МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 75

УДК 518

О СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНАХ

А. Имамов

Пусть X, Y, Z – действительные гильбертовы пространства, T- и A-линейные непрерывные операторы, действующие из X в Y и из X в Z. Тогда подпространство сплайнов $S = S[X,T,A]$ определяется так [1,2]:

$$S=\{\sigma\in X \mid \langle T\sigma, Tx\rangle_Y=0, \forall x\in \mathrm{Ker}A\} =\{\sigma\in X \mid T^*T\sigma = A^*\lambda,\ \lambda\in Z\},$$

где $\langle \cdot,\cdot \rangle_Y$ – скалярное произведение в Y, $\mathrm{Ker}A$ – ядро оператора A, T^* – сопряженный оператор к T.

Известно, что интерполяционный сплайн $\sigma=\sigma(T,A,z)$ и сглаживающий сплайн $\sigma^\rho = \sigma^\rho(T,A,z)$, где

$$\sigma = \underset{x\in A^{-1}(z)}{\mathrm{argmin}} \|Tx\|_Y^2, \quad A^{-1}(z) = \{x\in X \mid Ax=z\} \neq \emptyset, \tag{1}$$

$$\sigma^\rho = \underset{x\in X}{\mathrm{argmin}}\{\|Tx\|_Y^2 + \rho\|Ax-z\|_Z^2\}, \quad \rho > 0, \tag{2}$$

принадлежат подпространству сплайнов $S = S[X,T,A]$.

Пусть области значений $\mathrm{Im}T$ и $\mathrm{Im}A$ операторов T и A замкнуты. Тогда для того чтобы для каждого $z\in \mathrm{Im}A$ существовали сплайны σ и σ^ρ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\mathrm{Ker}T + \mathrm{Ker}A = \overline{\mathrm{Ker}T + \mathrm{Ker}A}, \tag{3}$$

где черта над множеством означает операцию замыкания. Кроме того, если

$$\mathrm{Ker}T \cap \mathrm{Ker}A = \{0\}, \tag{4}$$

то и интерполяционный сплайн, и сглаживающий сплайн для каждого $z\in \mathrm{Im}A$ единствен.

Условия (3), (4) эквивалентны неравенствам из [2]

$$C_1\|x\|_X^2 \le |x|_X^2 = \|Tx\|_Y^2 + \|Ax\|_Z^2 = |x|_X^2 \le C_2\|x\|_X^2 , \quad (5)$$

где $0 < C_1 \le C_2 < \infty$.

Если выполнены условия (3), (4), то сплайн $\sigma = \sigma(T,A,z)$ – это единственный элемент из $S = S[X,T,A]$, удовлетворяющий условию интерполяции $A\sigma = z$, а сплайн $\sigma^\rho = \sigma^\rho(T,A,z)$ – условию $T^*T\sigma^\rho + \rho A^*A\sigma^\rho = \rho A^*z$ или же равносильному условию $A\sigma^\rho + \rho^{-1}D\sigma^\rho = z$, где $D=(A^*)^{-1}T^*T$. Оператор D является линейным непрерывным, действующим из S в Z. Это вытекает из того, что $T, T^*, (A^*)^{-1}$ – линейные непрерывные операторы (так как сужение оператора A на S непрерывно обратимо, т.е. $A^{-1} = (A|_S)^{-1}$ непрерывно и, значит, $(A^*)^{-1}$ тоже непрерывно).

Рассмотрим теперь два множества:

$$I_{z\delta} = \{x \in X \,|\, \|Ax-z\|_Z \le \delta\} \ne \emptyset, \quad \delta \ge 0,$$

$$Q_\tau = \{x \in X \,|\, \|Tx\|_Y \le \tau\} \ne \emptyset, \quad \tau \ge 0.$$

Элемент $\sigma_\delta = \sigma_\delta(T,A,z)$, являющийся решением задачи

$$\sigma_\delta = \operatorname*{argmin}_{x \in I_{z\delta}} \|Tx\|_Y^2, \quad (6)$$

назовем сглаживающим сплайном типа I.

