

УДК 681.32.001.4

САМОДИАГНОСТИКА СИСТЕМ ИЗ ОДНОТИПНЫХ БЛОКОВ

Ю.К.Дмитриев

В [1] исследуется проблема автоматической диагностики (самодиагностики) системы с множественными неисправностями. Система состоит из однотипных блоков, каждый из которых представляет собой неделимую, с точки зрения диагностики, единицу. Блоки системы предполагаются достаточно сложными для того, чтобы выполнять друг над другом диагностические процедуры и оценивать их результаты.

Самодиагностика выполняется в два этапа: 1) проверяются состояния блоков системы с целью выделения исправных блоков, образующих ядро системы; 2) определяются с помощью блоков диагностического ядра действительно неисправные блоки. Указанные процедуры выполняются без замены выявляемых неисправных блоков на исправные.

В работе [1] рассматривается первый этап - формирование диагностического ядра системы - для класса структур, в котором все блоки имеют одинаковое число связей для диагностики, а сами эти связи являются регулярными. Требование регулярности связей для диагностики определяется соображениями технологической и функциональной однородности системы. Подробно изучены одношагово t -диагностируемые системы, т.е. такие, в которых без замены неисправных блоков можно выявить все t неисправных. Для таких систем получены необходимые и достаточные условия диагностируемости, связывающие общее число N блоков в системе и максимально допустимое число t неисправных блоков. Предложены системы, являющиеся оптимальными в смысле отношения между N и t . Определена макроструктура оптимальных одношагово t -диагностируемых систем, т.е. характер связей между их блоками.

Некоторые вопросы, касающиеся способов задания макроструктуры систем из однотипных блоков и свойств таких систем, рассматри-

ваются в [2]. Предлагаемые в [2] структуры названы КАИС-структурами. В данной работе изучена связь между оптимальными одношагово t -диагностируемыми структурами и КАИС-структурами.

Одношагово t -диагностируемые системы, исследованные в [1], накладывают сильные ограничения на число m диагностирующих связей каждого блока с соседними ($m \geq t$), что существенно влияет на возможность их практического использования. В данной работе исследуется возможность диагностики КАИС-структур, удовлетворяющих условию $t > m > 1$.

§1. Модель системы и определения

В данном разделе будут даны в удобной для нас форме некоторые определения и результаты [1], важные для понимания наших результатов, и проблемы самодиагностики систем в целом.

Пусть S — система с самодиагностикой, содержащая N однотипных блоков. Блок u_i ($i=0, (N-1)$) имеет m_i связей с соседними. В системе допускается не более t неисправных блоков. В качестве модели S используется ориентированный граф $G = (V, E)$. Блоки системы взаимно-однозначно отображаются в вершины $v_0, v_1, \dots, v_{N-1}$ графа, а возможность тестирования блока u_j из блока u_i отображается в дугу e_{ij} , направленную из вершины v_i в вершину v_j графа. Пусть $C = \|c_{ij}\|$ — матрица смежности вершин графа G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Одношагово t -диагностируемая система из N блоков представляется графом G , матрица смежности вершин которого имеет размерность $(N \times N)$, причем число m_i единичных элементов в i -й строке матрицы не менее t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оптимальной называется такая одношагово t -диагностируемая система, граф G которой имеет матрицу смежности вершин, удовлетворяющую условиям:

$$\left. \begin{aligned} N &= 2t + 1, \\ m_i &= t, \\ m_i &= m_j \quad (i \neq j, i, j=0, (N-1)). \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

В качестве одного из способов задания оптимальных одношагово t -диагностируемых систем в [1] выделен способ, определяемый следующим правилом.

ПРАВИЛО. Пусть вершины графа G перенумерованы последовательными неотрицательными числами $0, 1, 2, \dots, (N-1)$. Вершины v_i и v_j инцидентны дуге e_{ij} , исходящей из v_i , если и только если $(j-i) \equiv \delta m \pmod{N}$, где $m = 1, 2, \dots, t$; δ и t — положительные целые не меньше 1.

Такие структуры названы $D_{\delta t}$ -структурами [1]. Показано, что при $\delta = 1$ $D_{\delta t}$ -структуры одношагового t -диагностируемы. Установлено, что структура $D_{\delta t}$ изоморфна D_{1t} , если N и δ взаимно-простые ($(N, \delta) = 1$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество результатов взаимопроверки блоков системы образует ее синдром, представляемый в виде матрицы $A = \|\alpha_{ij}\|$; $\alpha_{ij} = c_{ij} \& a_{ij}$. Матрица A имеет размерность $(N \times N)$.

