

УДК 519.1:519.2:62-529

К ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ ДОСТИЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ПРОГРАММЫ

В.И. Знак

§1. Постановка задачи

Проверка правильности взаимодействия параллельных ветвей - важный этап создания параллельных программ (р-программ) [1]. Одним из методов такой проверки является моделирование выполнения р-программы.

Особенностью выполнения р-программы является вероятностный характер наступления событий. Положим, что событие так же, как в [1], определяется набором системных операторов и временем их появления в ветвях. Тогда для моделирования выполнения р-программы требуется знание характеристик каждой ее ветви, например, таких, как распределение вероятностей появления операторов, оценка времени первого (после запуска ветви) появления, период повторного появления и математическое ожидание числа повторений заданного оператора. При этом необходимо учитывать, что в процессе проверки правильности взаимодействий ветвей запуск отдельной ветви может осуществляться с оператора, отличного от исходного.

Уточним модель и определим задачи данной работы. Пусть имеется р-программа, включающая L ветвей. Для представления отдельной ветви воспользуемся операторной схемой - строкой 2 /операторов O_j ($j = \dots, n$) с указанием связей между ними. Время, затрачиваемое на реализацию оператора $O_j \in 2$, есть в общем случае случайная величина в интервале (τ_j', τ_j^*) с математическим ожиданием τ_j (τ_j' - минимальное и τ_j^* - максимальное время выполнения оператора).

Работу ветви можно характеризовать последовательностью операторов $\alpha = O_{j_1}, O_{j_2}, \dots, O_{j_m}$. В таком случае время реализации последовательности α определяется суммой $T = \sum_{O_j \in \alpha} \tau_j$ с нижней и верх-

ней границами соответственно $T' = \sum_{O_j \in \alpha} \tau_j'$; $T^* = \sum_{O_j \in \alpha} \tau_j^*$.

Здесь время первого появления заданного оператора, период и число его повторных реализаций определяются положением оператора в последовательности α .

Если связи между $O_j \in U$ носят детерминированный характер, последовательность $\alpha = \{O_{j_k}\}$ ($k = 1, \dots, m$) записывается однозначно и место заданного оператора указывается просто. В более общем случае операторы $O_j \in U$ связаны по вероятности. Тогда положение такого оператора в последовательности α становится случайным, и поиск требуемых величин затруднителен. В данной работе разрабатывается методика поиска требуемых характеристик для последнего случая.

Уточним постановку задачи. Пусть имеется операторная схема $U = \{O_j\}$ ($j=1, \dots, n$) ветви p -программы. Для этой схемы заданы время реализации операторов - τ_j и вероятности переходов - p_{jk} ($j, k=1, \dots, n$; $\sum_{k=1}^n p_{jk} = 1$). Реализация ветви происходит в дискретном

времени t_s ($s=1, 2, \dots$), при этом в заданный момент времени выполняется только один оператор ветви и выбор преемника определяется текущим состоянием O_j и вероятностью перехода p_{jk} . Положим, что $\tau_j = \text{const}$ ($j=1, \dots, n$), вероятности перехода не меняются во время работы программы, а сам переход не требует затрат времени и осуществляется либо в начале, либо в конце интервала t_s . Для заданного оператора $O \in U$ требуется найти:

- а) время первого (после запуска ветви) обращения к нему - τ'_0 ;
- б) период повторного обращения - τ_0 ;
- в) математическое ожидание числа обращений - M_0 .

При этом, как отмечалось, в качестве исходного оператора ветви может быть выбран произвольный оператор $O \in U$. Таким образом, искомые величины определяются не только положением заданного оператора в операторной схеме, но и выбором оператора, с которого будет произведен запуск ветви.

В принципе, задана марковская модель выполнения ветви p -программы. Для исследования такого рода процессов обычно используют алгебраический подход [2,3]. Однако в нашем случае он является избыточным. В самом деле, трудно себе представить программу, для которой матрица вероятностей передач управления не имела бы нулевых элементов. Значение отмеченного фактора возрастает при анализе схем для различных исходных данных (иначе, для различных выбо-

ров вероятностей передач управления). В связи с этим воспользуемся методикой, изложенной в работе [4], которая позволяет получить решение с учетом структурных особенностей схем.

§ 2. Алгоритм оценки трудоемкости программы

Обозначим связи между операторами $O_j \in \mathcal{U}$ ($j=1, \dots, n$) символами r^{σ_j} ($\sigma_j = 1, \dots, m(j)$).

Путем на операторной схеме назовем такую последовательность символов $\delta = r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, что пара (r_{s-1}, r_s) отмечает соответственно вход и выход оператора $O_{j_s} \in \mathcal{U}$, выполняемого в момент t_{j_s} ($s = 2, 3, \dots$). Путь, для которого выполняется условие

$$O_{j_s} \neq O_{j_k} \quad (s, k = 1, \dots, n; \quad s \neq k), \quad (I)$$

назовем простым (элементарным). Если какой-то оператор входит в последовательность δ дважды, т.е. имеет место равенство $O_{j_s} = O_{j_k}$ ($1 \leq s, k \leq n; s \neq k$), то подпут $\delta' = r_1, \dots, r_{k-1}$ ($\delta' \subset \delta$), для которого выполняется условие (I), назовем простым циклом.

