

ГРАФЫ МЕХМАШИННЫХ СВЯЗЕЙ ОДНОРОДНЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.В.Корнеев, О.Г.Монахов

§1. Постановка проблемы

1. Общеизвестным способом построения вычислительных средств является объединение совокупности вычислительных модулей посредством некоторой системы связи. В этом случае свойства образуемого вычислительного средства определяются объединяемыми модулями, используемой сетью связи и алгоритмами, обеспечивающими функциональную целостность указанного средства. Так, можно говорить о сети вычислительных машин, если алгоритмы, задающие функциональную целостность, обеспечивают передачу заданий по сети связи из вычислительной машины (терминала) в некоторую машину сети и прием результата вычислений. Другим способом организации функционирования вычислительной системы является параллельная обработка, когда задание реализуется одновременно на группе вычислительных машин, обменивающихся между собой необходимыми промежуточными результатами. Указанный режим функционирования характерен для однородных вычислительных систем [1], в которых в качестве модулей выступают однотипные универсальные вычислительные машины, называемые элементарными машинами (ЭМ) системы.

2. Основным свойством однородной вычислительной системы (ОВС) является возможность решения параллельной задачи [2] на любых k машинах из общего числа N ($N \geq k$) машин системы. Функционирование ОВС характеризуется одновременным решением нескольких задач, быть может, на пересекающихся подмножествах элементарных машин. Это предполагает возможность реализации сетью связи произвольных межмашинных обменов, возникающих в непредсказуемые моменты времени. Такие обмены будем называть коммутациями [3]. Мно-

жество машин, входящих в коммутацию, делится на передающие, транзитные и принимающие. Последние в процессе реализации коммутации получают одни и те же данные.

Выбор графа межмашинных связей (макроструктуры ОВС) определяется конструктивными ограничениями, степенью сложности и эффективности алгоритма реализации межмашинных взаимодействий, структурной живучестью, структурной коммутируемостью, максимальной и средней задержками при транзитных передачах информации [4].

Типичными конструктивными ограничениями, обусловленными технико-экономическими показателями элементной базы, на которой реализуется сеть связи и ее коммутационные устройства, являются максимально возможное число каналов связи у одной ЭМ (число направлений коммутатора), общее число каналов связи в ОВС, пропускная способность каналов связи. Сюда же тесно примыкают ограничения, обусловленные спецификой реализации конкретной системы, например, необходимость учета того, что граф межмашинных связей должен содержать заранее определенные фрагменты.

Коммутаторы сети связи ОВС задают посредством соединительных функций разбиение системы на подмножества взаимодействующих машин. Соединительная функция $f(i), i \in \overline{1, m}$, определяет отображение входного полюса i на множество выходных полюсов $\{i_1, \dots, i_k\}$ ($k < m, i \neq i_j, j = \overline{1, k}$), принимающих данные с полюса i и передающих их по направлениям $i_1, \dots, i_k$. В каждый момент времени $f(i) \cap f(j) = \emptyset$ для $i \neq j$, т.е. выходной полюс коммутатора может получать данные только от одного входного полюса. Указанное ограничение является минимальным, возможны и более жесткие, как, например, допустимость задания соединительной функции лишь для одного из входных полюсов. В этом случае прием данных с других направлений возможен лишь после того, как будут приняты данные с направления, для которого определена соединительная функция.

В условиях непредсказуемости подмножеств взаимодействующих машин и существования транзитных передач необходимо иметь аппарат, позволяющий определять соединительные функции в динамике вычислительного процесса. Анализ алгоритмов реализации межмашинных взаимодействий [3,5] говорит о том, что в смысле простоты расчета коммутаций некоторое предпочтение отдается макроструктурам ОВС типа решеток и линейных. Однако эти преимущества не настолько велики перед алгоритмами, инвариантными к макроструктуре ОВС, чтобы быть определяющим фактором при выборе последней. Исключением может быть

случай, когда структурой, под которую выбирается алгоритм, является остов n -мерного куба [6, 7]. Алгоритмы реализации межмашинных взаимодействий, инвариантные к макроструктуре ОВС, могут быть сделаны достаточно эффективными за счет выделения в них статической и динамической частей. В качестве первой используется алгоритм задания некоторой канонической системы адресации на выделенном подмножестве ЭМ. Этот алгоритм может быть достаточно сложен, так как он реализуется лишь один раз в процессе распределения задачи по элементарным машинам. Созданная на первом этапе каноническая адресация обеспечивает простоту и эффективность расчета коммутаций в динамике вычислительного процесса.

