МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 75

УДК 518.12

# О ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНАМИ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Б.И. Шумилов

Аппроксимация функций сплайнами первой степени (ломаными) применялась еще Эйлером. Задача наилучшего приближения изучалась Ремезом [1]. Для случая выпуклых функций им был предложен алгоритм выбора узлов (точек склейки) сплайна, гарантирующий наилучшее равномерное приближение с заданной погрешностью. Некоторое видоизменение алгоритма Ремеза для случая гладких функций было дано Кетковым [2].

Мы рассматриваем вопрос наилучшего приближения сплайнами первой степени с точки зрения локальной аппроксимации, предложенной Шенбергом [3] и развитой рядом других авторов. Особенностью этого подхода в общем случае является то, что значение аппроксимационного сплайна $S_n(x)$ степени $n$ в произвольной точке $x$ зависит от значений аппроксимируемой функции $f(x)$ только из некоторой окрестности этой точки $S_n(x) = \sum_i \lambda_i(f) B_{ni}(x)$, где $B_{ni}(x)$ - нормализованные базисные B-сплайны, а $\lambda_i(f)$ - некоторая последовательность линейных функционалов. За счет выбора функционалов $\lambda_i(f)$ удается построить локальный метод аппроксимации, гарантирующий равномерное приближение с погрешностью аппроксимации, асимптотически равной погрешности наилучшего приближения.

Пусть на отрезке $[a,b]$ введена сетка $\Delta$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$, с которой связано пространство сплайнов первой степени $S_1(x)$. Слева и справа от концов отрезка добавим точки $x_{-1}$ и $x_{N+1}$ и на расширенной таким образом сетке образуем B-сплайны первой степени

$$B_i(x) = B_{1i}(x) = \begin{cases} (x-x_i)/h_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ (x_{i+1}-x)/h_i, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \bar{\in} [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

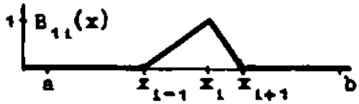


Рис. I.

где $h_i = x_{i+1} - x_i$ (см.рис.I). Любой сплайн $S_1(x)$ можно единственным образом представить в виде линей - ной комбинации B-сплайнов.

Будем изучать наилучшее приближение функций $f(x) \in C^2[a,b]$ сплайнами первой степени $S_1(x)$ с заданной погрешностью приближения $\varepsilon$ . Решение отыскивается в виде

$$S_1(x) = \sum_i (f(x_i) + \varepsilon_i)\, B_i(x).$$

Для обеспечения заданной погрешности приближения варьируем положение и число узлов сетки $\Delta$ и свободные параметры $\varepsilon_i$ . Исследуем вначале случай, когда вторая производная $f''(x)$ знакопостоянна.

Если $x \in [x_j, x_{j+1}]$, то остаточный член аппроксимации имеет вид

$$E(x) = f(x) - S_1(x) = f(x) - \sum_{i=j}^{j+1} (f(x_i) + \varepsilon_i)\, B_i(x).$$

Разлагая значения $f(x_i)$ в окрестности точки $x$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и используя легко прове - ряемые соотношения $\sum_i B_i(x) = 1$, $\sum_i x_i B_i(x) = x$ , получаем

$$E(x) = -\frac{1}{2} f''(\xi_j(x))(x - x_j)(x_{j+1} - x) - \sum_{i=j}^{j+1} \varepsilon_i B_i(x),$$

где $x_j \le \xi_j(x) \le x_{j+1}$ .


Рис. 2.

График функции $(x - x_j)(x_{j+1} - x)$ изображен на рис.2. Максимальное значение этой функции достигается в точке $(x_j + x_{j+1})/2$ и равно $h_j^2/4$ .

Пусть теперь узлы сетки $\Delta$ удовлетворяют условию

$$4 \max_{x_j \le x \le x_{j+1}} |f''(\xi_j(x))(x - x_j)(x_{j+1} - x)| = |f''(\bar{\xi}_j)|\, h_j^2 = 16\varepsilon, \qquad (I)$$

где $\min\limits_{x_j \le x \le x_{j+1}} |f''(x)| \le |f''(\bar{\xi}_j)| \le \max\limits_{x_j \le x \le x_{j+1}} |f''(x)|$, $0 \le j \le N-1$.

Используем выбор $\varepsilon_i$ для того, чтобы уменьшить максимум погрешности $|E(x)|$ . Положим

$$\varepsilon_i = \mathrm{sgn}(-f''(x_i))\,\varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, N. \qquad (2)$$

Тогда для функций $f(x)$ с производной $f''(x) > 0$ график функции $E(x)$ приобретает вид, изображенный на рис.3. Из рис.3 видно, что уклонение $E(x)$ достигает экстремальных значений $\pm\varepsilon$ в каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ три раза, меняя знак, и, следовательно, по теореме о чебышевском альтернансе [I] сплайн $S_1(x)$, представленный на $[x_i, x_{i+1}]$ полиномом первой степени, доставляет наилучшее равномерное приближение функции $f(x)$ на этом промежутке, а значит, и на совокупности промежутков – отрезке $[a,b]$. При этом обеспечивается погрешность аппроксимации $\max\limits_{a\le x\le b} |f(x)-S_1(x)| = \varepsilon$. Из сказанного вытекает, что для $f''(x) > 0$ при выборе параметров по формулам (2) сетка $\Delta$, удовлетворяющая условиям (I), имеет наименьшее число узлов. Аналогично обстоит дело для $f''(x) < 0$.

