МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)

1978 год Выпуск 75

УДК 518.5

ЛОКАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Б.М. Шумилов

Линейные сплайны двух переменных, т.е. функции, склеенные непрерывно из отрезков плоскостей, были введены Р. Курантом ([I,с.95]), и успешно применяются в задачах интерполирования и приближения. Привлекательность линейных сплайнов состоит в том, что внутри каждого треугольника Δ_{ijk} с вершинами в точках (x_l, y_l), $l = i,j,k$, коэффициенты интерполяционного сплайна $\sigma(x,y)=a+bx+cy$ однозначно определяются значениями интерполируемой функции f в трех вершинах. В работе [2] для погрешности интерполяции была получена оценка *).

$$\max_{x,y\in\Delta_{ijk}} |\sigma(x,y)-f(x,y)| \le \frac{3}{2} H^2 \max_{\Delta_{ijk}} \|\Gamma\|, \quad f\in C^2(\Delta_{ijk}),$$

где H – длина наибольшей из сторон треугольника, $\Gamma = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$.

Мы получаем две неулучшаемые оценки для погрешности интерполяции, которые в частных случаях переходят в одномерную оценку. Наилучшее приближение линейными сплайнами изучалось в [I]. В теореме 3 конструируется локальный процесс аппроксимации, гарантирующий равномерное приближение с константами, асимптотически равными константам наилучшего приближения. Аналогичный результат получен для среднеквадратического приближения. Рассматриваются отдельные примеры. Доказана сходимость к непрерывным функциям. В заключение

*) Обозначения норм матриц взяты из книги Корн Г., Корн Т. "Справочник по математике (для научных работников и инженеров)", М., "Наука", 1973, стр.391.

решается задача оптимального выбора узлов, гарантирующего близкое к наилучшему приближение с заданной погрешностью.

I. Пусть многоугольник Ω на плоскости (x,y) разбит на треугольники $\Delta_{ijk}=\overline{p_i p_j p_k}$ множеством точек $p_i=(x_i,y_i)$, $i=1,\dots,N$, а функция $\sigma(x,y)\in C(\Omega)$ линейна в каждом из них.

Образуем функции [I]

$$\varphi_i^{jk}(x,y) = a_i^{jk} + b_i^{jk}x + c_i^{jk}y, \quad x,y\in\Delta_{ijk}.$$

такие, что

$$\varphi_i^{jk}(x,y) = \begin{cases} 1, & x=x_i,\ y=y_i; \\ 0, & x=x_l,\ y=y_l,\quad l=j,k. \end{cases}$$

Тогда любая функция $\sigma(x,y)$ однозначно представима в виде

$$\sigma(x,y)=q_i\varphi_i^{jk}(x,y)+q_j\varphi_j^{ik}(x,y)+q_k\varphi_k^{ij}(x,y), \quad x,y\in\Delta_{ijk}. \tag{1}$$

ТЕОРЕМА I. Если $q_i=f(x_i,y_i)$, то для $f\in C^2(\Delta_{ijk})$

$$\max_{x,y\in\Delta_{ijk}} |\sigma(x,y)-f(x,y)| \le \frac{1}{8}\delta^2_{ijk}\max_{\Delta_{ijk}}\|\Gamma\|_\infty + o(H^2),$$

где

$$\delta^2_{ijk} = \max_{l,s=i,j,k}(|x_l-x_s|+|y_l-y_s|)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В треугольнике Δ_{ijk} имеем

$$r_{ijk}(f)=\sigma(x,y)-f(x,y) = \sum_{l=i,j,k} f(x_l,y_l)\varphi^{\overline{\frac{ijk}{l}}}(x,y) - f(x,y),$$

$$x,y\in\Delta_{ijk}.$$

Выражение $\frac{ijk}{l}$ означает, что совпадающие индексы формально сокращаются. Разлагая значения функции $f(x_l,y_l)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x,y) с остаточным членом в форме Лагранжа и используя свойство

$$\sum_l (a+bx_l+cy_l)\varphi_l(x,y)=a+bx+cy,\ \forall a,b,c\in R,$$

получаем

$$2r_{ijk}(f) = f''_{xx}\sum_l \varphi_l(x,y)(x_l-x)^2+f''_{yy}\sum_l \varphi_l(x,y)(y_l-y)^2+$$

$$+2f''_{xy}\sum_l \varphi_l(x,y)(x_l-x)(y_l-y)+$$

$$+2\sum_l \varphi_l(x,y)(x_l-x)(y_l-y)[(f''_{xy})_l - f''_{xy}] \,. \qquad (2)$$

Введем в треугольнике Δ_{ijk} барицентрическую систему координат (ξ_i,ξ_j,ξ_k), $\xi_i+\xi_j+\xi_k=1$ [I]. В этой системе координат функция φ_i имеет следующий простой вид: $\varphi_i(x,y) = \xi_i$.