Ясно, что α_{ij} может принять значение 1 лишь для блоков системы, между которыми существует тестирующая связь ($c_{ij} = 1$). Значение двоичной переменной a_{ij} , представляющей результат проверки блока u_j из блока u_i , зависит от состояния (исправный/неисправный) блока u_i (см. таблицу). Из таблицы видно, что если тестируемый блок неисправен, то переменная a_{ij} может принимать значение 0 или 1 независимо от фактического состояния тестируемого блока. Для $c_{ij} = 0$ значение α_{ij} не определено ($\alpha_{ij} = \emptyset$). Пер-

Т а б л и ц а

u_i	u_j	a_{ij}
И	И	0
И	Н	1
Н	И	*
Н	Н	*

Примечание:

И — блок исправен; Н — блок неисправен, * — значение (произвольное) из $\{0, 1\}$.

вый этап самодиагностики заключается в выделении совокупности исправных блоков, составляющих ядро системы.

Перенесем на граф G , представляющий систему S , всю терминологию, используемую для системы. Тогда ядром графа назовем совокупность вершин графа G , удовлетворяющую формулируемым ниже условиям; синдром системы-прообраза задает бинарную разметку ребер графа G ; состояние исправности (исправен/неисправен) блоков системы задает N -разметку вершин графа G и т.д.

Конструктивно доказываемая в [1] теорема необходимости и достаточности одношаговой t -диагностики определяет в качестве ядра

совокупность вершин графа G , удовлетворяющую следующим требованиям:

1. Ядро должно состоять не менее чем из $(t+1)$ -й вершины.
2. Вершины, составляющие ядро, должны входить в простой цикл.
3. Результаты взаимопроверки должны быть идентичны. Если вершины v_i и v_{i+1} смежны в цикле, составляющем ядро, и в G имеется дуга e_{ij} , то $a_{ij} = 0$.

Таким образом, если в G выделен некоторый цикл из m вершин, дугам которого в матрице A соответствуют элементы $a_{ij} = 0$, то при $m \leq t$ либо все выделенные вершины H -отмечены (блоки неисправны), либо H -отмечены (блоки исправны); при $m > t$ все выделенные вершины H -отмечены.

§2. Оптимальные одношагово-диагностируемые структуры и КАИС-структуры

1. В ряде случаев к макроструктуре системы предъявляется требование однородности на уровне соединений между ее блоками. Вегнер [3] называет систему однородной, если представляющий ее граф обладает транзитивной группой автоморфизмов, сохраняющей отметки ребер. Такой граф является диаграммой Кэли некоторой группы Γ , что позволяет перейти к алгебраическому описанию макроструктуры системы. Данный подход был использован Воробьевым и Корнеевым [2] для описания структуры конечных однородных вычислительных систем. Одним из возможных подклассов выделенного ими класса конечных абелевых изотропных симметричных структур (КАИС-структур) *) являются D_n -графы [4], определяемые следующим образом.

Пусть N вершин графа, представляющего систему, перенумерованы числами от 0 до $(N-1)$, а полустепень всех вершин графа одинакова и равна n . Зададим набор положительных целых чисел $s_1, s_2, \dots, s_n$. Связь между вершинами v_i и v_j графа имеет место, если и только если

$$(j-i) \equiv s_m \pmod{N}; \quad m=1, n.$$

Теоретико-групповое представление такой структуры возможно, если образуемый описанным способом ориентированный граф является

*) Здесь и ниже в графе КАИС-структуры учитывается свойство симметричности. Оно приводит к тому, что каждая дуга на диаграмме Кэли замещается парой дуг взаимно противоположного направления с метками s_i и s_i^{-1} ($i=1, n$).

сильно связанным. Последнее условие обеспечивается [4], если числа $N, s_1, s_2, \dots, s_n$ являются взаимно-простыми: $(N, s_1, s_2, \dots, s_n) = 1$.