Элемент $\sigma_\tau = \sigma_\tau(T,A,z)$, являющийся решением задачи

$$\sigma_\tau = \operatorname*{argmin}_{x \in Q_\tau} \|Ax-z\|_Z^2, \quad (7)$$

назовем сглаживающим сплайном типа II, или квазирешением.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ – система из N элементов пространства X; $\delta = [\delta_1, \ldots, \delta_N]$, $z = [z_1, \ldots, z_N]$ – векторы из N вещественных чисел, причем $\delta_1 \ge 0, \ldots, \delta_N \ge 0$, т.е. $\delta \in R_+^N$, $z \in R^N$. Тогда можно рассматривать задачу

$$I_{z\delta} = \{x \in X \,|\, |\langle x, \varphi_i\rangle_X - z_i| \le \delta_i, \ i = 1, \ldots, N\} \ne \emptyset,$$
$$\sigma_\delta = \operatorname*{argmin}_{x \in I_{z\delta}} \|Tx\|_Y^2 . \quad (8)$$

Задачи типа (6) рассматривались в работах [3-10]. Задачи, связанные с (7), имеются в работах [11,12]. Из задач, связанных с (2), отметим работы [13-15]. Результаты исследования задач типа (1),(2), (6)-(8) подытожены в монографиях [1,16-18].

Целью нашей статьи является: 1) уточнение некоторых известных результатов по решению задач (6),(7); 2) обобщение некоторых частных результатов; 3) упрощение ранее полученных доказательств основных утверждений. Об уточнениях, обобщениях и упрощениях мы расскажем в соответствующих местах. Мы получим теорему существования для сплайнов σ_δ и σ_τ в терминах замкнутости множеств $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Ker} T + I_{z\delta}$ и $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A + Q_\tau$ соответственно. Мы докажем теорему характеризации для сплайнов σ_δ и σ_τ, на основе которой установим их единственность и уточним условия существования. В частности, мы покажем, что сплайны σ_δ и σ_τ принадлежат подпространству сплайнов S.

1. Теоремы существования

ТЕОРЕМА 1. Если множества $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Ker} T + I_{z\delta}$ замкнуты, то сглаживающий сплайн σ_δ существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in I_{z\delta}$ и $y = Tx$. Тогда ясно, что σ_δ существует тогда и только тогда, когда существует $y_\delta \in TI_{z\delta}$ такое, что

$$y_\delta = \operatorname*{argmin}_{y \in TI_{z\delta}} \|y\|_Y .$$

Множество $TI_{z\delta}$ выпукло. Если оно еще и замкнуто, то y_δ существует. Можно доказать, что если $\operatorname{Im} T$ замкнуто, то $TI_{z\delta}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} T + I_{z\delta}$ замкнуто [1].

Приведем доказательство этого факта. Пусть $\tilde{T}$ – сужение T на $(\operatorname{Ker} T)^\perp$, где $(\operatorname{Ker} T)^\perp$ – ортогональное дополнение к $\operatorname{Ker} T$. Тогда оператор $\tilde{T}^{-1}: \operatorname{Im} T \to (\operatorname{Ker} T)^\perp$ непрерывен и упомянутое утверждение вытекает из равенств $TI_{z\delta} = \tilde{T}I_{z\delta} = (\tilde{T}^{-1})^{-1}((I_{z\delta} + \operatorname{Ker} T) \cap (\operatorname{Ker} T)^\perp)$.

Аналогично доказывается

ТЕОРЕМА 2. Если множества $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{Ker} A + Q_\tau$ замкнуты, то сглаживающий сплайн σ_τ существует.

В дальнейшем мы уточним теоремы существования для сглаживающих сплайнов $\sigma_\delta, \sigma_\tau$. Будет доказано, что для существования сплайнов $\sigma_\delta, \sigma_\tau$ достаточны условия (3),(4) или (5).