Рис. 3.

Практическое применение условия (I) для построения оптимальной сетки $\Delta$ осложняется тем обстоятельством, что значения $\bar{\xi}_j$ неизвестны. Поэтому функцию $|f''(x)|$ вычисляют в некоторых заранее фиксированных точках $\tilde{\xi}_j \in [x_j, x_{j+1}]$. При этом уклонение $\mathrm{sgn}(f''(x))E(x)$ достигает экстремальных значений $+\varepsilon$ на концах и $-\varepsilon + h_j^2[f''(\tilde{\xi}_j) - f''(\bar{\xi}_j)]/8$ внутри каждого отрезка $[x_j, x_{j+1}]$. Если $|f''(\bar{\xi}_j)| \le |f''(\tilde{\xi}_j)|$, то результирующая погрешность приближения не превосходит $\varepsilon$. В работе [2] предлагалось использовать в (I) максимальное значение $|f''(x)|$ на $[x_j, x_{j+1}]$. Если функция $|f''(x)|$ монотонная, то максимум $|f''(x)|$ достигается на границе отрезка, и можно строить сетку $\Delta$ последовательно, откладывая шаги $h_j$ в сторону убывания функции $|f''(x)|$. Если функция $|f''(x)|$ не монотонная, то положение точки максимума $|f''(x)|$ не известно и погрешность приближения может превосходить $\varepsilon$. Вследствие (I) величины $\varepsilon$ и $h_j^2$ одного порядка малости. Величина $h_j^2[f''(\tilde{\xi}_j) - f''(\bar{\xi}_j)]$ малая более высокого порядка относительно $h_j$, если $f(x) \in C^2[a,b]$. В этом смысле можно говорить, что предложенный способ построения сетки асимптотически при $\varepsilon \to 0$ ($h_j \to 0$) дает наилучшее приближение.

Случай, когда функция $f''(x)$ меняет знак, требует отдельного рассмотрения.

Пусть $f(x)=\alpha x^3$. Будем аппроксимировать эту функцию в окрестности ее точки перегиба $x=0$ функцией $3\beta x$ ($\operatorname{sgn}\beta = \operatorname{sgn}\alpha$). Экстремальные значения остаточного члена достигаются в точках $x_{1,2} = \operatorname{sgn}(\pm\alpha)(\beta/\alpha)^{1/2}$ и равны $\mp 2(\beta^3/\alpha)^{1/2}\operatorname{sgn}\alpha$. Чтобы это было равно $\pm\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha$, должно быть $\beta = \alpha^{1/3}(\varepsilon/2)^{2/3}$. Шаг $h$ выбирается так, чтобы на концах отрезка $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ достигались значения $\operatorname{sgn}(-\alpha)\varepsilon$ слева и $\varepsilon \operatorname{sgn}\alpha$ справа. Это дает условие

$$\alpha\left(\frac{h}{2}\right)^3 - 3\alpha^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h}{2} = \varepsilon \operatorname{sgn}\alpha.$$

Кубическое уравнение имеет трехкратный вещественный корень

$$h = 2(4\varepsilon/\alpha)^{1/3}. \qquad (3)$$

При таком выборе $h$ уклонение достигает экстремальных значений $\pm\varepsilon$ четыре раза с чередованием знаков, т.е. получено наилучшее равномерное приближение функции $f(x) = \alpha x^3$ в окрестности точки перегиба. Построение сплайна в обе стороны от промежутка $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$


Рис. 4.

производится с учетом знакопостоянства функции $f'''(x)$.

График остаточного члена в этом случае имеет вид, представленный на рис.4.

Пусть теперь $f(x)$ имеет точку перегиба $x_0$, в окрестности которой функция трижды непрерывно дифференцируема и $f'''(x_0) \neq 0$. Заменим функцию $f(x)$ отрезком ее ряда Тейлора

$$P_3(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x-x_0)^3 .$$

Остаточный член такой аппроксимации есть

$$f(x)-P_3(x) = \frac{1}{6}\left[f'''(\xi(x)) - f'''(x_0)\right](x-x_0)^3,$$

где точка $\xi(x)$ лежит между $x_0$ и $x$.