Перед тем как вычислять $\max|r_{ijk}(f)|$, заметим, что на участках, где величина $\sum_l \varphi_l(x,y)(x_l-x)(y_l-y) > 0$, в сумму модулей она войдет со своим знаком и в противном случае – с противоположным.

В первом случае имеем

$$S = \sum_l \varphi_l(x,y)(x_l-x+y_l-y)^2 = \xi_i[(x_i+y_i)(1-\xi_i)-(x_j+y_j)\xi_j-$$

$$-(x_k+y_k)(1-\xi_i-\xi_j)]^2+\xi_j[(x_i+y_i)\xi_i-(x_j+y_j)(1-\xi_j)+$$

$$+(x_k+y_k)(1-\xi_i-\xi_j)]^2+(1-\xi_i-\xi_j)[(x_i+y_i)\xi_i+$$

$$+(x_j+y_j)\xi_j-(x_k+y_k)(\xi_i+\xi_j)]^2=$$

$$=\xi_i[(ik)(1-\xi_i)-(jk)\xi_j]^2+\xi_j[(ik)\xi_i-(jk)(1-\xi_j)]^2+$$

$$+(1-\xi_i-\xi_j)[(ik)\xi_i+(jk)\xi_j]^2 \,,$$

где (ik) обозначает $(ik) = x_i - x_k + y_i - y_k$. Произведя алгебраические преобразования получим экстремальную задачу:

$$S(\xi_i,\xi_j) = (ik)^2\xi_i+(jk)^2\xi_j-[(ik)\xi_i+(jk)\xi_j]^2 \to \max \,,$$

$$0 \le \xi_i,\xi_j;\ \xi_i+\xi_j \le 1 \,.$$

На границе имеем $S(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{4}(ik)^2$, $S(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}(jk)^2$, $S(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}[(ik)-(jk)]^2 = \frac{1}{4}(ij)^2$. Внутри области подозрительная ситуация может быть только при $(lm)=0$, $l,m = i,j,k$. В этом случае получаем целую линию максимумов $\xi_i+\xi_k=\frac{1}{2}$ со значением на ней $\frac{1}{4}\left(\frac{ijk}{1}\right)^2$.

Во втором случае получаем

$$\bar{S}(\xi_i,\xi_j)=(\overline{ik})^2\xi_i+(\overline{jk})^2\xi_j-[(\overline{ik})\xi_i+(\overline{jk})\xi_j]^2\le\frac{1}{4}\max_{l,s=i,j,k}(\overline{l,s})^2,$$

где $\overline{(ik)}=x_i-x_k+y_k-y_i$.

Окончательно выбираем из полученных максимумов наибольший. То, что осталось, оценивается выражением

$$\max_{\bar{p},\tilde{p}\in\Delta_{ijk}}|f''_{xy}(\bar{p})-f''_{xy}(\tilde{p})|\sum_i[(x_i-x)^2+(y_i-y)^2],$$

которое для достаточно гладких функций есть величина порядка $o(H^2)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно установить двухстороннее неравенство $H^2\le\delta^2_{ijk}\le 2H^2$. Правое неравенство достигается (см.рис.I) на равнобедренном прямоугольном треугольнике с катетами, параллельными осям координат. Левое – на том же треугольнике с гипотенузой, параллельной одной из осей координат. Если в этом случае

$$f''_{xy}=\mathrm{const}\le\max(|f''_{xx}|,|f''_{yy}|),$$

то оценка погрешности совпадает с одномерной интерполяционной оценкой погрешности на гипотенузе. Если вершина i при стягивании треугольника в отрезок остается внутри исходного треугольника O'jk , то оценка погрешности не изменяется.