2. Теоремы характеризации

ТЕОРЕМА 3. Пусть сплайн σ_δ существует. Тогда

$$\sigma_\delta \in \mathrm{Ker}T \cap I_{z\delta}, \tag{9}$$

или же

$$\sigma_\delta = \sigma^\rho(T,A,z), \tag{10}$$

$$\| A\sigma^\rho - z\|_Z = \delta . \tag{11}$$

Если $\mathring{I}_{z\delta} = \{x\in X \mid \|Ax-z\|_Z < \delta\} \neq \emptyset$, то элемент σ_δ, удовлетворяющий условию (9) или условиям (10), (11), есть решение задачи (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к задаче (6) теорему Куна-Таккера [19], согласно которой если σ_δ - решение задачи (6), то существует множитель Лагранжа l такой, что

$$l \geq 0, \quad l(\| A\sigma_\delta - z\|_Z^2 - \delta^2) = 0,$$

$$\sigma_\delta = \underset{x\in X}{\mathrm{argmin}}\{\| Tx\|_Y^2 + l(\| Ax-z\|_Z^2 - \delta^2)\}.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\sigma_\delta = \underset{x\in X}{\mathrm{argmin}}\ \{\| Tx\|_Y^2 + l\|Ax-z\|_Z^2\} = \sigma^l(T,A,z).$$

Таким образом, если $l=0$, то $\sigma_\delta \in \mathrm{Ker}T \cap I_{z\delta}$. Если же $l>0$, то $\sigma_\delta = \sigma^\rho(T,A,z)$ для $\rho>0$ такого, что $\|A\sigma^\rho - z\|_Z=\delta$.

Вторая часть теоремы 3 является следствием достаточной части теоремы Куна-Таккера.

Впервые соотношения (9)-(11) получены Райншом [7] для одного частного случая; соотношения (10),(11) имеются в работах [18, 20, 21].

ТЕОРЕМА 4. Пусть сплайн σ_τ существует. Тогда

$$\sigma_\tau \in A^{-1}(z) \cap \Omega_\tau, \tag{12}$$

или же

$$\sigma_\tau = \sigma^{1/\rho}(T, A, z) \ , \tag{13}$$

$$\| T\sigma^{1/\rho} \|_Y = \tau \ . \tag{14}$$

Если $\mathring{\Omega}_\tau = \{x \in X \,|\, \| Tx \|_Y < \tau\} \neq \emptyset$, то элемент σ_τ, удовлетворяющий условию (12) или условиям (13), (14), есть решение задачи (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предыдущей теоремы, и мы его опускаем.

Отметим, что соотношения (12)-(14) найдены Шенбергом [12] для одного частного случая. Эквивалентные соотношения к (13),(14) имеются в работах [18,20,21].

Переходим теперь к задаче (8). Она полностью изучена Лораном [1]. Теорему существования мы привели в п.1. Используя довольно сложный аппарат, Лоран доказал теорему характеризации. Мы приведем ее в несколько ином виде и дадим простое доказательство.

ТЕОРЕМА 5. Пусть сплайн σ_δ (8) существует. Тогда

$$\sigma_\delta \in \operatorname{Ker} T \cap I_{z\delta}, \tag{15}$$

или же

$$T^*T\sigma_\delta = \sum_{i=1}^{N} l_i \varphi_i \ , \tag{16}$$

$$l_i \le 0, \text{ если } \langle \sigma_\delta, \varphi_i \rangle_X = z_i + \delta_i , \tag{17}$$

$$l_i \ge 0, \text{ если } \langle \sigma_\delta, \varphi_i \rangle_X = z_i - \delta_i , \tag{18}$$

$$l_i = 0, \text{ если } | \langle \sigma_\delta, \varphi_i \rangle_X - z_i | < \delta_i \ . \tag{19}$$

Если $\mathring{I}_{z\delta} = \{x \in X \,\big|\, |\langle x, \varphi_i \rangle_X - z_i| < \delta_i, i=1,\dots,N\} \neq \emptyset$, то элемент σ_δ, удовлетворяющий условию (15) или условиям (16) - (19), есть решение задачи (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть σ_δ - решение задачи (8). Тогда найдутся множители Лагранжа $l_{1i} \ge 0$, $l_{2i} \ge 0$, $i = 1,\dots,N$, такие, что

$$l_{1i}(\langle\sigma_\delta,\varphi_i\rangle_X - z_i - \delta_i) = 0, \quad l_{2i}(z_i - \delta_i - \langle\sigma_\delta,\varphi_i\rangle_X) = 0 .$$

$$\sigma_\delta = \operatorname{argmin}\{\| Tx \|_Y^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} l_{1i}(\langle x,\varphi_i\rangle_X - z_i - \delta_i) + \sum_{i=1}^{N} l_{2i}(z_i - \delta_i - \langle x,\varphi_i\rangle_X)\}. \quad (20)$$