Структурной живучестью и структурной коммутируемостью оцениваются соответственно вероятность образования на макроструктуре ОВС связанной подсистемы заданного ранга при заданных показателях надежности коммутаторов и линий связи и вероятность одновременной реализуемости определенного набора коммутаций.

Диаметр и средний диаметр задают максимально необходимое и среднее расстояния между парами вершин графа межмашинных связей. Структурная живучесть и структурная коммутируемость максимизируются при минимизации диаметра и среднего диаметра макроструктуры ОВС (см. [4]).

Таким образом, задача выбора оптимальной структуры ОВС ставится следующим образом: в классе графов, выделенных по некоторому структурному признаку и имеющих заданное число вершин и ребер, найти граф с минимальными диаметром и средним диаметром.

§2. Оптимальные макроструктуры ОВС

1. Для однородных вычислительных систем структурными признаками, выделяющими класс графов, среди которых ищется оптимальный, являются однородность, заданные степень вершины и величина охвата [8]. Выбор этих признаков для классификации графов диктуется максимальным использованием возможностей, заложенных в коммутаторы элементарных машин, а также соображениями наращивания числа машин в системе без коренной ломки уже имеющихся межмашинных соединений. Итак, рассмотрим однородный граф $G(A, E)$ степени $v > 2$, где A — множество вершин, E — множество ребер, $n = |A|$. Выделим любую вершину $a_0 \in A$. Обозначим через A_i — множество вершин, находящихся на расстоянии i от вершины a_0 . Будем называть множество A_i i -м ярусом; $A = \cup_{i=1}^n A_i$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $n_1 = |A_1|$. Для того чтобы граф G

имел минимальный диаметр d и средний диаметр $d_{\text{ср}}$, необходимо, чтобы число вершин, расположенных на каждом ярусе, было максимальным при заданных v и n . Для однородных графов со степенью вершины v максимальным возможным числом вершин на ярусе i является следующее: $n_i = v(v-1)^{i-1}$. В этом случае вершина $a_i \in A_i$ соединена с одной вершиной на ярусе $i-1$ и с $(v-1)$ -й вершиной на ярусе $i+1$, где $i = 1, d-1$. Таким образом, соединения между вершинами, расположенными на одном ярусе, возможны только на ярусе d , следовательно, данные графы имеют нечетный обхват $g = 2d+1$ и число вершин:

$$n = \sum_{i=0}^d n_i = 1 + v \cdot \sum_{i=1}^d (v-1)^{i-1} = \frac{v(v-1)^d - 2}{v-2}.$$

Такие графы известны под названием графов Мура. В работе [9] методом, использующим характеристические числа и векторы матрицы смежности графа, было доказано существование графов Мура при $d = 2$ только для степеней $v = 3, 7$ и, возможно, для $v = 57$ с числом вершин $n = 10, 50$ и 3250 соответственно и ни для каких других степеней. При $d = 3$ данные графы существуют только для $v = 2$.

В работе [10] подсчетом числа простых циклов графа Мура длины $(2d+1)$ и $(2d+2)$ было показано, что при $3 < d \leq 300$ графы Мура степени $v = 3, 4, 5, 6, 8$ не существуют, кроме, может быть, графа с $v = 5$ и $d = 7$. Не существуют также графы Мура при $v = 3$ и $3 \leq d < \infty$, если число $(2d+1)$ простое.

В работе [11] анализируется существование однородных графов степени $v > 2$, диаметра d , имеющих максимальный четный обхват $g = 2d$ и число вершин $n = \frac{2(v-1)^d - 2}{v-2}$. Данные графы называются гра-

фами Синглтона и отличаются от графов Мура тем, что вершины, расположенные на ярусе d , соединяются только с вершинами яруса $d-1$ и не имеют соединений между собой. Графы Синглтона имеют минимальные диаметр и средний диаметр при данных n и минимальное число вершин при данном обхвате $g = 2d$. Доказано, что при диаметрах, отличных от $d = 2, 3, 4$ и 6 , графы Синглтона не существуют. При $d = 2$ существует единственный граф для каждой степени v . Для диаметров $d = 3$ и 4 графы Синглтона степени v существуют, если и только если существуют конечные проективные геометрии размерности 2 и 3 соответственно с v точками на прямой.