Как видно, D_n -структуры представляют собой обобщение D_{δ_t} -структур, задаваемых правилом. Соотношения между отметками ребер D_n - и D_{δ_t} -структур имеют вид

$$s_m = m\delta; \quad m = \overline{1, n}, \quad (2)$$

при $t = n$. Сильная связность для D_{δ_t} -структуры обеспечивается условием $(N, \delta) = 1$. Оптимальная одношагово t -диагностируемая структура единственна в классе D_n -структур при $n = t$. Для доказательства покажем сначала, что $D_{\delta_1 t}$ -структура изоморфна $D_{\delta_2 t}$ -структуре, если

$$\delta_1 \equiv \delta_2 \pmod{N}. \quad (3)$$

В самом деле, по определению, вершины j и i D_{δ_t} -структуры связаны, если $j-i \equiv \delta m \pmod{N}$; $m = \overline{0, (N-1)}$. Сравнение (3) имеет место, только если $|\delta_1 - \delta_2| = rN$, где r — целое. Поскольку $rN \equiv 0 \pmod{N}$, то $\delta_1 \equiv a$ и $\delta_2 \equiv a \pmod{N}$. Отсюда $D_{\delta_1 t}$ и $D_{\delta_2 t}$ -структуры изоморфны третьей, имеющей отметки ребер $s_1' = a$; $s_2' = 2a, \dots, s_t' = ta$. В силу свойства транзитивности изоморфизмов $D_{\delta_1 t}$ -и $D_{\delta_2 t}$ -структуры также изоморфны.

Рассмотрим теперь множество оптимальных (в смысле определения 2) D_n -структур, заданных параметрически: $(N; s_1, \dots, s_n)$. Необходимые условия одношаговой t -диагностируемости структур [1] требуют, чтобы каждая вершина ее графа была связана с t другими вершинами. Это возможно, только если значения s_i, s_j ($i \neq j$; $i, j = \overline{1, t}$) удовлетворяют условию $s_i \not\equiv s_j \pmod{N}$. Используя полученные свойства изоморфизма $D_{\delta_1 t}$ -и $D_{\delta_2 t}$ -структур, можно сказать, что в качестве образующих достаточно использовать числа в диапазоне от 0 до $(N-1)$. Однако конструктивно доказываемая в [1] теорема о необходимых условиях одношаговой t -диагностируемости структур требует вхождения в цикл блоков, предполагаемых исправными. Вследствие этого среди выбранных t значений образующих не должно быть таких, что $s_i + s_i \equiv 0 \pmod{N}$ — условие однонаправленности связей. Это возможно, только если для любого i верно: $s_i \geq t$ или $s_i \leq t$, что определяет в качестве единственно допускающих одношаговую t -диагностику оптимальные D_{δ_t} -структуры.

2. Оптимальные D_{δ_t} -структуры предъявляют жесткие требования к числу связей в системе. Общее число тестирующих связей в та-

кой системе составляет $Nt = 2t^2 + t$. Это ограничивает область их практического использования системами из небольшого числа блоков, поскольку при построении многомодульных и/или многомашинных систем на современной технологической базе на первое место выдвигается проблема числа соединений. Системы из дискретных компонентов допускают широкие колебания по числу межсоединений. Здесь главную роль играет удобство сборки систем. Для систем из больших интегральных схем ограничения на число межсоединений становятся принципиальными. Число контактов больших интегральных схем ограничивается как технологическими характеристиками (трудностями размещения большого числа контактов на ограниченной периферии кристалла), так и соображениями надежностного характера, поскольку внешние связи являются основным источником ненадежности системы.

Другое ограничение оптимальных D_{3t} -структур связано со свойством наращиваемости системы. Сохранение свойства оптимальности D_{3t} -структуры при увеличении числа входящих в неё блоков требует соответствующего изменения числа тестирующих связей в каждом из блоков системы. Необходимые для этого переделки трудоемки, их возможность для дискретных средств вычислительной техники ограничена, а для систем на основе интегральной технологии, как правило, невозможна.

В связи со сказанным важное значение приобретает исследование диагностических способностей систем, удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} N &\geq 2t + 1, \\ t &> 2n, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $2n$ — число тестирующих связей у каждого блока системы. В соответствии с определением I, такие системы являются одношагово $2n$ -диагностируемыми. В силу отмеченной тенденции на ограничение межблочных связей с увеличением степени интеграции электронных узлов, следует предполагать, что в качестве тестирующих будут использоваться рабочие межблочные связи. Обобщим определение I на случай структур, удовлетворяющих условиям (4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система называется t -диагностируемой, если для неё можно выделить хотя бы один исправный блок, когда число неисправных блоков не превышает t .