Ясно, что если $l_{1i} = l_{2i} = 0,\ i = 1,\dots,N$, то $\sigma_\delta \in \operatorname{Ker}T \cap I_{z\delta}$. Если для некоторого i справедливо равенство $\langle\sigma_\delta, \varphi_i\rangle_X = z_i + \delta_i$, то $l_{1i} \geq 0$ и $l_{2i} = 0$, и, наоборот, если для некоторого i имеет место равенство $\langle \sigma_\delta, \varphi_i \rangle_X = z_i - \delta_i$, то $l_{2i} \geq 0$ и $l_{1i} = 0$. Если же $|\langle \sigma_\delta, \varphi_i \rangle_X - z_i| < \delta_i$, то $l_{1i} = l_{2i} = 0$.

Из равенства (20) легко получается, что (см. [19])

$$T^*T\sigma_\delta = \sum_{i=1}^{N}(l_{2i} - l_{1i})\varphi_i.$$

Обозначая $l_i = l_{2i} - l_{1i}$ и учитывая свойства коэффициентов l_{1i}, l_{2i}, получаем соотношения (16)-(19).

Вторая часть теоремы 5 является достаточной частью теоремы Куна-Такера.

Отметим, что условия (15)-(19) гарантируют принадлежность сплайна σ_δ (8) подпространству сплайнов

$$S = \{\sigma \in X \mid \langle T\sigma, Tx\rangle_Y = 0,\ \forall x \in [\operatorname{lin}(\varphi_1,\dots,\varphi_N)]^\perp\},$$

где $\operatorname{lin}(\varphi_1,\dots,\varphi_N)$ – линейная оболочка элементов $\varphi_1,\dots,\varphi_N$.

3. Единственность сглаживающих сплайнов

Как видно из теорем 3 и 4, единственность сглаживающих сплайнов σ_δ и σ_τ зависит от многих факторов. Во-первых, если $L = \operatorname{Ker}T \cap I_{z\delta} \neq \emptyset$ и $M = A^{-1}(z) \cap \Omega_\tau \neq \emptyset$, то L и M – множества решений задач (6) и (7). Во-вторых, если $L = \emptyset$ и $M = \emptyset$, то единственность сплайнов σ_δ и σ_τ зависит от единственности $\sigma^\rho = \sigma^\rho(T, A, z)$ для каждой пары $\rho > 0, z \in Z$ и, кроме того, от единственности решений уравнений (11) и (14). Предполагая, что $L = \emptyset$ и $M = \emptyset$, установим условия единственности сглаживающих сплайнов σ_δ и σ_τ.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть выполнены условия существования и единственности сплайна $\sigma^\rho = \sigma^\rho(T,A,z)$, а также условия суще-*

ствования сплайна σ_δ и, кроме того, $\mathrm{Ker}T \cap I_{z\delta} = \emptyset$. Тогда если $\delta \in [0, a]$, где

$$a = \min_{x \in \mathrm{Ker}T} \| Ax - z \|_Z ,$$

то сглаживающий сплайн σ_δ единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см.[2]), что

$$\lim_{\rho \to 0} \|\sigma^\rho - \bar{\sigma}\|_X = \lim_{\rho \to 0} \|\sigma^\rho - \sigma\|_X = 0 , \qquad (21)$$

где

$$\bar{\sigma} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathrm{Ker}T} \| Ax - z \|_Z .$$

Функция (согласно условию $A\sigma^\rho + \rho^{-1} D\sigma^\rho = z$)

$$\varphi(\rho) = \| A\sigma^\rho - z \|_Z = \rho^{-1} \| D\sigma^\rho \|_Z$$

непрерывна на отрезке $[0, \infty]$ и монотонно убывает. Из равенств (21) вытекает, что $\mathrm{Im}\,\varphi(\rho) = [0, a]$. Тогда уравнение (11) для $\delta \in [0, a]$ имеет единственное решение $\rho = \rho(\delta)$. Отсюда следует, что если сплайн $\sigma^\rho = \sigma^\rho(T, A, z)$ единствен и $\delta \in [0, a]$, то и сплайн σ_δ единствен.