В настоящее время существует ряд алгоритмов, обеспечивающих перечисление простых (элементарных) путей на схемах. Наиболее удобным в нашем случае представляется метод, изложенный в [5]. Положим, реализация процедуры отмеченного характера позволила получить множество Ψ простых путей ϕ_i ($i=1, \dots, n$) из начала схемы в конец и множество Φ простых циклов ϕ_j ($j=1, \dots, m$).

Отметим, что

- всякая циклическая перестановка элементов простого цикла дает верное изображение этого цикла;

- пути и циклы схемы связаны через операторы $O_j \in \mathcal{U}$ (содержат элементы r^{σ_j} , исходящие из одноименных O_j).

Пути $\phi \in \Psi$ назовем путями нулевого ранга. Циклы $\phi \in \Phi$, связанные хотя бы с одним из путей ранга $v=0$, назовем путями ранга один; циклы, связанные хотя бы с одним из путей ранга $v=1$, назовем путями ранга 2 и т.д. В работе [4] предложена процедура, позволяющая формализовать как процесс анализа связей циклов $\phi \in \Phi$ с путями $\phi \in \Psi$, так и (на основе этого) процесс задания случайной величины - времени выполнения программы. Однако в [4] ограничились только такими схемами, где количество преемников отдельного оператора O_j ($j=1, \dots, n$) не превышает двух. Рассмотрим процедуру, лишенную отмеченного ограничения, которую и положим в основу решения поставленных задач.

Обратимся к множеству Ψ простых путей ϕ_i из начала схемы в конец и к множеству Φ циклов ϕ_j :

$$\Psi = \{\phi_i\}; \quad \phi_i = \{r_1^i\}; \quad i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, m(i);$$

$$\Phi = \{\phi_j\}; \quad \phi_j = \{r_t^j\}; \quad j = 1, \dots, k, \quad t = 1, \dots, m(j).$$

Образуем из элементов $r_m^i(1) \in \phi_i$ множество ϵ_0 и каждому $g \in \epsilon_0$ сопоставим множество $\Phi_m^i(1) = \Phi$ ($i = 1, \dots, n$). Для ранжировки (или разметки) циклов введем индексную матрицу $A_v = \|a_{cf}\|$ ($c = 1, 2; f = 1, \dots, v$), т.е. матрицу, состоящую из пары строк и v столбцов, где v есть ранг помеченного пути. Для полноты обозначений введем фиктивную матрицу A_0 , которую отведем для элементов $g \in \epsilon_0$, т.е. $\epsilon_0 = \{A_0 r_m^i\}$. $A_0 \Phi_m^i = \Phi$ ($i = 1, \dots, n; m = m(i)$).

Представим алгоритм разметки циклов в общем виде.

1. Пусть ϵ_0 есть множество элементов $A_0 r_m^i \in \phi_i (\phi_i \in \Psi)$ и $A_0 \Phi_m^i$ - множество циклов ($i = 1, \dots, n; m = m(i)$).

2. Если множества ϵ_q и $A_\mu \Phi_c^b$ уже построены ($q = 0, 1, 2, \dots; \mu = 0, 1, 2, \dots, v_{\max}$; $a_{11} = i = 1, \dots, n$; $a_{21} = a_{21}(i) = 1, \dots, m(i); \dots$ $a_{1\mu} = a_{1\mu}(a_{2, \mu-1}) = 1, \dots, n(a_{2, \mu-1})$; $a_{2\mu} = a_{2\mu}(a_{1\mu}) = 1, \dots, m(a_{1\mu})$; $b = b(a_{2\mu}) = 1, \dots, n(a_{2\mu})$; $c = c(b) = 1, \dots, m(b)$), то на следующем шаге:

а) на множестве ϵ_q выделяем произвольный элемент $A_v r_e^d$;

б) на множестве $A_v \Phi_e^d$ выделяем (возможно, пустое) множество $A_v R_e^d$ циклов таких, что каждый $\phi \in R_e^d$ содержит элемент r^{σ_j} , отмечающий один из выходов того же оператора $0_j \in \mathcal{U}$, что и выделенный $A_v r_e^d \in \epsilon_q$ ($\sigma_j = 1, \dots, m(j)$), т.е. связанный с ним;

в) производим циклическую перестановку элементов в циклах $\phi \in A_v R_e^d$ таким образом, чтобы первым стоял элемент, связанный с выделенным $A_v r_e^d \in \epsilon_q$;

г) представляем циклы $\phi \in A_v R_e^d$ в виде $p_{\nu+1} \phi^k$ ($k = k(e) = 1, \dots, n(e)$) и их элементы в виде $p_{\nu+1} r_x^k$ ($x = x(k) = 1, \dots, m(k)$),