В работе [12] находятся необходимые условия существования однородных графов степени v , диаметра d , имеющих максимальный четный обхват $g = 2d$ и $t > 1$ различных путей длины d между любой па-

рой вершин, лежащих на расстоянии d одна от другой. Очевидно, что графы Синглтона являются частным случаем данных графов при $t = v$.

Оценка минимального числа вершин $n(v, g)$ для однородных графов степени $v > 2$ и заданного обхвата g приведена в работе [18]:

$$\frac{v(v-1)^d - 2}{v-2} \leq n(v, 2k+1) \leq 4 \left\{ \frac{(v-1)^{2k} - 1}{v-2} \right\},$$

$$\frac{2(v-1)^d - 2}{v-2} \leq n(v, 2k) \leq 8 \left\{ \frac{(v-1)^{2k-2} - 1}{v-2} \right\}, k = 1, 2, \dots$$

С нижней границей этих оценок совпадают графы Мура и Синглтона соответственно для нечетного и четного обхвата.

В работах [13] и [14] путем подсчета простых циклов длины 5 показано соответственно, что $n(4, 5) = 19$ и $n(5, 5) = 30$. Данные графы имеют минимальный диаметр и средний диаметр для заданных v и n и обхват $g = 2d-1$.

В работе [15] вводится определение обобщенного графа Мура: $M(n, v)$ — это однородный граф степени v с числом вершин n и диаметром d , отличающийся от графа Мура тем, что на ярусе d у него расположено не максимально возможное число вершин $v(v-1)^{d-1}$, а $n_d = n - \frac{v(v-1)^{d-1} - 2}{v-2}$. Данные графы имеют минимальные диаметр и

средний диаметр и обхват $g \geq 2d-1$.

В рассматриваемой статье также приводится построение всех графов $M(n, 3)$ для $4 \leq n \leq 24$ методом ручного перебора возможных вариантов. Все вышеприведенные графы являются частным случаем обобщенных графов Мура.

2. Графы, рассмотренные в предыдущем разделе, характеризуются тем, что имеют максимально возможный обхват и минимальные диаметр и средний диаметр. В то же время эти графы существуют лишь для некоторых значений числа вершин и ребер. Поэтому введем класс $A(n, v, g)$ однородных графов, имеющих порядок n , степени вершин v и обхват $\leq g$. Графы, принадлежащие к классу $A(n, v, g)$, образуются путем выделения из бесконечного планарного графа $L(v, g)$ подграфа, составляющего первые $(k-1)$ ярусов и часть k -го яруса $\sum_{i=0}^{k-1} |A_i| \leq n \leq \sum_{i=0}^k |A_i|$, где A_i — множество вершин яруса i графа $L(v, g)$.

Для получения графа $A(n, v, g)$ ребра $L(v, g)$, инцидентные вершинам выделенного подграфа, но не вошедшие в него, отождествляют-

ся друг с другом таким образом, чтобы каждая вершина входила в v простых циклов по возможности близкой к g величины. Графы $A(n, v, g)$, все минимальные циклы которых равны g , назовем совершенными $A(n, v, g)$ графами.

Алгоритм построения $L(v, g)$ восходит к работам [16, 17] и состоит в следующем. В центре бесконечного семейства концентрических окружностей помещаем единственную вершину $a_0 \in A_0$, образующую нулевой ярус $L(v, g)$. На первой от центра концентрической окружности располагаем v вершин, смежных a_0 и составляющих первый ярус $L(v, g)$. Каждый следующий ярус образуется из вершин, полученных как пересечения соответствующей ему окружности со свободными ребрами вершин предыдущего яруса. При этом соблюдаются два правила. Первое: если две расположенные рядом вершины одного яруса могут быть соединены ребром с образованием простого цикла длины g , то такое ребро входит в $L(v, g)$. И второе: если две рядом лежащие вер-

