_i, a_i^k, \frac{1}{2}\left[M_i^k + \frac{a_{i-1}^k - 2a_i^k + a_{i+1}^k}{h^2}\right]\right) + \\ &\qquad + \tau(1-\theta) f\left(t^{k-1}, x_i, a_i^{k-1}, \frac{1}{2}\left[M_i^{k-1} + \frac{a_{i-1}^{k-1} - 2a_i^{k-1} + a_{i+1}^{k-1}}{h^2}\right]\right), \\ &M_{i-1}^k + 4M_i^k + M_{i+1}^k = \frac{6}{h^2}(a_{i-1}^k - 2a_i^k + a_{i+1}^k), \qquad i = 1,2,\dots,n, \\ &a_i^0 = g(x_i), \qquad a_0^k = a_{n+1}^k = 0\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

аппроксимирует исходную краевую задачу с погрешностью $O(\tau + h^4)$ (в случае $\theta = \frac{1}{2}$ с погрешностью $O(\tau^2 + h^4)$).

б) При выполнении условия

$$\frac{8(1-\theta)L_2}{h^2} \le \frac{2}{\tau} + \frac{8\theta l_2}{h^2} + (1-\theta)l_0 - \theta L_0$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует $A(\varepsilon)$, не зависящая от h, такая, что $|U(x,k\tau) - S(x,k\tau)| \le A(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k O(\tau + h^4)$ равномерно по x на $[a,b]$.

в) Если $\tau\theta\left(|l_0| + \frac{8}{h^2}|L_0|\right) < 1$, то метод простых итераций для схемы (9) сходится.

Аналогичные сплайн-разностные схемы можно строить для уравнений параболического типа четвертого порядка

$$U_t = f(t,x,U,U_{xx},U_{xxxx}) \qquad (10)$$

и уравнений более сложного вида. В этом направлении приведем две теоремы, в которых предполагаем

$$U(x,t) \in C^{8,2}\{[a,b]\times[0,T]\}.$$

ТЕОРЕМА 4. а) Сплайн-разностная схема

$$a_i^k - a_i^{k-1} = \tau\theta f\left(t^k, x_i, a_i^k, M_i^k, \frac{M_{i-1}^k - 2M_i^k + M_{i+1}^k}{h^2}\right) +$$

$$+\tau(1-\theta) f\left(t^{k-1}, x_i, a_i^{k-1}, M_i^{k-1}, \frac{M_{i-1}^k - 2M_i^k + M_{i+1}^k}{h^2}\right), \qquad (11)$$

$$M_{i-1}^k + 4M_i^k + M_{i+1}^k = \frac{6}{h^2}\left(a_{i-1}^k - 2a_i^k + a_{i+1}^k\right), \quad i = 1,2,\dots,n,$$

аппроксимирует уравнение (10) с погрешностью $O(\tau + h^2)$.

б) При выполнении условия

$$\frac{48(1-\theta)|l_4|}{h^4} \le \frac{2}{\tau} + \frac{48\theta|L_4|}{h^4} + \frac{12\theta l_2}{h^2} - \frac{12(1-\theta)L_2}{h^2} + (1-\theta)l_0 - \theta L_0,$$

где l_4 и L_4 – константы Липшица по переменной W для функции $f(t,x,U,V,W)$, при любом $\varepsilon>0$ существует такая $A(\varepsilon)$, не зависящая от h, что $|U(x,k\tau) - S(x,k\tau)| \le$ $\le A(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k O(\tau+h^2)$ равномерно по x на $[a,b]$.

в) Если

$$\tau\theta\left(|l_0| + \frac{12}{h^2}|L_2| + \frac{48|l_4|}{h^4}\right) < 1,$$

то метод простых итераций для схемы (11) сходится.

ТЕОРЕМА 5. а) Сплайн-разностная схема

$$a_i^k - a_i^{k-1} = \tau\theta f\left(t^k, x_i, a_i^k, \frac{1}{2}\left[M_i^k + \frac{a_{i-1}^k - 2a_i^k + a_{i+1}^k}{h^2}\right], \frac{M_{i-1}^k - 2M_i^k + M_{i+1}^k}{h^2}\right) +$$

$$+\tau(1-\theta) f\left(t^{k-1}, x_i, a_i^{k-1}, \frac{1}{2}\left[M_i^{k-1} + \frac{a_{i-1}^{k-1} - 2a_i^{k-1} + a_{i+1}^{k-1}}{h^2}\right], \frac{M_{i-1}^{k-1} - 2M_i^{k-1} + M_{i+1}^{k-1}}{h^2}\right), \qquad (12)$$

$$M_{i-1}^k + 4M_i^k + M_{i+1}^k = \frac{6}{h^2}\left(a_{i-1}^k - 2a_i^k + a_{i+1}^k\right)$$

аппроксимирует уравнение (10) с погрешностью $O(\tau + h^4)$.

б) При выполнении условия

$$\frac{48(1-\theta)|l_4|}{h^4} \le \frac{2}{\tau} + \frac{48\theta|L_4|}{h^4} + \frac{8\theta l_2}{h^2} - \frac{8(1-\theta)L_2}{h^2} + (1-\theta)l_0 - \theta L_0$$

имеет место оценка $|U(x,k\tau) - S(x,k\tau)| \le$ $\le A(\varepsilon)(1+\varepsilon)^k O(\tau+h^4)$ равномерно по x на $[a,b]$.

в) Если

$$\tau\theta\left(|l_0| + \frac{8|L_2|}{h^2} + \frac{48|l_4|}{h^4}\right) < 1,$$

то метод простых итераций для сплайн-разностной схемы (12) сходится.

Литература

1. Ильин И.А., Лукьянов А.Т. О построении сплайн-разностных схем. –В кн.: Материалы научной конференции молодых ученых Казахского гос. ун-та. Алма-Ата, 1974.

2. Ильин И.А., Ильин О.А., Лукьянов А.Т. Об одном методе решения уравнений параболического типа четвертого порядка. –В кн.: Сборник трудов по вопросам матем. и механики, вып. 7, Алма-Ата, 1975.

Поступила в ред.-изд.отд.
15 октября 1976 года