где индексная матрица b_{v+1} есть $2 \times (v+1)$ -матрица, для которой $b_{1j} = a_{1j}$ (при $i=1, 2; j=1, \dots, v$) и $b_{1, v+1} = d; b_{2, v+1} = e;$

д) из множества ε_q исключаем выделенный элемент $A_v R_e^d$ и включаем в ε_q элементы $A_v R_{e-1}^d$, если $e-1 \neq 0$, и $b_{v+1} R_{v+1}^k \in b_{v+1} \Phi^k$, если $A_v R_e^d \neq 0$, что дает множество ε_{q+1} ;

е) производим преобразование

$$A_v \Phi_e^d \setminus A_v R_e^d = A_v \Phi_{e-1}^d = b_{v+1} \Phi_m(k).$$

3. Процедура заканчивается, когда на некотором шаге N получаем $\varepsilon_N = \emptyset$.

В результате рассмотренной процедуры получаем множество Γ ранжированных (или размеченных) путей $A_v \Phi^i$, где $v = 1, \dots, v_{\max}$ - ранг соответствующего пути, $i = i(a_{2v}) = 1, \dots, n(a_{2v})$ - порядковый номер такого пути на некотором множестве $A_{v-1} R_{a_{2v}}^{a_{1v}}$; $a_{2v} = 1, \dots, m(a_{1v})$; $a_{1v} = 1, \dots, n(a_{2, v-1})$; ...; $a_{21} = 1, \dots, m(a_{11})$; $a_{11} = 1, \dots, n$ - номера простых путей из начала схемы в конец.

Каждому $A_v \Phi^i \in \Gamma$ соответствуют время однократной реализации

$$A_v t^i = \sum_{j \in A_v \Phi^i} \tau_j; \quad (2)$$

условная вероятность однократной реализации

$$A_v P^i = \prod_{j \in A_v \Phi^i} p_j^{\sigma_j}$$

и количество реализаций (при $v \geq 1$), если достигнут один из операторов такого пути ($A_v n^i = 0, 1, 2, \dots$).

Анализ результатов процедуры разметки путей позволяет задать случайную величину - время выполнения программы

$$T = A_0 t^1 + \sum_{v=1}^{v_{\max}} A_v t^1 \prod_{\mu=1}^v A_\mu n^\mu, \quad (3)$$

где произведение $\prod_{\mu=1}^v A_{\mu} n^{\mu}$ включает только реализацию циклов, следовательно связанных с рассмотренным $A_v \phi^1 \in \Gamma$.

Распределение вероятностей такой случайной величины получается через полиномиальное распределение [6]

$$P(T) = A_0 P^1 \prod_{a_{21}=1}^{m(a_{11})} \left\{ \prod_{b=1}^{n(a_{21})} \left[f(A_1 P^b) \right] A_1^{n^b} \frac{A_0^{n^1} n^{a_{21}}!}{A_1^{n^1!} \dots A_1^{n^{a_{21}}!}} \right\}, \quad (4)$$

где

$$f(A_1 P^b) = A_1 P^b \prod_{a_{22}=1}^{m(a_{12})} \left\{ \prod_{c=1}^{n(a_{22})} \left[f(A_2 P^c) \right] A_2^{n^c} \frac{A_1^{n^1} n^{a_{22}}!}{A_2^{n^1!} \dots A_2^{n^{a_{22}}!}} \right\},$$

.....

$$f(A_{k-1} P^s) = A_{k-1} P^s \prod_{a_{2k}=1}^{m(a_{1k})} \left\{ \prod_{r=1}^{n(a_{2k})} \left[f(A_k P^r) \right] A_k^{n^r} \frac{A_{k-1}^{n^1} n^{a_{2k}}!}{A_k^{n^1!} \dots A_k^{n^{a_{2k}}!}} \right\},$$

$$A_{v-1}^{n^1} n^{a_{2k}} = A_v^{n^1} + \dots + A_v^{n^{a_{2v}}} ; v = 1, \dots, k; k = v_{\max};$$

$$i = b, c, \dots, \Gamma.$$

Математическое ожидание рассмотренной случайной величины есть

$$\lim_{A_{v-1}^{n^1} n^{a_{2v}}} \rightarrow \left\{ \sum_{i=1}^n A_0 t^i + \sum_{v, a_{2v}, 1} A_v t^1 \prod_{\mu=1}^v A_{\mu} n^{\mu} \right\} P(T).$$