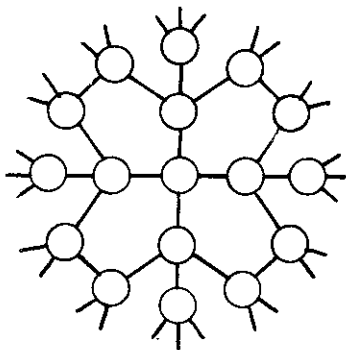


Рис. I

шины вновь образованного яруса могут быть слиты в одну с образованием простого цикла длины g , то они образуют одну вершину графа $L(v, g)$. Фрагмент $L(4, 5)$ приведен на рис. I. Очевидно, что на всех ярусах графа $A(n, v, g)$ до яруса $\left[\frac{g}{2}\right]$, где $[x]$ - целая часть числа x , число вершин равно максимально возможному для данного значения v . Соответствующий выбор величины обхвата g позволяет получить все графы, описанные в разделе I §2.

Введение класса $A(n, v, g)$ структур ОВС позволяет уточнить постановку задачи выбора оптимальной структуры, а именно: если мы не хотим коренной ломки уже существующих связей в ОВС со структурой $A(n_0, v_0, g_0)$, то при изменении числа машин в ОВС ее структурой должен стать граф $A(n_1, v_1, g_1)$, где $n_1 \neq n_0$, $v_1 = v_0$ и $g_1 = g_0$.

Если ОВС вновь проектируется, то желательно иметь оптимальную для заданных числа машин и связей структуру. В этом случае в качестве последней выбирается граф $A(n, v, g)$ с максимально возможным

для данных n и v обхватом g . Заметим, что граф $\Lambda(2^v, v, 4)$ является остовом v -мерного куба.

Рассмотрим некоторые свойства графов $\Lambda(n, v, g)$.

Пусть граф $L(v, g)$ имеет степень $v > 3$ и обхват $g > 3$. Имеет место

ЛЕММА 1. Если вершина $a \in A_k$, $k > 0$, то a смежна либо

1) с одной вершиной на ярусе $k-1$ и с $(v-1)$ -й вершиной на ярусе $k+1$;
либо

2) с двумя вершинами на ярусе $k-1$ и с $v-2$ вершинами на ярусе $k+1$;
либо, если g нечетное,

3) с одной вершиной на ярусе $k-1$, с одной вершиной на ярусе k и с $v-2$ вершинами на ярусе $k+1$.

Данная лемма является обобщением леммы 5, доказанной в работе [17] для графа $L(v, g)$ с $v = 5$ и $g = 5$.

Пусть граф $L(v, g)$ имеет степень $v = 3$. Тогда имеет место

ЛЕММА 2. Лемма 1 справедлива для данного графа, если его обхват $g \geq 6$.

Обозначим число вершин, имеющих каждый из вышеприведенных видов связи, в порядке их перечисления в лемме 1, и расположенных на ярусе k ($k > 0$) соответственно: x_k, z_k, y_k .

СЛЕДСТВИЕ. Для графа $L(v, g)$ степени $v > 3$ и с обхватом $g > 3$ число вершин d_k , расположенных на ярусе k ($k > 0$) данного графа, определяется по следующим формулам:

$$d_k = x_k + y_k + z_k \quad \text{при } g \text{ нечетном,}$$

$$d_k = x_k + z_k \quad \text{при } g \text{ четном.}$$

Установим теперь распределение величин x_k, y_k и z_k в зависимости от номера яруса k .

ТЕОРЕМА 1. Для графа $L(v, g)$ степени $v > 3$ нечетным обхватом $g = 2m + 1$, где $m \geq 2$ — натуральное число, распределение величин x_k, y_k и z_k в зависимости от номера яруса k определяется по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{array}{llll}
x_0 = 0, & y_0 = 0, & z_0 = 0 & \text{при } k=0; \\
x_1 = v, & y_1 = 0, & z_1 = 0 & \text{при } k=1; \\
x_k = x_{k-1}(v-1), & y_k = 0, & z_k = 0 & \text{при } 1 < k \leq m-1; \\
x_k = x_{k-1}(v-1) - 2v, & y_k = 2v, & z_k = 0 & \text{при } k = m; \\
x_k = x_{k-1}(v-1) + (y_{k-1} + z_{k-1})(v-2) - 2z_k - y_k & & & \text{при } k \geq m+1; \\
y_k = 2x_{k-m}(v-2) + 2(v-3)(y_{k-m} + z_{k-m}) & & & \text{при } k \geq m+1; \\
z_k = 0, 5y_{k-m} & & & \text{при } k \geq m+1.
\end{array}$$