На диагностируемость системы, удовлетворяющей условиям (4), влияют два фактора. Первый связан с особенностями структуры связей между выделяемыми исправными блоками, составляющими диагностическое ядро системы. Вторым является существование блоков, недо-

ступных для диагностики. Изучение влияния указанных факторов составляет содержание следующих ниже разделов.

§3. Структура диагностического ядра

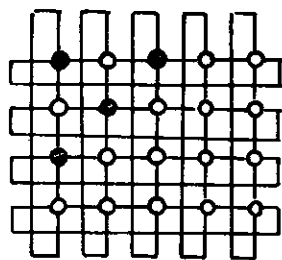
Пусть G — КАИС-структура размерности n и порядка N . Осуществим следующее преобразование ориентированного графа G . Удалим из него все дуги, отмеченные значением $a_{ij} = 1$, а пары взаимно — противоположных дуг, связывающих вершины v_i и v_j и отмеченных значениями $a_{ij} = 0$, $a_{ji} = 0$, заменим ребром, инцидентным тем же вершинам. Назовем получающийся при этом смешанный граф графом "0"-отмеченных связей (G_0). В соответствии с условием (3) определения ядра, в него могут входить вершины G_0 , инцидентные по крайней мере либо одному ребру и одной дуге, либо двум дугам, одна из которых является входной, а другая выходной. В соответствии с условием (2) определения ядра, указанные ребра (дуги) графа G_0 должны быть циклическими [5]. Ясно, что множество V_H вершин, которые могут входить в ядро, удовлетворяет условию $V_H \subseteq V(G_0)$.

Первое ограничение на диагностируемость КАИС-структуры связано со следующим утверждением.

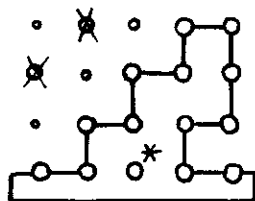
Если число k N -вершин ($k \leq t$) графа G удовлетворяет условию $k \geq 2n - 1$, то существует такой синдром графа G , что в порождаемом им графе G_0 имеется по крайней мере одна вершина, инцидентная нециклическим дугам (ребрам).

Не приводя здесь полного доказательства этого утверждения, укажем, что оно основано на установлении отсутствия инцидентности I -отмеченной вершины, смежной с $(2n - 1)$ -й N -вершиной, с циклическими ребрами. Последнее может быть связано также со смежностью I -вершины с вершинами, которые инцидентны ациклическим ребрам. Оба указанных фактора снижают диагностические возможности структуры.

Множество M синдромов заданной КАИС-структуры порождает множество графов вида G_0 . Каждый такой граф характеризуется длиной $l_{\max}$ максимального простого цикла из I -вершин. Тот факт, что в общем случае максимальный простой цикл графа G_0 не является гамильтоновым, определяет еще одно ограничение на степень диагностируемости структуры. На рис. I приведен E_n -граф и его граф G_0 , порождаемый синдромом, в котором для любой I -отмеченной вершины v_j имеем $a_{ij} = 1$. Вершины, соответствующие неисправным блокам,



а) E_2 - граф,
 $N=20, k=4$



б) G_0 - граф,
 $l_{\max}=13$

Рис. I

на рис. I, а выделены черным. На рис. I, б перечеркнуты вершины графа G_0 , инцидентные ациклическим ребрам. Звездой выделены вершины, инцидентные циклическим ребрам и не входящие в максимальный простой цикл.

Наконец, третье обстоятельство, ограничивающее возможность диагностики с помощью ядра, имеющего структуру простого цикла, - это алгоритмическая трудность построения такого ядра. Строго говоря, цикл, составляющий ядро, должен строиться наращиванием его на один элемент (вершину) за шаг. КАИС-структуры, удовлетворяющие условиям (4), не представляют такой возможности. Поэтому выделение ядра осуществляется в следующем порядке: а) формируется граф G_0 ; б) поочередно испытываются циклы графа G_0 . Это определяет время на диагностику как время полного перебора возможных реализаций цикла.