Предел такой суммы существует и равен [4]

$$E(T) = \sum_{i=1}^n \left\{ A_0 t^i + A_0 \tilde{P}^1 + \sum_{v=1}^k \sum_{a_{21}=1}^{m(a_{1v})} \sum_{i=1}^{n(a_{2v})} A_v M^i \right\}, \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 A_v^{M^1} &= A_v^{t^1} \frac{F_1}{(1 - \sum_{b=1}^{n(a_{21})} \tilde{P}^b(A_v)) \prod_{a_{21}=1}^{m(a_{11})} (1 - \sum_{b=1}^{n(a_{21})} \tilde{P}^b)} \\
 F_1 &= A_0^{P^1} \frac{F_2}{(1 - \sum_{c=1}^{n(a_{22})} \tilde{P}^c(A_v)) \prod_{a_{22}=1}^{m(a_{12})} (1 - \sum_{c=1}^{n(a_{22})} \tilde{P}^c)} \\
 &\dots \dots \dots \\
 F_{v-1} &= A_{v-2}^{P^j(A_v)} \frac{F_v}{(1 - \sum_{s=1}^{n(a_{2v})} \tilde{P}^s(A_v)) \prod_{a_{2v}=1}^{m(a_{1v})} (1 - \sum_{s=1}^{n(a_{2v})} \tilde{P}^s)} \\
 F_v &= A_{v-1}^{P^r(A_v)} \tilde{P}^1(A_v).
 \end{aligned} \right\} (6)$$

При этом

$$A_\mu^{P^1} = \frac{A_\mu^{P^1}}{\prod_{a_{2,\mu+1}=1}^{m(a_{1,\mu+1})} (1 - \sum_{d=1}^{n(a_{2,\mu+1})} \tilde{P}^{d1})},$$

$$\mu = 1, \dots, v, k-1; \quad A_k^{\tilde{P}^k} = A_k^{P^k}; \quad k = v_{\max}.$$

Здесь символ $A_\mu^{P^j(A_v)}$ отмечает тот факт, что все элементы индексной матрицы A_μ равны соответствующим элементам матрицы A_v в выражении (5).

В качестве условия нормировки выступает $\sum_{i=1}^n A_0^{P^i} \tilde{P}^i = 1$, где

$$A_0^{\tilde{P}^1} = \frac{A_0^{P^1}}{\prod_{a_{21}=1}^{m(a_{11})} (1 - \sum_{b=1}^{n(a_{21})} \tilde{P}^b(A_1))}.$$

Рассмотренный алгоритм оценки трудоемкости программ для случая, когда число преемников r^{σ_j} оператора $O_j \in U$ не превышает двух, реализован на вычислительной машине. В работе [4] приведены основные особенности соответствующих программ. В основу реализации на ЭВМ более общего случая, исследованного в данной работе, можно положить решающие схемы, опробованные в [4]. Отличия алгоритмов незначительны и касаются только процедуры разметки путей.

§ 3. Оценка параметров операторных схем

Рассмотрим задачи, названные в § I, в порядке их постановки.

а) Найдем время T_0 первого (после запуска ветви) обращения к заданному оператору $O \in U$.

Для этих целей в схеме U исследуемой ветви р-программы выделяем оператор запуска в качестве начала схемы и устраняем все передачи управления r^{σ} , исходящие из заданного $O \in U$. Последний оператор можно рассматривать в качестве конца схемы. Далее:

- перечисляем простые пути из начала схемы в заданный $O \in U$, что дает множество Ψ_0 путей ранга ноль (как отмечалось, в качестве начала схемы может быть оператор, отличный от исходного);
- перечисляем простые циклы преобразованной, как отмечено ранее, схемы, что дает множество Φ_0 циклических путей;
- реализуем процедуру ранжировки, взяв за исходные множества Ψ_0 и Φ_0 , что приводит к множеству Γ_0 размеченных путей;
- производим анализ множества размеченных путей Γ_0 и строим в соответствии с (3) формальное описание случайной величины T_0 - времени достижения заданного $O \in U$ из начала схемы и в соответствии с (4) распределение вероятностей $P(T_0)$;
- производим оценку математического ожидания времени достижения $O \in U$, как это предлагается формулой (5).

При необходимости можно найти оценку вероятности достижения заданного оператора при реализации схемы по формуле

$$\tilde{P}(0) = \sum_{A_0, \varphi^1 \in \Psi_0} A_0 \tilde{P}^1,$$

а также верхнюю и нижнюю границы времени достижения такого $O \in U$, если в формуле (2) просуммировать не τ_j , а τ_j^* и τ_j' соответственно.

б) Найдем период α_0 повторного обращения к заданному оператору $0 \in \mathcal{U}$. В соответствии с принятой трактовкой реализации схемы величина α_0 является также случайной. Ее поиск можно организовать следующим образом:

- перечисляем простые циклы исходной схемы $\mathcal{U}$, что дает множество Φ циклических путей ϕ ;

- выделяем из Φ циклы, которые содержат один из элементов x^σ , отмечающих передачи управления из заданного $0 \in \mathcal{U}$, и производим циклическую перестановку элементов этих циклов таким образом, чтобы первыми стояли отмеченные (в случае отсутствия таких циклов $\alpha_0 = 0$);

- исключаем выделенные циклы из множества Φ , что дает множество Φ_0 , и образуем из них множество Ψ_0 путей нулевого ранга;

- далее реализуем процедуру ранжировки и получаем формальное описание случайной величины α_0 аналогично предыдущему случаю.