ТЕОРЕМА 7. Пусть выполнены условия существования и единственности сплайна $\sigma^\rho = \sigma^\rho(T, A, z)$, а также условия существования сплайна σ_τ, кроме того, $A^{-1}(z) \cap Q_\tau = \emptyset$. Тогда если $\tau \in [0, b]$, где $b = \|T\sigma\|_Y$, $\sigma \in S$, $A\sigma = z$, то сглаживающий сплайн σ_τ единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$\gamma(\rho) = \| T\sigma^{1/\rho} \|_Y = \| T(\rho T^* T + A^* A)^{-1} A^* z \|_Y$$

непрерывна на отрезке $[0, \infty]$ и монотонно убывает. Остальное очевидно.

Единственность сплайнов σ_δ и σ_τ ранее была установлена лишь для обратимых операторов T и A [16].

Условия, обеспечивающие единственность решения задачи (8), приведены в [1]: (а) $\mathrm{Ker}T \cap I_{z\delta} = \emptyset$; (б) $\mathrm{Ker}T \bigcap_{i=1}^{s} \mathrm{Ker}\,\varphi_i = \{0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 3 и 6 и 4 и 7 (попарно) могут быть использованы для выяснения существования сплайнов соответственно σ_δ и σ_τ. В самом деле, пусть $\mathring{I}_{z\delta} \neq \emptyset, \delta \in [0,a]$ и $\mathring{\Omega}_\tau \neq \emptyset, \tau \in [0,b]$, кроме того, сглаживающий сплайн $\sigma^\rho = \sigma^\rho(T,A,z)$ существует и единствен. Тогда сплайны σ_δ и σ_τ существуют.

ПРИМЕР. Пусть Ω – звездная область из R^n, m-целое положительное число такое, что $2m > n$. В пространстве С.Л.Соболева $X = W_2^m(\Omega)$ рассмотрим операторы

$$T = \left[\sqrt{\frac{m!}{p_1!\ldots p_n!}}\, D^{p_1\ldots p_n}_{t_1\ldots t_n},\ p_1+\ldots+p_n = m\right]: X \to L_2(\Omega)\times\ldots\times L_2(\Omega),$$

$$A = [\langle\cdot,\ \varphi_i\rangle_X,\ \ i = 1,\ldots,N]: X \to R^N,$$

где $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ – система функций из X такая, что $\langle x,\varphi_i\rangle_X = x(a_i)$, $a_i \in R^n$, $i = 1,\ldots,N$.

Известно [22], что в данном случае подпространство сплайнов S содержит элементы вида

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i G(t-a_i) + q(t), \tag{22}$$

где $G(t) = |t|^{2m-n}$, если n нечетно, $G(t) = |t|^{2m-n}\ln|t|$, если n четно и

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i q(a_i) = 0, \quad \forall q(t) \in \operatorname{Ker} T.$$

Известно также, что $\operatorname{Im}T = \overline{\operatorname{Im}T}$, $\operatorname{Im}A = \overline{\operatorname{Im}A} = R^N$, $\operatorname{Ker}T + \operatorname{Ker}A = \overline{\operatorname{Ker}T + \operatorname{Ker}A}$. Если $\operatorname{Ker}T \cap \operatorname{Ker}A = \{0\}$, тогда сглаживающий сплайн σ^ρ существует и единствен. Таким образом, согласно замечанию (см. выше), если $\mathring{I}_{z\delta} \neq \emptyset$, $\delta \in [0,a]$ и $\Omega_\tau \neq \emptyset$, $\tau \in [0,b]$, то сплайны σ_δ и σ_τ существуют. Если, кроме того, $\operatorname{Ker}T \cap I_{z\delta} = \emptyset$ и $A^{-1}(z) \cap \Omega_\tau = \emptyset$, то сплайны σ_δ и σ_τ имеют вид (22).

4. Свойства вспомогательных функций

Рассмотрим более подробно свойства вспомогательных функций $\varphi(\rho)$, $\gamma(\rho)$ с целью выяснения возможности применения метода Ньютона к уравнениям $\varphi(\rho) = \delta$, $\gamma(\rho) = \tau$.