ТЕОРЕМА 2. Для графа $L(v, g)$ степени $v > 3$ с четным обхватом $g = 2m$, где $m \geq 2$ - натуральное число, распределение величин x_k и z_k в зависимости от номера яруса k определяется по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0, z_0 = 0, & k = 0; \\
x_1 = v, z_1 = 0, & k = 1; \\
x_k = x_{k-1}(v-1), z_k = 0, & 1 < k \leq m-1; \\
x_k = x_{k-1}(v-1) - 2v, z_k = v, & k = m; \\
x_k = x_{k-1}(v-1) + z_{k-1}(v-2) - 2z_k, & k \geq m+1; \\
z_k = x_{k-m}(v-2) + z_{k-m}(v-3), & k \geq m+1.
\end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теорем 1 и 2 непосредственно вытекает из алгоритма построения $L(v, g)$.

ТЕОРЕМА 3. Для графа $L(v, g)$ степени $v = 3$ и с обхватом $g \geq 6$ справедлива теорема 1, если g нечетное, и теорема 2, если g четное.

3. Рассмотрим необходимые условия существования одного подкласса совершенных $\Lambda(n, v, g)$ графов. Выделим подкласс графов $\Gamma(n, v, g)$ со следующими параметрами: степень вершин $v > 2$, четный обхват $g = 2d$ и число вершин:

$$n = 1 + \sum_{i=1}^d (x_i + z_i) = \frac{v(v-1)^d - 2}{v-2} - v,$$

где d - диаметр графа Γ , x_i - число вершин первого типа на ярусе i , z_i - число вершин второго типа на ярусе i (см. лемму 1), $1 \leq i \leq g/2$. Граф $\Gamma(n, v, g)$ образован на подграфе графа $L(v, g)$, который включает все множество вершин, расположенных на первых $g/2$ ярусах графа $L(v, g)$.

Пусть C_t - число простых циклов длины t , проходящих через каждую вершину графа $\Gamma(n, v, g)$, тогда

$$A_t(g, v) = \frac{C_t \cdot n}{t}, \quad (I)$$

где $A_t(g, v)$ - общее число различных простых циклов длины t , имеющих в графе $\Gamma(n, v, g)$. Если хотя бы для одного $t \geq g$ число $A_t(g, v)$ не является целым, то можно утверждать, что граф $\Gamma(n, v, g)$ не существует. Отсюда следует, что необходимым условием существования графа $\Gamma(n, v, g)$ является целочисленность выражения (I) для $t \geq g$.

Найдем выражения для определения числа простых циклов длины g , $g+1$ и $g+2$, проходящих через каждую вершину графа $\Gamma(n, v, g)$.

ТЕОРЕМА 4. Число различных простых циклов длины g , проходящих через каждую вершину графа $\Gamma(n, v, g)$, есть $C_g = Z_d = v$.

Данная теорема непосредственно следует из леммы I и теоремы 2.

Пусть T - множество ребер, которые соединяют вершины яруса d в графе $\Gamma(n, v, g)$ между собой; a - число ребер, соединяющих между собой вершины второго типа на ярусе d ; c - число ребер, соединяющих между собой вершины первого типа на ярусе d ; b - число ребер, соединяющих между собой вершины первого и второго типов на ярусе d , $a + b + c = |T|$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 5. Число различных простых циклов длины $g+1$, проходящих через каждую вершину графа $\Gamma(n, v, g)$, есть $C_{g+1} = 4a + 2b + c$, где a, b, c удовлетворяют системе диофантовых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= \frac{z_d(v-2) + x_d(v-1)}{2}, \\ 2a + b &= z_d(v-2), \\ 2c + b &= x_d(v-1). \end{aligned} \right\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим любую вершину r . Ясно, что каждый простой цикл длины $g+1$, проходящий через вершину r , содержит по крайней мере одно ребро из множества T , так как иначе обхват графа был бы нечетным и меньше g , и не более одного ребра из T , так как любой цикл, соединяющий вершину r с вершинами яруса d , содер-

жит не меньше $g=2d$ ребер. Следовательно, каждый простой цикл длины $g+1$, проходящий через вершину r , содержит точно одно ребро из T . Так как каждая вершина первого типа на ярусе d соединена с одной вершиной на ярусе $d-1$, то ребро из T , соединяющее две вершины первого типа на ярусе d , образует точно один простой цикл длины $g+1$, проходящий через вершину r .