в) Найдем математическое ожидание числа обращений к заданному оператору M_0 .

Здесь необходимо отметить следующее свойство множества Γ размеченных путей схемы $\mathcal{U}$: отдельному циклу исходного множества Φ можно сопоставить подмножество $\Gamma_\phi \subset \Gamma$ путей таких, что прообразом каждого $\phi \in \Gamma_\phi$ является данный цикл $\phi \in \Phi$. Тогда математическое ожидание числа реализаций цикла ϕ можно найти как

$$N_\phi = \sum_{A_\nu \phi^1 \in \Gamma_\phi} A_\nu N^1,$$

где $A_\nu N^1$ - взвешенное число реализаций пути $A_\nu \phi^1 \in \Gamma$, которое получаем по формуле (6) при опущенном $A_\nu t^1$.

Заданный оператор $0 \in \mathcal{U}$ может быть связан с несколькими циклами $\phi_s \in \Phi$ ($s = 1, \dots, d$). Тогда каждому из них соответствует свое множество Γ_{ϕ_s} , что позволяет образовать сводное множество

$\Gamma_0 = \Gamma_{\phi_1} \cup \dots \cup \Gamma_{\phi_d}$. В соответствии с этим математическое ожидание числа обращений к заданному оператору есть

$$M_0 = \sum_{s=1}^d N_{\phi_s}.$$

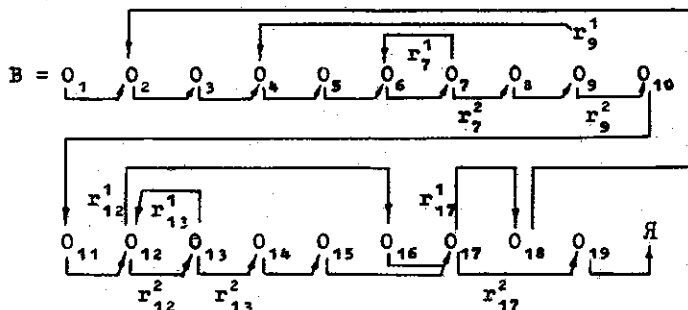
При наличии ветвлений в схеме алгоритма можно ввести множество $Z^i \subset \Gamma$, куда входят циклы, порождаемые i -м путем нулевого ранга. Из пересечения множеств Z^i и Γ_0 образуем множество Γ_0^i , т.е. $\Gamma_0^i = Z^i \cap \Gamma_0$. Тогда

$$N_{\Phi}^i = \left(\sum_{A_v \Phi^i \in \Gamma_0^i} A_v N^i \right) / A_0 \tilde{R}^i$$

есть число реализаций заданного оператора при условии i -й ветви алгоритма.

§ 4. Анализ программы решения уравнений

Рассмотрим программу решения системы линейных уравнений методом последовательных приближений [7]. В этом случае операторную схему ветви p -программы можно представить в виде



где

O_1 - оператор, включающий строки программы [7] с номерами 10-70;

$O_2 - O_{19}$ - операторы, отмечающие строки программы [7] с номерами 80-230 соответственно;

$Я$ - конец схемы (оператор STOP строки 240 [7]).

Вероятности переходов определяются содержанием проверяемых условий логических операторов программы. Для арифметических операторов A , очевидно, $P(A) = 1$

Проведем анализ содержания логических операторов (таких O_{6B} , выход которых неоднозначен).

O_7 отмечает оператор NEXT линии 130 программы [7]; вероятность p_7^2 реализовать связь r_7^2 при условии достижения O_7 можно найти из формулы $p_7^2 = 1/N$, где N взято из заголовка данного цикла и вероятность p_7^1 - из условия $p_7^2 + p_7^1 = 1$.

Подобным образом можно задать вероятности выхода из прочих аналогичных циклов (операторы O_9 , O_{13}). Большее внимания требует задание вероятности перехода из операторов типа IF и GSR. Здесь точность задания вероятностей определяется полнотой наших знаний о границах изменения, характере и динамике исследуемых величин.

Содержание оператора O_{12} составляет строка 170 программы [7]: IF $|X(J+Z-1) - Y(J)| \geq E$ THEN... Вероятность p_{12}^1 реализовать передачу управления r_{12}^1 определяется относительными значениями элементов массивов X и Y , значением индексов J и Z , а также параметром E . Возможный вариант формулы вероятности перехода по r_{12}^1 : $p_{12}^1 = (\bar{X} - \bar{Y}) / ((\bar{X} - \bar{Y}) + E)$, $p_{12}^2 = 1 - p_{12}^1$, где $\bar{X}$, $\bar{Y}$ - средние значения соответствующих массивов.