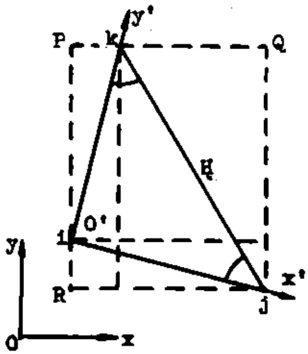


Рис. I

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $f\in C^2(\Delta_{ijk})$

$$\max_{x,y\in\Delta_{ijk}}|\sigma(x,y)-f(x,y)|\le\frac{H^2}{8\sin^2[\min(\frac{\pi}{2},\theta)]}[\max_{\Delta_{ijk}}(|f''_{xx}|,|f''_{yy}|)+$$

$$+\max_{\Delta_{ijk}}|f''_{xy}|],$$

где θ - максимальный угол треугольника.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство вида $2|ab| \le a^2+b^2$ для остаточного члена $r_{ijk}(f)$, получаем оценку

$$2|r_{ijk}(f)| \le [\max_{\Delta_{ijk}}(|f''_{xx}|,|f''_{yy}|)+\max_{\Delta_{ijk}}|f''_{xy}|]\cdot$$

$$\cdot\sum_l \varphi_l(x,y)[(x_l-x)^2+(y_l-y)^2].$$

Снова переходя к барицентрической системе координат, получим

$$S_2(\xi_i,\xi_j,\xi_k) = \sum_l \varphi_l[(x_l-x)^2+(y_l-y)^2]=h^2_{ik}\xi_i(1-\xi_i)+$$

$$+h^2_{jk}\xi_j(1-\xi_j)-2e\xi_i\xi_j ,$$

$$0 \le \xi_i, \quad 0 \le \xi_j, \quad \xi_i+\xi_j \le 1,$$

где $h^2_{ik} = (x_i-x_k)^2+(y_i-y_k)^2$, $e = (x_i-x_k)(x_j-x_k)+(y_i-y_k)(y_j-y_k)$.
На границе находим максимальные значения

$$S_2(\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4}h^2_{ik}, \quad S_2(0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{4}h^2_{jk}, \quad S_2(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0) = \tfrac{1}{4}h^2_{ij}.$$

Необходимые условия экстремума выполнены в одной точке

$$\xi_i = \frac{h^2_{ik}(h^2_{jk}-e)}{2(h^2_{ik}h^2_{jk}-e^2)}, \quad \xi_j = \frac{h^2_{jk}(h^2_{ik}-e)}{2(h^2_{ik}h^2_{jk}-e^2)}, \quad \xi_k = \frac{h^2_{ij}\, e}{2(h^2_{ik}h^2_{jk}-e^2)}, \qquad (3)$$

в которой может быть только максимум, поскольку второй дифференциал функции S_2 по ξ_i,ξ_j есть отрицательно определенная квадратичная форма, ибо

$$h^2_{ik}h^2_{jk}-e^2 = [(x_i-x_k)(y_j-y_k)-(y_i-y_k)(x_j-x_k)]^2 =$$

$$= 4(\text{ площадь } \Delta_{ijk})^2 > 0.$$

Вычисляя значение S_2 в этой точке, получим

$$S_2 = \frac{h^2_{ij}\,h^2_{jk}\,h^2_{ik}}{16(\text{площадь } \Delta_{ijk})^2} = \frac{R^2}{4\sin^2\theta}.$$

При $\theta<\frac{\pi}{2}$ полученное значение является абсолютным максимумом. Для $\theta=\frac{\pi}{2}$ экстремальная точка выходит на границу треугольника, так как из равенства $e = h_{ik}^2+h_{jk}^2-h_{ij}^2$ следует, что в этом случае одна из барицентрических координат в (3) обращается в нуль. При $e > \frac{\pi}{2}$ точка уже не принадлежит треугольнику, и максимальное значение достигается на границе. Теорема доказана.

Отметим, что наихудшая конфигурация треугольника равносторонняя. В этом случае экстремальная точка совпадает с центром тяжести треугольника и $\max S_2 = \frac{1}{3}H^2$. Если $f''_{xy} = 0$, то при $e \geq \frac{\pi}{2}$ оценка погрешности совпадает с одномерной на максимальной стороне. Если максимальная сторона треугольника зафиксирована, то третья вершина может размещаться в любой точке некоторого кругового сегмента – погрешность хуже не будет.