Каждое ребро из T , соединяющее две вершины второго типа на ярусе d , образует точно четыре простых цикла длины $g+1$, проходящих через вершину r , так как каждая вершина второго типа яруса d соединена с двумя вершинами яруса $d-1$, а каждое ребро из T , соединяющее вершину первого и второго типов, образует точно два простых цикла длины $g+1$, проходящих через вершину r , следовательно:

$$C_{g+1} = 4a + 2b + c,$$

$$a + b + c = \frac{z_d(v-2) + x_d(v-1)}{2},$$

где $z_d(v-2)$ - число связей вершин второго типа на ярусе d между собой и вершинами первого типа, следовательно, $2a + b = z_d(v-2)$; $x_d(v-1)$ - число связей вершин первого типа на ярусе d между собой и вершинами второго типа, отсюда $2c + b = x_d(v-1)$.

Теорема доказана.

Пусть e - число пар смежных ребер из множества T , соединяющих две вершины второго типа, h - число пар смежных ребер из T , соединяющих две вершины первого типа, f - число пар смежных ребер из T , соединяющих вершины первого и второго типов.

ТЕОРЕМА 6. Число различных простых циклов длины $g+2$, проходящих через каждую вершину графа $\Gamma(n, v, g)$, есть

$$C_{g+2} = 4e + 2f + h \text{ при } g > 4,$$

$$C_{g+2} = 4e + 2f + h + v \text{ при } g = 4,$$

где e, f, h удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} e+f+h = C_{v-2}^2 z_d + C_{v-1}^2 x_d, \\ 2e+f = 2a(v-3)+b(v-2), \\ 2h+f = 2c(v-2)+b(v-3). \end{cases}$$

Величины a, b, c определены в теореме 5.

Рассуждение такое же, как и при доказательстве теоремы 5. Каждый простой цикл длины $g+2$, проходящий через выбранную вершину r , должен содержать две простые непересекающиеся цепи длины g от вершины r до вершины на ярусе d и еще два дополнительных ребра. При $g > 4$ эти ребра должны принадлежать множеству T и должны быть смежными, так как простой цикл — это связный подграф степени два. При $g = 4$ существуют еще ровно v пар смежных ребер, не принадлежащих T , которые образуют v простых циклов длины $g + 2$, проходящих через вершину r . Каждая пара смежных ребер из T , соединяющая две вершины первого типа, образует точно один простой цикл длины $g + 2$, проходящий через вершину r . Каждая пара смежных ребер из T , соединяющая две вершины второго типа, образует точно четыре простых цикла длины $g+2$, а каждая пара смежных ребер из T , соединяющая вершины первого и второго типов, образует точно два простых цикла длины $g+2$, проходящих через вершину r , следовательно:

$$C_{g+2} = 4e + 2f + h \quad \text{при} \quad g > 4,$$

$$C_{g+2} = 4e + 2f + h + v \quad \text{при} \quad g = 4.$$

Общее число пар смежных ребер из T можно получить из суммы произведения числа вершин первого типа (x_d) на ярусе d на число способов выбора пары ребер из $v-1$ ребер, инцидентных каждой вершине первого типа, и произведения числа вершин второго типа на ярусе $d(z_d)$ на число способов выбора пары ребер из $v-2$ ребер, инцидентных каждой вершине второго типа, т.е. $e+f+h = C_{v-2}^2 z_d + C_{v-1}^2 x_d$. Число связей вершин второго типа с вершинами первого и второго типов через простую цепь длины два, состоящую из ребер, принадлежащих T , равно сумме удвоенного произведения числа ребер, соединяющих вершины второго типа между собой, на число ребер, инцидентных вершине второго типа без единицы, и произведения числа ребер, соединяющих вершины первого и второго типов на число ребер, инцидентных вершине первого типа без единицы, т.е. $2e+f = 2a(v-3) + b(v-2)$.