Предположим, что множества $\operatorname{Im}T$, $\operatorname{Im}A$ замкнуты и выполнены условия (3), (4). Тогда согласно неравенствам (5) операторы $L^*L =$

$=T^*T+\rho I^* A$, $K^*K=\rho T^*T+A^*A$ самосопряженные и положительно определенные в пространстве X. Предположим также, что $\operatorname{Ker} T \cap X_{z\delta} = \emptyset$, $A^{-1}(z)\cap \Omega_\tau = \emptyset$. Если принять обозначения $\sigma^{1/\rho}=\sigma_\rho$, то $\gamma(\rho)=\|T\sigma_\rho\|_Y$,

$$\sigma_\rho = \operatorname*{argmin}_{x\in X}\{\rho\| Tx\|_Y^2 + \| Ax-z \|_Z^2\}. \tag{23}$$

В теоремах 6 и 7 мы использовали непрерывность и монотонность функций $\varphi(\rho)$, $\gamma(\rho)$. Покажем теперь строгую монотонность и строгую выпуклость этих функций на отрезке $[0,\infty]$.

ТЕОРЕМА 8. Функция $\varphi(\rho)$ непрерывная, строго убывающая и строго выпуклая книзу на отрезке $[0,\infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО строгой монотонности. Пусть $P=Y\times Z$ – пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_P = \langle\cdot,\cdot\rangle_Y + \rho\langle\cdot,\cdot\rangle_Z$. Тогда, используя равенство $L^*L\sigma^\rho = \rho A^* z$, получаем следующие равенства:

$$L^*L\,\frac{d\sigma^\rho}{d\rho} = -A^*(A\sigma^\rho - z)\,, \tag{24}$$

$$\varphi(\rho)\ \varphi'(\rho) = \left\langle A\frac{d\sigma^\rho}{d\rho},\ A\sigma^\rho - z\right\rangle_Z = -\left\| L\frac{d\sigma^\rho}{d\rho}\right\|_P\,, \tag{25}$$

где оператор $L = [T, A]$ действует из X в P. Из равенств (24),(25) вытекает, что $\varphi'(\rho) < 0$ для всех $\rho\in(0,\infty)$. Это означает, что $\varphi(\rho)$ на отрезке $[0,\infty]$ строго убывает.

Докажем строгую выпуклость книзу. Из равенства (25) имеем

$$[\varphi'(\rho)]^2 + \varphi(\rho)\varphi''(\rho) = \left\langle A\frac{d^2\sigma^\rho}{d\rho^2},\ A\sigma^\rho-z\right\rangle_Z + \left\| A\frac{d\sigma^\rho}{d\rho}\right\|_Z^2. \tag{26}$$

Используя соотношения

$$[\varphi(\rho)\varphi'(\rho)]^2 \le [\varphi(\rho)]^2\left\| A\frac{d\sigma^\rho}{d\rho}\right\|_Z^2\,,$$

$$L^*L\,\frac{d^2\sigma^\rho}{d\rho^2} = -2K^*A\,\frac{d\sigma^\rho}{d\rho}\,,$$

из равенства (26) находим, что

$$\varphi(\rho)\varphi''(\rho) \ge \langle A\frac{d^2\sigma^\rho}{d\rho^2},\ A\sigma^\rho - z\rangle_Z = 2\left\| A\frac{d\sigma^\rho}{d\rho}\right\|_Z^2 .$$

Покажем, что

$$\varphi(\rho)\varphi''(\rho) > 0, \qquad \rho\in(0,\infty), \tag{27}$$

откуда следует, что $\varphi''(\rho)>0$ для всех $\rho\in(0,\infty)$, т.е. функция $\varphi(\rho)$ строго выпуклая книзу на отрезке $[0,\infty]$. Действительно, если $d\sigma^\rho/d\rho\in \mathrm{Ker}A$, то $\varphi(\rho)\varphi''(\rho)\ge 0$ и из (24) имеем

$$T^*T\frac{d\sigma^\rho}{d\rho} = A^*(z - A\sigma^\rho) .$$

Умножая это равенство на $d\sigma^\rho/d\rho$, получаем, что $d\sigma^\rho/d\rho\in \mathrm{Ker}T$, т.е. $d\sigma^\rho/d\rho\in \mathrm{Ker}T \cap \mathrm{Ker}A$. Тогда опять привлекая равенство (24), имеем, что $A\sigma^\rho=z$. Это равенство возможно только при $\rho=\infty$. Следовательно, справедливо неравенство (27).