2. Далее изучается процесс аппроксимации функциями вида (I) с коэффициентами q_i, удовлетворяющими соотношениям

$$q_i = \sum_{m=1}^{6} \beta_i^m f(x_m^i, y_m^i), \tag{4}$$

где точки $p_m^i = (x_m^i, y_m^i)$, $m = \overline{1,6}$ – любые из окрестности точки p_i, либо

$$q_i = \alpha_i f(x_i, y_i) + \alpha_i^1 f'_n(x_i, y_i) + \sum_{m=1}^{4} \beta_i^m f(x_m^i, y_m^i), \tag{4'}$$

где $f'_n(x,y) = \cos(n,x) f'_x(x,y) + \cos(n,y) f'_y(x,y)$ – производная в точке (x,y) по направлению вектора $\vec{n}$.

ТЕОРЕМА 3. Для любых точек (x_m^i, y_m^i), $m = \overline{1,6}$, не принадлежащих одной кривой второго порядка, существуют такие коэффициенты β_i^m, $m = \overline{1,6}$, что для любой функции $f \in C^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\sigma - f\| = \max_{x,y\in\Omega} |\sigma(x,y) - f(x,y)| \leq \frac{\delta^2 x}{16}\|f''_{xx}\| + \frac{\delta^2 y}{16}\|f''_{yy}\| + \frac{H^2}{6}\|f''_{xy}\| + o(\tilde{H}^2),$$

$$\delta^2 x = \max_{i,j,k} \delta^2 x_{ijk},$$

$$\delta^2 y = \max_{i,j,k} \delta^2 y_{ijk},$$

$$\tilde{H}^2 = \max_{i,j,k} (\delta^2 x_{ijk} + \delta^2 y_{ijk}).$$

$$\delta^2 x_{ijk} = \max_{l,m=i,j,k} (x_l - x_m)^2,$$

$$\delta^2 y_{ijk} = \max_{l,m=i,j,k} (y_l - y_m)^2,$$

$$H^2 = \max_{i,j,k} H^2_{ijk},$$

$$H^2_{ijk} = \max_{l,m=i,j,k} [(x_l - x_m)^2 + (y_l - y_m)^2].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая значения функции f, либо ее производных, входящие в соотношения (4), (4'), в ряд Тейлора в окрестности произвольной точки $(x,y) \in \Delta_{ijk}$, подставляя в (I) и аннулируя в $r_{ijk}(f)$ коэффициенты при $f(x,y)$, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, получим уравнения

$$\sum_{m=1}^{6} \beta_l^m = 1, \quad \sum_{m=1}^{6} \beta_l^m \delta x_m = \sum_{m=1}^{6} \beta_l^m \delta y_m = 0, \quad l = i,j,k, \tag{5}$$

для коэффициентов формулы (4), либо

$$\alpha_l' \cos(n,x) + \sum_{m=1}^{4} \beta_l^m \delta x_m = \alpha_l' \cos(n,y) + \sum_{m=1}^{4} \beta_l^m \delta y_m = 0, \quad \alpha_l + \sum_{m=1}^{4} \beta_l^m = 1,$$

$$l = i,j,k, \tag{5'}$$

в случае (4').

Здесь $\delta x_m = x_m^l - x_l$, $\delta y_m = y_m^l - y_l$, $l = i,j,k$. Теперь

$$2|r_{ijk}(f)| \le \max_{\Delta_{ijk}} |f''_{xx}| \max_{x,y \in \Delta_{ijk}} |\sum_l \varphi_l(x,y)[(x_l - x)^2 +$$

$$+ \sum_m \beta_l^m \delta^2 x_m]| + \max_{\Delta_{ijk}} |f''_{yy}| \max_{x,y \in \Delta_{ijk}} |\sum_l \varphi_l(x,y)[(y_l - y)^2 +$$

$$+ \sum_m \beta_l^m \delta^2 y_m]| + 2 \max_{\Delta_{ijk}} |f''_{xy}| (\max_{x,y \in \Delta_{ijk}} \sum_l \varphi_l(x,y) |x_l - x| |y_l - y| +$$

$$+ \max_l |\sum_m \beta_l^m \delta x_m \delta y_m|) + \max[\omega(f''_{xx}), \omega(f''_{yy})] \cdot$$

$$\cdot (\max_l |\sum_m \beta_l^m \delta^2 x_m| + \max_l |\sum_m \beta_l^m \delta^2 y_m|),$$