Аналогично получается и второе соотношение $2h + f = 2c(v-2) + b(v-3)$.

Теорема 6 доказана.

В общем случае получить хотя бы необходимое условие существования $\Lambda(n, v, g)$ графов пока не удалось. Однако разработана программа построения этих графов, с помощью которой синтезированы $\Lambda(n, 4, 5)$ -графы для значений $n = 19-45$, $\Lambda(n, 4, 4)$ -графы для значе-

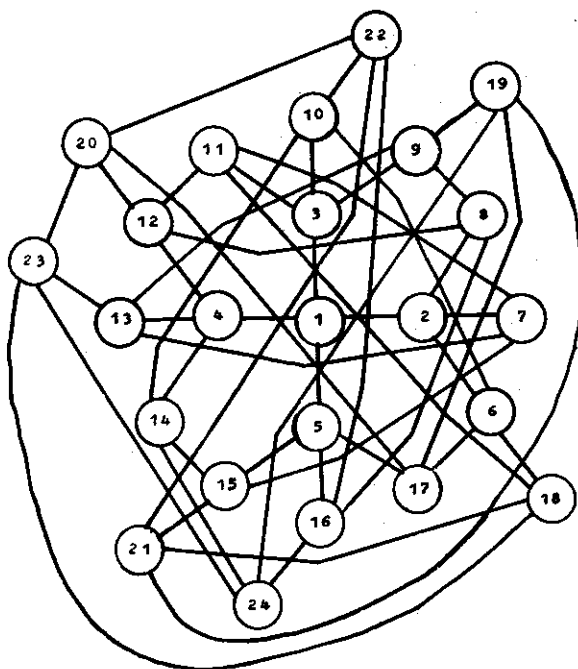


Рис. 2

ний $n = 5-125$, а также $\Lambda(26,4,6)$, $\Lambda(24,6,4)$ и $\Lambda(23,6,4)$. На рис.2 показан $\Lambda(24,4,5)$.

4. Построение графа $\Lambda(n,v,g)$ состоит из двух этапов: построения подграфа графа $L(v,g)$ с числом вершин n и построения графа $\Lambda(n,v,g)$.

Второй из этих этапов представляется алгоритмом сокращенного перебора, находящим требуемый граф $\Lambda(n,v,g)$, если такой существует при заданных n,v,g и выбранном исходном подграфе графа $L(v,g)$.

Итак, пусть мы имеем исходный подграф графа $L(v,g)$, тогда для получения графа $\Lambda(n,v,g)$ необходимы следующие шаги.

I. Определить X - множество вершин со свободными связями, т.е. множество вершин, степень которых меньше заданной v .

2. Если $x = \emptyset$, то перейти на II, иначе выполнять упорядоченный по номерам выбор вершины $x \in X$ и запоминание номера предыдущей выбранной вершины N_x (в начале $N_x = 0$).

3. Определить число свободных связей вершины x : $b_x := v - v_x$, $j := b_x$.

4. Определить множество вершин, находящихся от вершины x на расстоянии $l \geq g-1$ и имеющих свободные связи Y_{xj} .

5. Если $Y_{xj} = \emptyset$, то перейти на 7, иначе выполнять упорядоченный по номерам выбор вершины $y \in Y_{xj}$ и соединение вершин x и y ребром $\{x, y\}$, $Y_{xj} := Y_{xj} / y$.

6. $j := j-1$, если $j \neq 0$, то переход на 4, иначе $X := X/x$ и перейти на 2.

7. Если $N_x = 0$, то перейти на IO, иначе $x := N_x$, $j := 1$.

8. Если $Y_{xj} = \emptyset$, то перейти на 9, иначе выполнять удаление j -й связи вершины x , упорядоченный по номерам выбор вершины $y \in Y_{xj}$ и соединение вершин x и y ребром $\{x, y\}$, $Y_{xj} := Y_{xj} / y$, затем перейти на 6.

9. $j := j+1$, если $j \leq b_x$, то переход на 8, иначе $X := X \cup x$, перейти на 7.