Далее строим наилучшее приближение полинома $P_3(x)$ отрезком прямой с заданной величиной уклонения $\varepsilon$. При этом выражение $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ восстанавливается точно, а член

$\frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$ аппроксимируется, как в приведенном выше примере. Получаем на отрезке $[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}]$

$$S_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + 3\left(\frac{f'''(x_0)}{6}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(x-x_0) .$$

Шаг $h$ определяется формулой (3) с $\alpha = \frac{1}{6} f'''(x_0)$, откуда получаем

$$h = 4(3\varepsilon/f'''(x_0))^{\frac{1}{3}} . \qquad (4)$$

Тогда

$$S_1(x) = f(x_0) + \left[f'(x_0) + \frac{h^2}{32} f'''(x_0)\right](x-x_0) .$$

Остаточный член приближения полинома $P_3(x)$ есть

$$P_3(x) - S_1(x) = \frac{1}{6} f'''(x_0)\left[(x-x_0)^3 - \frac{3h^2}{16}(x-x_0)\right] .$$

На отрезке $[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}]$ он достигает значений $\pm\frac{1}{6} f'''(x_0)\frac{h^3}{32}$ четыре раза с чередованием знака.

Рассмотрим уклонение $f(x) - S_1(x) = [P_3(x) - S_1(x)] + [f(x) - P_3(x)]$. Первая разность в правой части есть малая порядка $f'''(x_0) h^3$, а вторая является малой более высокого порядка $[f'''(\bar{\xi}) - f'''(x_0)] h^3$ относительно $h$. Следовательно, функция $S_1(x)$ дает асимптотически наилучшее равномерное приближение с заданным уклонением $\varepsilon$ функции $f(x)$ на отрезке $[x_0 - \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}]$, где шаг $h$ определяется равенством (4). Выбор шагов вне этого отрезка осуществляется по общему правилу для знакопостоянных функций $f''(x)$.

Отметим, что фактически мы во всех случаях строили соответствующие многочлены Чебышева наименьшего уклонения в равномерной метрике. Аналогично можно было бы использовать многочлены Чебышева второго рода или многочлены Лежандра, чтобы прийти к наилучшему приближению в метрике пространства $L_p[a,b]$, $p=1,2$.

Если функция $f(x)$ не удовлетворяет требуемой гладкости в окрестности точки перегиба $x_0$ (не существует непрерывная третья производная), то конструкция с четырьмя точками альтернанса не проходит. Будем предполагать, как в общем случае, только существование непрерывной второй производной $f''(x)$. Аппроксимируем функцию касательной в точке $x_0$: $S_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Остаточный член в интегральной форме имеет вид

$$f(x)-S_1(x) = \int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)dt.$$

Пусть шаг $h = h_{-1}+h_1$, $h_{-1} = x_0 - x_{-1}$, $h_1=x_1-x_0$, где $x_{-1}$ и $x_1$ – точки слева и справа от $x_0$. Выбираем $h_{-1}$ и $h_1$ из условий

$$\left.\begin{aligned} F_{-1}(h_{-1}) &= \int_{x_0}^{x_0-h_{-1}} (x_0-h_{-1}-t)f''(t)dt-\varepsilon \operatorname{sgn} f''(x_{-1}) = 0,\\ F_1(h_1) &= \int_{x_0}^{x_0+h_1}(x_0+h_1-t)f''(t)dt-\varepsilon \operatorname{sgn} f''(x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$


Рис. 5.

Это обеспечивает существование двух точек альтернанса $x_{-1}$ и $x_1$ (рис.5).

Приведем возможный способ решения уравнений (5) относительно $h_{-1}$ и $h_1$.

Для этого заметим, что $F_1''(h_1)$ знакопостоянна, а именно: так как

$$F_1'(h_1)= \int_{x_0}^{x_0+h_1} f''(t)dt, \quad F_1''(h_1)=f''(x_0+h_1),$$

то знак $F_1''(h_1)$ совпадает со знаком $f''(x)$ при $x > x_0$. Но это есть достаточное условие для сходимости итерационного метода Ньютона для уравнения $F_1(h_1) = 0$. Итерации вычисляются по формуле

$$h_1^{k+1} = h_1^k - F_1(h_1^k)/F_1'(h_1^k).$$

Начальное приближение $h_1^0$ произвольно, лишь бы в области $(x_0,x_0 + h_1^0)$ функция $f''(x)$ не меняла знака. Практически от выбора $h_1^0$ зависит число итераций, обеспечивающих заданную точность вычислений.

Вычисление интеграла в выражении $F_1(h_1)$ нужно делать с помощью квадратурной формулы, дающей точность, по крайней мере, на порядок выше, чем $\max\limits_{x_0 \le x \le x_0+h_1} |f''(x)|h_1^2$ .

Аналогично решается первое уравнение из (5).

## Литература


I. РЕМЕЗ Е.Я. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев, изд-во АН УССР, 1957.

2. КЕТКОВ Ю.Л. Об оптимальных методах кусочно-линейной аппроксимации. - "Изв.вузов. Радиофизика", 1966, т.9, № 6, с.1202-1209.

3. SCHOENBERG I.J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions.- "Quart.Appl.Math", 1946, v.4, p.45-99, 112-141.



Поступила в ред.-изд.отд.
16 августа 1978 года