где модули непрерывности $\omega(\cdot)$ вычисляются по интервалу длины $\max_{r,s,m} p_r p_s^m$, и появляется возможность уменьшить главный член погрешности, удовлетворяя соотношениям

$$-\sum_m \beta_l^m \delta^2 x_m = \frac{1}{8} \max_{r,s=i,j,k} (x_r - x_s)^2 ,$$

$$\sum_m \beta_l^m \delta x_m \delta y_m = 0 , \tag{6}$$

$$-\sum_m \beta_l^m \delta^2 y_m = \frac{1}{8} \max_{r,s=i,j,k} (y_r - y_s)^2 ,$$

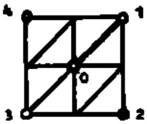
$$l = i,j,k .$$

Окончательно, вычисляя $\|\sigma - f\| = \max_{i,j,k} |r_{ijk}(f)|$, получаем желаемый результат. Определитель системы уравнений (5) и (6) не равен нулю. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Если $f(x,y) = x^2$, то уклонение $\sigma(x,y) - f(x,y)$ достигает своего максимального значения $\delta^2 x/8$ в одном из треугольников Δ_{ijk} ровно четыре раза, меняя знак. Отсюда следует [3], что локальный аппроксимант $\sigma(x,y)$ доставляет наилучшее приближение функции f. Значение этого результата в том, что в теореме 3 для каждой фиксированной функции $f \in C^2(\Omega)$ получаем неулучшаемую постоянную при $\delta^2 x$, асимптотически правильную при $\delta x \to 0$. Аналогично для функции y^2.

2. Фактически $x^2 - \sigma(x,y)$ на границе треугольника представляет собой второй полином Чебышева, развернутый по местной оси абсцисс и растянутый на интервал длины δx. Используя в (5) коэффициент I/6 вместо I/8, получим в остатке аналогичный полином Лежандра, что дает в случае $\delta^2 x_{ijk} \equiv \delta^2 x$ асимптотически неулучшаемую аппроксимацию по методу наименьших квадратов с константой $(12\sqrt{5})^{-1}$. В [I, с. I79] было показано, что эта константа асимптотически правильная для приближения любой функции $f(x,y)$. Здесь мы видим, что функция, реализующая это приближение, выглядит достаточно просто.

Рассмотрим отдельные случаи:



а) Прямоугольная сетка декартовых координат: $\delta x = \delta y = h$. Производится аппроксимация по формуле

$$q_0 = \alpha f(x_0, y_0) + \sum_{m=1}^{4} \beta_m f(x_m, y_m) .$$

Вычислим в (2) коэффициент при f''_{xy}:

$$S_1 = \sum_l \varphi_l(x,y)(x_l-x)(y_l-y) = \xi_i[(x_i-x_k)(1-\xi_i)-(x_j-x_k)\xi_j]\cdot$$
$$\cdot[(y_i-y_k)(1-\xi_i)-(y_j-y_k)\xi_j] + \xi_j[(x_i-x_k)\xi_i-(x_j-x_k)\cdot$$
$$\cdot(1-\xi_j)][(y_i-y_k)\xi_i-(y_j-y_k)(1-\xi_j)] + (1-\xi_i-\xi_j)[(x_i-x_k)\xi_i +$$
$$+ (x_j-x_k)\xi_j][(y_i-y_k)\xi_i + (y_j-y_k)\xi_j] =$$
$$= (x_i-x_k)(y_i-y_k)\xi_i(1-\xi_i) + (x_j-x_k)(y_j-y_k)\xi_j(1-\xi_j) -$$
$$- [(x_i-x_k)(y_j-y_k) + (x_j-x_k)(y_i-y_k)]\xi_i\xi_j .$$

Обозначая $(x_i-x_k)(y_i-y_k) = a$, $(x_j-x_k)(y_j-y_k) = b$, $(x_i-x_k)(y_j-y_k) + (x_j-x_k)(y_i-y_k) = c$, получим

$$S_1(\xi_i,\xi_j)=a\xi_i(1-\xi_i)+b\xi_j(1-\xi_j)-c\xi_i\xi_j \to \max, \quad 0\le\xi_i+\xi_j\le 1, \quad 0\le\xi_i,\xi_j .$$

На границе имеем

$$S_1\left(\frac{1}{2},0\right) = \frac{a}{4}, \quad S_1\left(0,\frac{1}{2}\right) = \frac{b}{4}, \quad S_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{a+b-c}{4} = \frac{(x_i-x_j)(y_i-y_j)}{4}.$$