IO. Граф $\Lambda(n, v, g)$ с заданными параметрами не существует.

II. Конец.

Заключение

Выбор графа межмашинных связей вычислительной системы в условиях невозможности установления непосредственной связи каждой машины со всеми остальными представляет серьезную проблему, решение которой во многом определяет эффективность системы. В данной работе в качестве критерия оптимальности графа межмашинных связей выбраны минимальность его диаметра и среднего диаметра, представляющих максимально необходимое и среднее расстояние между парами вершин. Введение в качестве параметра в предложенном семействе $\Lambda(n, v, g)$ - графов величины обхвата g позволяет определять квазиоптимальные структуры ОВС, допускающие изменение числа машин в системе без коренной ломки имеющихся межмашинных соединений.

Класс $\Lambda(n, v, g)$ -графов включает, при соответствующем выборе значений n, v и g , все известные графы, предлагаемые ранее в качестве макроструктур ОВС. Так, $\Lambda(n, v, 4)$ -графы являются КАИС-структурами [4], $\Lambda(2^v, v, 4)$ -графы - остовы v -мерных двоичных кубов, в $\Lambda(n, n-1, 3)$ - полные графы с n вершинами.

ЗАМЕЧАНИЕ. При выборе конечного подграфа $L(v, g)$ вершины, принадлежащие последнему ярусу, выбираются методом перебора.

Л и т е р а т у р а

1. ЕВРЕЙНОВ Э.В., ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Однородные вычислительные системы. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 58. Вычислительные системы и проблемы обработки информации. Новосибирск, 1974, с.32-61.
2. ЕВРЕЙНОВ Э.В., КОСАРЕВ Ю.Г. Однородные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, "Наука", 1966.
3. КОРНЕЕВ В.В. Анализ сетей передачи данных однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.63. Теория однородных вычислительных систем. Новосибирск, 1975, с.86-102.
4. КОРНЕЕВ В.В. О макроструктуре однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.60. Вопросы теории и построения вычислительных систем. Новосибирск, 1974, с.17-34.
5. ШУМ Л.С. О функциональной организации однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 39. Новосибирск, 1970, с.81-89.
6. РЕШЕТНЯК Ю.Г. О задаче соединения элементов вычислительной системы. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 3. Новосибирск, 1962, с. 17-30.
7. КРАТКО М.И. Информационные графы. - "Сиб.мат.журн.", 1970, т.II, № 5, с.1093-1097.
8. ХАРАРИ Ф. Теория графов. М., "Мир", 1973.
9. HOFFMAN A.J., SINGLETON R.R. On Moore graphs with diameters 2 and 3. - "IBM J.Res.Develop.", 1960, v.4, N 5, p.497-504.
10. FRIEDMAN H.D. On the impossibility of certain Moore graphs. - "J. Combinatorial Theory", 1971, v.10, N 3, p.245-251.
11. SINGLETON R.R. On minimal graph of maximum even girth. - "J. Combinatorial Theory", 1966, v.1, N 3, p.306-332.
12. GEWIRTZ A. Graphs with maximal even girth. - "Canad.J.Math", 1969, v.21, N 4, p.915-935.
13. WEGNER G. A smallest graph of girth 5 and valency 5. - "J. Combinatorial Theory", 1973, v.14, N 3, p.203-208.
14. ROBERTSON N. The smallest graph of girth 5 and valency 4. - "Bull.Amer.Math.Soc.", 1964, v.70, p.824-825.
15. CERF V.G., COWAN D.D., MULLIN R.C., STANTON R.G. A partial census of trivalent generalized Moore networks. Lecture Notes in Mathematics N 452. Combinatorial Math.III. New York, 1975, p.1-27.
16. ТРУФАНОВ С.В. Некоторые задачи о расстояниях на графе. - "Изв. АН СССР. Серия техн. кибернетика", 1967, № 3, с.61-66.
17. WAGNER E.G. On connecting modules together uniformly in form a modular computer. - "IEEE Trans.electronic computers", 1966, v.EC-15, N 6, p.864-872.
18. SACHS H. On regular graphs with given girth. - In: Theory of graphs and its applications. Prague, 1968, p.91-97.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 января 1978 года