§4. Диагностическое дерево

I. В этом разделе мы покажем возможность диагностики КАИС-структур ядром, структура которого отличается от простого цикла. Дадим оценку диагностических возможностей КАИС-структур с таким ядром.

Фундаментальное свойство смешанного графа G_0 состоит в том, что в нем ребра соединяют вершины, состояния отметок исправности a_{ij} которых совпадают. Удалим из G_0 все дуги. Образующий при этом неориентированный граф обозначим через G_0^* . Из транзитивности отметок состояния исправности G_0 и отмеченного фундаментального свойства графа G_0 можно заключить, что в графе G_0^* каждая компонента связности содержит вершины, состояния исправности ко-

торых совпадают. Это дает возможность сформулировать новое требование к структуре диагностического ядра:

Произвольная компонента связности графа G_0^* с числом вершин не менее $(t+1)$ составляет диагностическое ядро.

Рассмотренное свойство графа G_0^* позволяет распространить обсуждаемый метод самодиагностики на системы, представляемые таким графом $G = (V, E)$, что для любых $v_i, v_j \in V$ имеем: если $e_{i,j} \in E$, то $e_{j,i} \in E$; $i \neq j$.

2. Рассмотрим граф G абелевой группы из N элементов с числом n образующих вида $s_1, s_2, \dots, s_n$. Вершины обозначим именами соответствующих элементов группы Γ . Обозначим через t предельно допустимое для системы S число неисправных блоков: $t = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$. Пусть задано число $k \leq t$ N -вершин графа G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем k -разметкой некоторое размещение k N -вершин в графе G . Все возможные размещения k N -вершин в графе образуют множество $\mathcal{K}_k$ k -разметок. Разметки описываются перечислением имен N -вершин графа G ; k -разметки $\mathcal{K}_{k,i}$ и $\mathcal{K}_{k,j}$ (i, j - номера k -разметок; $i \neq j$) различны, если их описания различаются хотя бы одним элементом.

Каждая из k -разметок $\mathcal{K}_{k,i} \in \mathcal{K}_k$ графа G порождает множество $\mathcal{U}(\mathcal{K}_{k,i})$ графов вида G_0^* , различающихся связностью между N -вершинами. С точки зрения оценки предельной диагностируемости структуры G , представляет интерес определение числа элементов (порядков) компонент связности в графах G_0^* , порождаемых k -разметками G . Поскольку, с одной стороны, диагностируемость структуры определяется порядком компонент связности из N -вершин, а с другой стороны, связность между N - и N -вершинами в G_0^* отсутствует, можно ограничиться рассмотрением только графов G_0^* , в которых все N -вершины изолированы. Это обеспечивает взаимно-однозначное соответствие между разметкой $\mathcal{K}_{k,i}$ и порождаемым ею графом $G_0^*(\mathcal{K}_{k,i})$ (множество $\mathcal{U}(\mathcal{K}_{k,i})$ одноэлементно). Пусть граф $G_0^*(\mathcal{K}_{k,i})$ содержит 1 компонент связности с порядком $p(\mathcal{K}_{k,i}) = \{p_1(k,i), p_2(k,i), \dots, p_{l(k,i)}(k,i)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Две k -разметки $\mathcal{K}_{k,i}'$ и $\mathcal{K}_{k,i}''$ с порядками $p(\mathcal{K}_{k,i}')$ и $p(\mathcal{K}_{k,i}'')$ соответственно называются эквивалентными, если существует взаимно-однозначное соответствие между элементами мно-

жеств $\mathcal{R}'_{k,1}$ и $\mathcal{R}''_{k,1}$. Эквивалентность этих разметок обозначаем $\mathcal{R}'_{k,1} \Leftrightarrow \mathcal{R}''_{k,1}$.