ТЕОРЕМА 9. Функция $\gamma(\rho)$ непрерывная, строго убывающая и строго выпуклая книзу на отрезке $[0,\infty]$.

Приведем только окончательные формулы, откуда следует утверждение теоремы.

Строгая монотонность.

$$K^*K\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} = -T^*T\sigma_\rho = \frac{A^*(z-A\sigma_\rho)}{\rho}, \tag{28}$$

$$\gamma(\rho)\gamma'(\rho) = \langle T\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}, T\sigma_\rho\rangle_Y = -\left\| K\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}\right\|_Q^2 =$$

$$= -\left(\rho\left\| T\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}\right\|_Y^2 + \left\| A\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}\right\|_Z^2\right).$$

Строгая выпуклость книзу.

$$\gamma(\rho)\gamma''(\rho) \ge \langle T\frac{d^2\sigma_\rho}{d\rho^2}, T\sigma_\rho\rangle_Y = 2\left\| T\frac{d\sigma_\rho}{d\rho}\right\|_Y .$$

Строгая монотонность и строгая выпуклость книзу функций $\varphi(\rho)$ и $\gamma(\rho)$ ранее не были известны [7,10,16].

Рассмотрим теперь метод Ньютона решения уравнений $\varphi(\rho) = \delta$, $\gamma(\rho) = \tau$ для нахождения корней $\rho = \rho(\delta)$, $\rho = \rho(\tau)$. Построим две последовательности $\{\rho_i = \rho_i(\delta)\}$ и $\{\rho_i = \rho_i(\tau)\}$ по формулам

$$\rho_{i+1} = \rho_i - [\varphi(\rho_i) - \delta]\,[\varphi'(\rho_i)]^{-1}\,, \tag{29}$$

$$\rho_{i+1} = \rho_i - [\gamma(\rho_i) - \tau]\,[\gamma'(\rho_i)]^{-1}\,, \quad i = 0, 1, \ldots \,. \tag{30}$$

ТЕОРЕМА 10. Итерационный процесс (29) сходится для любых начальных значений ρ_0, удовлетворяющих неравенству $\varphi(\rho_0) - \delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следующего достаточного условия сходимости итерационного процесса $[\varphi(\rho) - \delta]\,[\varphi(\rho) - \delta]'' > 0$.

ТЕОРЕМА 11. Итерационный процесс (30) сходится для любых значений ρ_0, удовлетворяющих неравенству $\gamma(\rho_0) - \tau > 0$.

Учитывая свойства функций $\varphi(\rho)$, $\gamma(\rho)$, получим, что если $\delta \in (0, a)$, $\tau \in (0, b)$, то можно брать $\rho_0 = \rho_0(\delta) = 0$, $\rho_0 = \rho_0(\tau) = 0$.

Обсудим теперь, что нужно делать, чтобы вычислить $\rho_{i+1} = \rho_{i+1}(\delta)$ и $\rho_{i+1} = \rho_{i+1}(\tau)$ при заданных $\rho_i = \rho_i(\delta)$ и $\rho_i = \rho_i(\tau)$ соответственно.

<u>Вычисление $\rho_{i+1} = \rho_{i+1}(\delta)$.</u> Для этого нужно знать $\varphi(\rho_i)$, $\varphi'(\rho_i)$. Сначала решим задачу

$$\sigma^{\rho_i} = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \{\| Tx \|_Y^2 + \rho_i \| Ax - z \|_Z^2\}$$

и найдем $\varphi(\rho_i) = \| A\sigma^{\rho_i} - z \|_Z$.

Теперь решим задачу

$$\frac{d\sigma^{\rho_i}}{d\rho} = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \left\{ \| Tx \|_Y^2 + \rho_i \left\| Ax - \frac{z - A\sigma^{\rho_i}}{\rho_i} \right\|_Z^2 \right\} \tag{31}$$

и найдем

$$\varphi'(\rho_i) = \left\langle A\frac{d\sigma^{\rho_i}}{d\rho}\,,\, A\sigma^{\rho_i} - z \right\rangle_Z \cdot [\varphi(\rho_i)]^{-1}\,.$$

Формула (31) вытекает из равенства (24).