Оператор O_{17} включает строку 220 программы [7]: GSR F,...; т.е. системный условный переход, который определяется, согласно результатам (1) и (2) работы [8], требуемой точностью решения. Точность решения отмеченных систем уравнений представляет собой нелинейную функцию числа итераций n . Если такую оценку можно получить либо априори, либо из опыта предыдущих решений, то $p_{17}^2 = 1/n$, $p_{17}^1 = 1 - p_{17}^2$.

Время реализации операторов определяется их содержанием и быстродействием соответствующей элементарной машины. При этом операторам COSUB и CALL сопоставляется время реализации тех подпрограмм, к которым производится обращение.

Положим, требуется найти временные параметры, характеризующие обращение к оператору O_{17} (операция GSR F ... строка 220 [7]) при условии запуска данной ветви из исходного оператора $O_1 \in B$.

а) В соответствии с рекомендациями §3 п. "а", устраним передачи управления r_{17}^1 и r_{17}^2 , исходящие из O_{17} , что приводит к новой операторной схеме B' .

Выполнение последующих этапов процедуры поиска времени первого обращения к заданному оператору позволяет получить следующие результаты:

- множество $\Psi(O_{17})$ путей ранга ноль из начала схемы B' к оператору O_{17} :

$$\Psi(O_{17}) = \{\phi_1, \phi_2\}; \quad \phi_1 = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9 r_{10} r_{11} r_{12} r_{13} r_{14} r_{15};$$

$$\phi_2 = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 r_9 r_{10} r_{11} r_{12} r_{16};$$

- множество $\Phi(O_{17})$ циклических путей

$$\Phi(O_{17}) = \{\varphi_1 = r_6 r_7^1, \quad \varphi_2 = r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^1, \quad \varphi_3 = r_{12}^2 r_{13}^1\};$$

- множество $\Gamma(O_{17})$ размеченных путей

$$\Gamma(O_{17}) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi^1; \varphi^2; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 13 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 - \varphi_3; \\ \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 11 \\ 97 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 21 \\ 97 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 - \varphi_1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 - \varphi_2 \end{array} \right\},$$

где циклам $\varphi \in \Gamma(O_{17})$ сопоставлены (через тире) исходные $\varphi \in \Phi(O_{17})$;

- наконец, время первого обращения к O_{17} :

$$T(O_{17}) = \left\{ \begin{array}{l} t_1 + t_1^{(1)} n_1^{(1)} + t_1^{(3)} n_1^{(3)} + t_3^{(1)} n_3^{(1)} + t_2^{(1)} n_2^{(1)}; \\ t_2 + t_1^{(2)} n_1^{(2)} + t_1^{(4)} n_1^{(4)} + t_1^{(2)} n_1^{(2)} + t_3^{(2)} n_3^{(2)} + t_2^{(2)} n_2^{(2)}; \end{array} \right. \quad (7)$$

с распределением вероятностей

$$P[T(O_{17})] = \left\{ \begin{array}{l} P_1 \cdot (P_1^{(1)})^{n_1^{(1)}} \cdot ((P_1^{(3)})^{n_1^{(3)}} \cdot P_2^{(1)})^{n_2^{(1)}} \cdot (P_3^{(1)})^{n_3^{(1)}} \cdot (P_2^{(1)})^{n_2^{(1)}}; \\ P_2 \cdot (P_2^{(2)})^{n_2^{(2)}} \cdot ((P_1^{(4)})^{n_1^{(4)}} \cdot P_2^{(2)})^{n_2^{(2)}} \cdot (P_3^{(2)})^{n_3^{(2)}} \cdot (P_2^{(2)})^{n_2^{(2)}}; \end{array} \right. \quad (8)$$

- и математическое ожидание

$$E[T(O_{17})] = \sum_{i=1}^2 P_i (t_i + t_1^{(1)} N_1^{(1)} + t_1^{(i+2)} N_1^{(i+2)} N_2^{(1)} + t_2^{(1)} N_2^{(1)} + t_3^{(1)} N_3^{(1)}), \quad (9)$$

где

$$N_1^{(1)} = \frac{P_1^{(1)}}{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}; \quad N_1^{(i+2)} = \frac{P_1^{(i+2)}}{\alpha_1 \beta_1^2 \gamma_1}; \quad N_2^{(1)} = \frac{P_2^{(1)}}{\alpha_1 \beta_1^2 \gamma_1}; \quad N_3^{(1)} = \frac{P_3^{(1)}}{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1^2};$$

$$\alpha_i = 1 - P_1^{(i)}; \quad \beta_i = 1 - P_2^{(i)} / \alpha_i; \quad \gamma_i = 1 - P_3^{(i)} \quad (i=1,2),$$

а также $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 13 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 \in \Gamma(O_{17})$ обозначены через $\varphi_3^1, \varphi_3^2; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 11 \\ 97 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 21 \\ 97 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 -$ через $\varphi_1^1, \varphi_1^{(2)}, \varphi_1^{(3)}, \varphi_1^{(4)}$ и $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 -$ через $\varphi_2^1, \varphi_2^{(2)}$ (а значит, и соответствующая частота реализации - n , время t и условная вероятность P однократной реализации).