Пусть задана k -разметка $\mathcal{R}'_{k,1}$ графа G , которая порождает граф $G_0(\mathcal{R}'_{k,1})$ с порядками компонент связности $\mathcal{P}(\mathcal{R}'_{k,1}) = \{P_1(k,1), P_2(k,1), \dots, P_l(k,1)\}$. Разметка $\mathcal{R}'_{k,1}$ накладывает ограничение на возможность диагностируемости системы: система k -диагностируема, если

$$D(\mathcal{R}'_{k,1}) = \max_{1 \leq j \leq l} \{P_1(k,1), P_2(k,1), \dots, P_j(k,1), \dots, P_l(k,1)\} \geq k. \quad (5)$$

Ясно, что если $\mathcal{R}'_{k,1} \Leftrightarrow \mathcal{R}''_{k,1}$, то $D(\mathcal{R}'_{k,1}) = D(\mathcal{R}''_{k,1})$. С учетом эквивалентности разметок общее число различных разметок графа G при заданном значении k определяется

$$|\mathcal{R}_k| = \sum_{j=1}^{l(k)} |\mathcal{R}_{k,1}|,$$

где $|\mathcal{R}_{k,j}|$ - число k -разметок графа G на j компонентах связности, равное числу способов представления числа k в виде суммы j слагаемых; $l(k)$ - максимально возможное для заданного k число слагаемых. Так как каждая из k -разметок $\mathcal{R}_{k,j} \in \mathcal{R}_k$ ограничивает возможность диагностируемости в соответствии с (5), то необходимым условием k -диагностируемости является

$$D(\mathcal{R}_k) = \min_{1 \leq j \leq l(k)} \max_{1 \leq i \leq j} \{P_1(k,j), P_2(k,j), \dots, P_i(k,j), \dots, P_j(k,j)\} \geq k. \quad (6)$$

Поскольку $D(\mathcal{R}_{k,1}) > D(\mathcal{R}_{(k+1),1})$ при любых k и l , то задачу оценки диагностируемости структуры можно решать как поиск такого максимального значения $t \leq \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor$, для которого имеет место

$$\min[D(\mathcal{R}_t)] > t \geq \min[D(\mathcal{R}_{(t+1)})]. \quad (7)$$

3. Здесь мы получим нижнюю оценку диагностируемости структуры, исходя из рассмотрения процесса k -разметки как процесса от деления некоторых вершин от G . Условимся, что разметки проводятся так, что некоторая вершина (для определенности, вершина I) всегда входит в компоненту, отделяемую от G (никогда не является N -отмеченной).

Очевидно, что максимум отделяемых вершин при минимуме отделяющих будет получен, если все отделяемые вершины образуют одну выпуклую фигуру, составляющую одну компоненту связности и ни одна из отделяющих вершин не является отделенной. В [7] показано, что для бесконечного групп-графа, единственными определяющими соотношениями которого являются соотношения коммутативности, указанному требованию удовлетворяет компонента связности $\mathcal{A}$, отделяемая n -вершинами, которые находятся на одном и том же расстоянии m от выбранной центральной вершины (от вершины 1). Если n — число образующих соответствующей группы, то порядок $Q^n(m-1)$ компоненты $\mathcal{A}$ определяется с помощью рекурсивного выражения [7]:

$$Q^n(m-1) = Q^{n-1}(m-1) + 2 \sum_{i=0}^{m-2} Q^{n-1}(i), \quad (8)$$

а число отделяющих вершин равно

$$R^n(m) = Q^n(m) - Q^n(m-1).$$

Выражение (8) дает решение изопериметрической задачи для k , принимающих значения из ряда $R^n(m)$ при любом целом $m \geq 0$. Решение изопериметрической задачи для произвольного k при $n > 2$ связано со значительными трудностями. Эти трудности вызваны прежде всего невозможностью применения имеющихся в литературе результатов к решеткам, в которые отображаются групп-графы бесконечной группы. Вместе с тем решение изопериметрической задачи для заданного k в общем случае не может быть получено из решения для $(k-1)$. В связи с указанными обстоятельствами, мы ограничимся рассмотрением значений k из ряда $R^n(m)$: $k \in \{R^n(m)\}$; $m = 1, 2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Множество вершин групп-графа G , находящихся на расстоянии не более m от выбранной центральной вершины, определяет подграф $\mathcal{A}$ порядка $Q^n(m)$. Называем m радиусом подграфа $\mathcal{A}$.

Рассмотрим класс конечных КАИС-структур, обеспечивающих optimum показателей функционирования ОВС. Такие структуры при заданных N и $n \leq N-1$ имеют максимальное число элементов с суммой модулей степеней образующих, равной m ($0 \leq m \leq N-1$), и минимальное число элементов с суммой модулей степеней образующих, равной m . Здесь m определяется из неравенства $Q^n(m-1) < N \leq Q^n(m)$. Следуя [7], будем обозначать такие структуры через $e^*(N, n)$.