Вычисление $\rho_{i+1}=\rho_{i+1}(\tau)$. Для этого нужно знать $\gamma(\rho_i)$, $\gamma'(\rho_i)$. Окончательные формулы будут иметь вид:

$$\sigma_{\rho_i} = \underset{x\in X}{\operatorname{argmin}}(\rho_i\|Tx\|_Y^2 + \| Ax - z \|_Z^2) \ .$$

$$\gamma(\rho_i) = \| T\sigma_{\rho_i} \|_Y \ ,$$

$$\frac{d\sigma_{\rho_i}}{d\rho} = \underset{x\in X}{\operatorname{argmin}}\left\{\rho_i\| Tx \|_Y^2 + \left\| Ax - \frac{A\sigma_{\rho_i} - z}{\rho_i}\right\|_Z^2 \right\}, \qquad (32)$$

$$\gamma'(\rho_i) = \langle T\frac{d\sigma_{\rho_i}}{d\rho} \ , T\sigma_{\rho_i}\rangle \, [\gamma(\rho_i)]^{-1} \ .$$

Формула (32) вытекает из равенства (28).

Литература

I. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.,"Мир",1975.

2. ИМАМОВ А. Некоторые вопросы теории сплайнов в гильбертовом пространстве. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд.физ.-мат. наук. Новосибирск, 1977, (ВЦ СО АН СССР).

3. СОБОЛЕВ С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., ЛГУ, 1950.

4. HOLLADAY J.C. Smoothest curve approximation. - "Math.Tables Aids Compute.",1957,N 11, p.233-243.

5. Phillips D.L. A technique for numerical solution of certain integral equations of first kind.- "J.Assoc.Comput.Machinery",1962, v.9, N 1,p.84-97.

6. ИВАНОВ В.К. О приближенном решении операторных уравнений первого рода.-"Журн.вычислит. математики и мат.физики", 1966,т.6. № 6, с.1089-1094.

7. REINCH C.H. Smoothing by spline function.-"Numer.Math.", 1967,v.10,N 3, p.177-183.

8. МОРОЗОВ В.А. О регуляризующих семействах операторов. - В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 8, М., МГУ, 1967, с.63-69.

9. ВАСИН В.В., ТАНАНА В.П. Приближенное решение операторных уравнений первого рода.-"Мат.зап.Уральск.ун-та",1968, № 6, с.27-37.

10. REINCH C.H. Smoothing by spline functions.II. - "Numer. Math.",1971, v.16, N 5, p.451-454.

11. ИВАНОВ В.К. О линейных некорректных задачах. -"Докл. АН СССР", 1962, т.145, № 2, с. 270-272.

12. SCHOENBERG I.J. Spline functions and problem of graduation.-"Proc.Nat.Acad.Sci.USA",1964, v. 52, N 4,p.947-950.

13. WHITTEKER E.T. On a new method of graduation.- "Proc.Edinburg Math.Soc.",1923, v.41,p.63-75.

14. ТИХОНОВ А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач.-"Докл. АН СССР", 1963, т.153, № 1, с. 49-52.

15. ТИХОНОВ А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. -"Докл. АН СССР", 1963, т.151, №3,с.501-504.

16. МОРОЗОВ В.А. Регулярные методы некорректно поставленных задач. М., МГУ, 1974.

17. ТИХОНОВ А.Н., АРСЕНИН В.Я. Методы решения некорректных задач. М.,"Наука", 1974.

18. ИВАНОВ В.К., ВАСИН В.В., ТАНАНА В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., "Наука", 1978.

19. ТИХОМИРОВ В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М., МГУ, 1976.

20. ВАСИН В.В. О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач. -"Мат.заметки", 1970, т.7,№3, с.265-272.

21. ВАСИН В.В. Некорректные задачи в B -пространствах и их приближенное решение вариационными методами. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд.физ.-мат.наук, Свердловск, 1970, (Уральск. ун-т).

22. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., ИМАМОВ А. О вариационных задачах теории сплайнов. -В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск, "Наука", 1978, с. 27-36.

Поступила в ред.-изд.отд.
4 мая 1978 года