Вероятность достигнуть оператор O_{17} при реализации схемы в равна

$$P(O_{17}) = \sum_{i=1}^2 \frac{P_i}{\alpha_i \beta_i \gamma_i} = 1. \quad (10)$$

Последнее достаточно просто доказывается при условии $\sum_{j=1}^n \sigma_j = 1$.

б) Используя рекомендации §3 п. "б", получаем:

- множество циклов исходной схемы В

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = r_6 r_7^1; \quad \varphi_2 = r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^1; \quad \varphi_3 = r_{12}^2 r_{13}^1; \\ \varphi_4 = r_{17}^1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^2 r_{10} r_{11} r_{12}^2 r_{13}^2 r_{14} r_{15}; \\ \varphi_5 = r_{17}^1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^2 r_{10} r_{11} r_{12}^1 r_{16}; \end{array} \right\}$$

- множество $\Psi(O_{17})$ путей нулевого ранга $\Psi(O_{17}) = \{\varphi_4, \varphi_5\}$;

- множество $\Phi(O_{17})$ циклов $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Последующие действия производятся аналогично предыдущему случаю и приводят к весьма схожим результатам (отличие - в трудоемкости и вероятности однократной реализации путей $\varphi \in \Psi(O_{17})$).

в) Найдем математическое ожидание числа обращений к оператору O_{17} . Для этих целей исследуем множество

$$\Psi = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^2 r_{10} r_{11} r_{12}^2 r_{13}^2 r_{14} r_{15} r_{17}^2 r_{19}; \\ \varphi_2 = r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^2 r_{10} r_{11} r_{12}^1 r_{16} r_{17}^2 r_{19}; \end{array} \right\}$$

простых путей из начала схемы В в конец и множество

$$\Phi = \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = r_6 r_7^1; \quad \varphi_2 = r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^1; \quad \varphi_3 = r_{12}^2 r_{13}^1; \\ \varphi_4 = r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^2 r_{10} r_{11} r_{12}^2 r_{13}^2 r_{14} r_{15} r_{17}^1; \\ \varphi_5 = r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7^2 r_8 r_9^2 r_{10} r_{11} r_{12}^1 r_{16} r_{17}^1. \end{array} \right\}$$

простых циклов. Разметка путей $\varphi \in \Phi$ приводит нас к множеству

$$\Gamma = \left\{ \begin{array}{l} \varphi^1; \varphi^2; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 13 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 13 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 13 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 - \varphi_3; \\ \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 - \varphi_1; \\ \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 - \varphi_2; \\ \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \varphi^1 - \varphi_4; \quad \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \varphi^2; \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \varphi^2 - \varphi_5. \end{array} \right.$$

Здесь циклы $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^j$ ($i, j = 1, 2$) связаны с оператором O_{17} . Преобра-
 зами таких циклов являются $\Phi_4, \Phi_5 \in \Phi$ что дает сводное множе-
 ст-
 во $\Gamma(O_{17}) = \left\{ \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2 \right\}$.

Упростим индексацию циклов $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1$ и $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2 \in \Gamma$,
 переобозначив их через Φ_4^1, Φ_4^2 и Φ_5^1, Φ_5^2 соответственно; циклов
 $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2$ - через $\Phi_2^1, \Phi_2^{(2)}$,
 $\Phi_2^{(3)}, \Phi_2^{(4)}, \Phi_2^{(5)}, \Phi_2^{(6)}$; циклов $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1$,
 $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2$ - через $\Phi_1^1, \Phi_1^{(2)}, \dots$,
 $\Phi_1^{(7)}, \Phi_1^{(8)}$ и, наконец, циклов $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 13 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 13 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^1$,
 $\left| \begin{smallmatrix} 1 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2, \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 17 \end{smallmatrix} \right| \Phi^2 \in \Gamma$ - через $\Phi_3^1, \Phi_3^{(2)}, \Phi_3^{(3)}, \Phi_3^{(4)}, \Phi_3^{(5)}, \Phi_3^{(6)}$.

Тогда математическое ожидание числа обращений к оператору
 O_{17} есть

$$M(O_{17}) = \frac{P_1 (P_4^1 + P_5^1)}{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1^2} + \frac{P_2 (P_4^{(2)} + P_5^{(2)})}{\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2^2} =$$

(после учета совпадающих значений вероятности однократной реали-
 зации циклов)

$$= \frac{(P_1 + P_2) (P_4^1 + P_5^1)}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta^2} = \left(\frac{P_1 + P_2}{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta} \right) \cdot \frac{P_4^1 + P_5^1}{\delta} = \frac{P_4^1 + P_5^1}{\delta}, \quad (II)$$

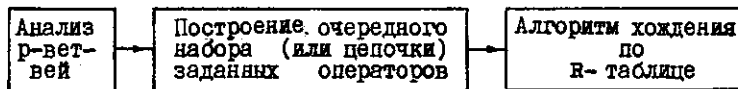
где

$$\alpha_i = 1 - P_1^{(i)} = \alpha; \quad \beta_i = 1 - P_2^{(i)} = \beta; \quad \gamma_i = 1 - P_3^{(i)} = \gamma; \quad \delta_i = 1 - \frac{P_4^{(i)} + P_5^{(i)}}{\beta_1 \gamma_1} = \delta, \quad i = 1, 2.$$

Сейчас не представляет особого труда проварьировать в форму-
 лах (7)-(II) вероятности передач управления, а также трудоем-
 кость операторов схемы и найти пределы изменения найденных па-
 раметров.