СВОЙСТВО I. Для любой конечной структуры t -разметка, удовлетворяющая условию (7), при $t \geq 2n$ содержит не менее двух компонент связности.

В самом деле, пусть однородный граф размерности n имеет N вершин. Допустим, что число 1 компонент связности t -разметки, удовлетворяющей условию (7), $l = 1$. Тогда порядок компоненты связности $p_1 = N - t$. Но так как $q^n(1) = 2n$, то существует такая t -разметка $\mathcal{X}_{(t,2)}$, что $\max\{p_1, p_2\} \leq N - t - 1$, что противоречит допущению.

Свойство изопериметричности компоненты связности $\mathcal{A}$ позволяет сузить класс t -разметок, удовлетворяющих условию (7), ограничиваясь теми из них, для которых отделяемая компонента связности имеет конструкцию $\mathcal{A}$. При определении диагностируемости $\theta^*(N, n)$ - структуры следует учитывать то обстоятельство, что N -вершины, отделяющие компоненту связности $\mathcal{A}$, могут разделить G более чем на две компоненты связности. С учетом приведенного выше свойства I, можно получать следующие простые условия достаточности t -диагностируемости структуры.

Для любого N $\theta^*(N, n)$ - структура t -диагностируема, т.е.

$$\min\{D(\mathcal{X}_t)\} > t \geq \min\{D(\mathcal{X}_{(t+1)})\},$$

если

$$t \leq \min\left\{\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor, R^n(M-2)\right\}. \quad (9)$$

Неравенство (9) задает условия единственности отделяемой компоненты связности. В самом деле, по построению, вершины, находящиеся на расстоянии M от вершины I групп-графа G , смежны либо с вершинами, находящимися на расстояниях $(M-1)$ и M от вершины I , либо только с вершинами, находящимися на расстоянии $(M-1)$ от I . Последнее имеет место, если $N - Q^n(M-1) < R^n(M)/2$. Поэтому если N -вершины находятся на расстоянии $(M-1)$ от I , то вершины, удаленные от I на расстояние M и смежные с вершинами на расстоянии M и $(M-1)$ от I , будут образовывать компоненты связности порядка меньше или равного $R^n(M)/2$. Вершины же, смежные только с вершинами, которые удалены на расстояние $(M-1)$ от I , образуют компоненты связности порядка 0. Наибольшее расстояние от I для N -вершин, при котором никакие две N -вершины не являются смежными, равно $(M-2)$, что и доказывает неравенство (9), поскольку $R^n(M-1) + \Delta > R^n(M-2)$, где $1 \leq \Delta = N - Q^n(M-1) < R^n(M)$. Если $N - Q^n(M-1) = R^n(M)$, то второе условие достаточности приобретает вид

$$t \leq \min\left\{\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor, R^n(M-1)\right\}. \quad (9')$$

Уточнение неравенства (9') для $n = Q^n(M-1) \neq R^n(M)$ может быть получено на основе определения порядка компоненты связности $G_0^* - G_H - \mathcal{A}$ (G_H - множество H -отмеченных вершин) для случая, когда вершины, находящиеся на расстоянии $(M-1)$ от I , являются отделяющими. Порядок компоненты $G_0^* - G_H - \mathcal{A}$ может быть определен с помощью матрицы смежности групп-графа G , из которой удалены столбцы и строки, соответствующие тем элементам группы Γ , сумма модулей степеней образующих которых меньше или равна $(M-2)$.

Для частного случая $n=2(R^2(M) = 4M)$ уточнение оценки диагностируемости $\Theta^*(N, n)$ -структуры имеет следующий вид: $\Theta^*(N, n)$ -структура $R^2(M)$ -диагностируема при $N \in \{\Theta^2(m)\}$, $m=1, 2, \dots$, если $4M > \frac{1}{4} \Theta^2(M-1)$.

В самом деле, если заданная структура не является $R^2(M)$ -диагностируемой ($t < R^2(M)$), то для нее существует такая $\mathcal{X}_{t,1}$ -разметка, что $\max\{p_1, p_2, \dots, p_1\} \leq 4M$. Оценка значения 1 имеет вид

$$1 \geq \left\lfloor \frac{Q^2(M-1)}{4M} \right\rfloor + \beta, \quad (10)$$

где $\beta=0$, если $Q^2(M-1)/4M$ - целое, и $\beta=1$ - в противном случае. Равенство в (10) имеет место, если $4M \in \{Q^2(m)\}$. Пусть (10) имеет вид равенства (худший случай). Тогда все 1 компонент связности являются подграфами вида $\mathcal{A}$, и общее число компонент связности для двумерной структуры можно представить как квадрат некоторого целого числа b : $1 = b^2$. Общее число H -вершин, разделяющих $\Theta^*(N, 2)$ -структуру на 1 компонент связности вида $\mathcal{A}$, составит $2(M+1) \cdot b - b^2$, и, по условию диагностируемости, имеем:

$$2(M+1)b - b^2 = 4M. \quad (11)$$

При естественном ограничении на число компонент связности $b < M$ квадратное уравнение (11) имеет единственный действительный корень: $b=2$. Отсюда следует, что $4M$ H -вершин не могут разделить $\Theta^*(N, 2)$ -структуру более чем на 4 компоненты связности (см. рис.2), сумма H -вершин которых составляет $Q^2(M-1)$.

Отсюда следует, что всякая $\Theta^*(N, 2)$ -структура при $N \in \{Q^2(m)\}$ является $R^2(M)$ -диагностируемой при $M \geq 9$ и $R^2(M-1)$ -диагностируемой при $M < 9$.

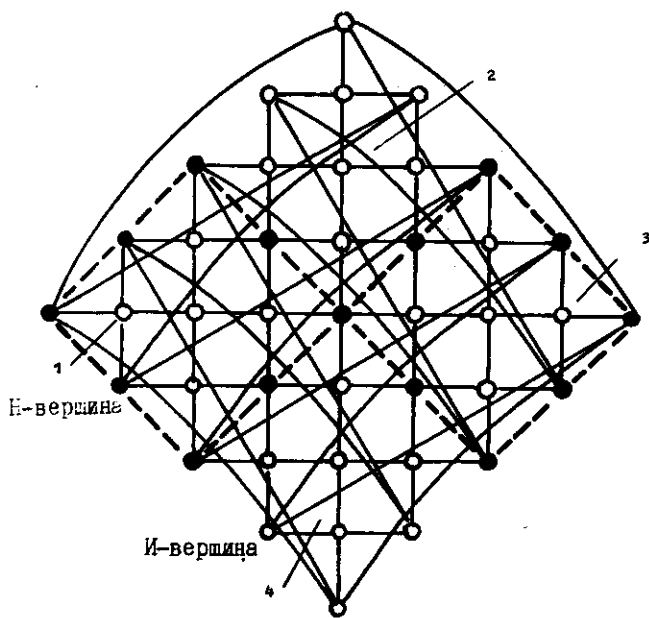


Рис. 2

В работе изучены особенности выполнения первого этапа самодиагностики систем из однотипных элементов - этапа выделения подмножества элементов, составляющих её диагностическое ядро. Возможности одношаговой диагностируемости зависят от макроструктуры диагностического ядра. Доказана возможность использования в качестве ядра подмножества элементов, имеющего структуру дерева. Существенное преимущество этой структуры перед известной циклической заключается в возможности использования рассматриваемой методики самодиагностики в системах с произвольной макроструктурой. Выявлены факторы, влияющие на число t допустимых для системы ее неисправных блоков. Даны оценки значения t для КАИС-структур.

Л и т е р а т у р а

1. PREPARATA H.P., METZE G., CHIEN R.J. On the connection assignment problem of diagnosable systems. - "IEEE Trans.", 1967, v. EC-16, N 6, Dec., p.848-853.

2. ВОРОБЬЕВ В.А., КОРНЕЕВ В.В. Некоторые вопросы теории структур однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 60, Новосибирск, 1974, с.3-16.

3. WAGNER Eric G. On connecting modules together uniformly of form a modular computer. - "IEEE Trans.", 1966, Dec., p.863-972.

4. ВОРОБЬЕВ В.А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 60. Новосибирск, 1974, с.35-49.

5. ОРЕ О. Теория графов. М., "Наука", 1968.

6. ХАЛВИГЕР Г. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., "Наука", 1961.

7. КОРНЕЕВ В.В. О макроструктуре однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып. 60. Новосибирск, 1974, с. 17-34.

Поступила в ред.-изд.отд.

27 декабря 1976 года