§5. Заключение

Рассмотренная в данной работе методика анализа схем программ и полученные результаты позволяют выявить количественные характеристики ветвей р-программы, что в свою очередь позволяет строить и исследовать модель взаимодействий р-ветвей. Сейчас общую схему исследования таких взаимодействий можно представить (имея в виду также результаты работы [1]) в виде



Остановимся на основных возможностях построения наборов (или цепочек) операторов, определяющих взаимодействие р-ветвей.

Для определенности последующих рассуждений сопоставим каждой ветви 2_i ($i = 1, \dots, l$) р-программы множество A_i операторов, определяющих какое-либо системное взаимодействие, и множество A_i операторов, из которых возможен запуск данной i -й ветви.

Методика анализа ветвей, изложенная в §3 пп. "а" и "б", позволяет (на основании результата (3)) каждому $O_j \in A_i$ ($j = 1, \dots, m(i)$) поставить в соответствие множество T_j случайных величин $t_{j,k}$ — время достижения данного оператора при условии запуска ветви из оператора $O_k \in A_i$ ($k=1, \dots, n(i)$), а также (на основании результата (4)) распределения условных вероятностей $P(t_{j,k}) = \text{Вер}(O_j / O_k)$. Затем для выбранных моментов времени можно строить наборы команд методом статистического моделирования и получать соответствующие статистические оценки о взаимодействии ветвей р-программы. Основания для выбора отмеченных моментов времени могут быть получены из анализа множеств T_j ($j = 1, \dots, m(i)$) и вероятностей $P(t_{j,k})$, $k = 1, \dots, n(i)$.

Следующая возможность построения набора заданных операторов заключается в использовании оценок математического ожидания — результата (5). Представляющие интерес случаи рассмотрены в §3 (пп. "а", "б"). Каждому $O_j \in A_i$ ($j=1, \dots, m(i)$) сопоставим множество $\bar{T}_j$ оценок $\bar{t}_{j,k}$ — математических ожиданий времени достижения данного оператора при условии запуска ветви из оператора $O_k \in A_i$; $k = 1, \dots, n(i)$; $i=1, \dots, l$. Здесь анализ взаимодействия ветвей менее трудоемок по сравнению с предыдущим случаем.

Наконец, изложенная в §3 п."в" методика позволяет для каждой ветви найти оценку числа обращений к заданному оператору и через нее либо найти число наборов определенного вида, либо найти общее число наборов команд (или взаимодействий), которые будут иметь место при реализации данной р-программы, либо провести сопоставление тех или иных взаимодействий по различным р-ветвям.

Рассмотренные методы анализа р-ветвей, выявление их характеристик и построение наборов заданных команд являются достаточно общими и могут быть реализованы на вычислительных средствах.

Л и т е р а т у р а

1. КОЛОСОВА Ю.И., МИРЕНКОВ Н.Н. Исследование взаимодействий параллельных процессов. -В кн.: Вычислительные системы, вып. 57, Новосибирск, 1973, с. 115-124.

2. КАРП Р.М. О приложении теории графов к программированию. - В кн.: Кибернетический сборник. Вып.4. М., ИЛ, 1964, с.123-134.

3. KRAL I. One way of estimation frequencies of jumps in a program.- "Comm.ACM", 1968, v.11, N 7, p.475-480.

4. ЗНАК В.И. Алгоритмы априорной оценки времени машинной реализации программы. -"Автометрия", 1972, №1, Новосибирск, с.101-110.

5. МАРТЫНИК В.В. Выделение цепей в схеме алгоритма. -"Журнал вычисл. математики и матем. физики", 1961, т.1, № 1, с.151-162.

6. ФЕЛЛЕР В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1, М., "Мир", 1967.

7. ГРИШАЕВА Н.К., КЕРБЕЛЬ В.Г., КОЛОСОВА Ю.И. и др. Язык параллельных алгоритмов. -В кн.: Вычислительные системы, вып. 57, Новосибирск, 1973, с. 33-54.

8. МИРЕНКОВ Н.Н. Параллельные алгоритмы для решения задач на однородных вычислительных системах. -В кн.: Вычислительные системы, вып. 57, Новосибирск, 1973, с. 3-32.

Поступила в ред.-изд.отд.

12 января 1978 года