Внутри треугольника не может быть ни максимума, ни минимума, поскольку второй дифференциал функции S_1 есть неопределенная квадратичная форма $(4ab-c^2 = -[(x_i-x_k)(y_j-y_k)-(x_j-x_k)(y_i-y_k)]^2<0)$. Величины $a, b, a+b-c$ суть не что иное, как удвоенные площади S_{iPk}, $-S_{kQj}$, $-S_{jRi}$ (см.рис.I). Поскольку в данном случае коэффициент при смешанной производной неотрицательный, можно уменьшить его вдвое, удовлетворяя соотношению

$$-\sum_{m=1}^{4} \beta_m \, \delta x_m \, \delta y_m = \frac{1}{8} h^2 .$$

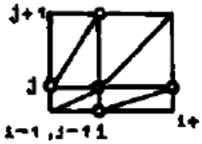
То же самое можно сделать с коэффициентами при f''_{xx}, f''_{yy}, если учесть, что они имеют равные по величине положительные максимальные значения и что $\delta^2 x_m=\delta^2 y_m = h^2$. Это приводит к условиям

$$-\sum_{m=1}^{4} \beta_m = \frac{1}{8}, \qquad \alpha = 1\frac{1}{8} .$$

Вместе с соотношениями (5) получаем систему уравнений, разрешая которую относительно β_m имеем $\beta_1 = \beta_3 = -\frac{1}{16}$, $\beta_2 = \beta_4 = 0$.

Результирующая оценка погрешности имеет вид:

$$\|\sigma-f\| = \frac{1}{16} h^2(\|f''_{xx}\| + \|f''_{yy}\| + 2\|f''_{xy}\|) + o(h^2).$$



б) Неравномерная прямоугольная сетка. Здесь обстоятельства складываются удачно в том смысле, что выражения, содержащие произведения $\delta x_n \ \delta y_n$, автоматически обращаются в нуль, так что коэффициент при смешанной производной остается без изменения. Решая систему уравнений (5), (6) и выбирая параметры, минимизирующие уклонение на треугольнике с большей стороной, тем самым проводим аппроксимацию с коэффициентами

$$q_{ij} = f(x_i, y_j) - \frac{\max(h^2x_{i-1}, h^2x_i)}{8} f_j(x_{i-1}; x_i; x_{i+1}) -$$

$$- \frac{\max(h^2y_{j-1}, h^2y_j)}{8} f_i(y_{j-1}; y_j; y_{j+1}),$$

где $hx_i = x_{i+1} - x_i$, символ $f_j(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})$ обозначает разделенную разность 2-го порядка от функции $f(x, y_j)$ по узлам x_{i-1}, x_i, x_{i+1}. Оценка погрешности в этом случае носит локальный характер

$$\max_{\substack{x_i \le x \le x_{i+1} \\ y_j \le y \le y_{j+1}}} |\sigma(x,y) - f(x,y)| \le \frac{\max(h^2x_{i-1}, h^2x_i, h^2x_{i+1})}{16} \max|f''_{xx}| +$$

$$+ \frac{\max(h^2y_{j-1}, h^2y_j, h^2y_{j+1})}{16} \max|f''_{yy}| + \frac{hx_i \ hy_j}{4} \max|f''_{xy}| + \ldots$$

в) Сетка из правильных треугольников со стороной h. В этом случае можно уменьшить в два раза коэффициент при величине $\overline{f''_{xx}, f''_{yy}}$, где черта означает операцию взвешенного усреднения, добавляя к соотношениям (6) уравнения

$$\sum_{n=1}^{3} \beta_n (\delta^2 x_n + \delta^2 y_n) = h^2 \sum_{n=1}^{3} \beta_n = -\frac{1}{8} h^2 .$$

Получаем $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = -\frac{1}{24}$, $\alpha = 1\frac{1}{8}$, и оценка уклонения принимает вид

$$\|\sigma - f\| \le \frac{h^2}{16} [\max(\|f''_{xx}\|, \|f''_{yy}\|) + \sqrt{3} \|f''_{xy}\|] + o(h^2),$$

або

$$\sum_{m=1}^{3} \beta_m \delta x_m \delta y_m = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 .$$

3. Изучим сходимость к непрерывным функциям.

ТЕОРЕМА 4. При условиях теоремы 3 для любой функции $f\in C(\Omega)$ имеет место неравенство $\|\sigma - f\| \le (1+6B)\,\omega(f,H)$, где H – наибольшее расстояние между двумя соседними точками p_i,

$$B = \max\{|\beta_i^m| \,\big|\, 1 \le i \le N,\ 1\le m \le 6\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из выражения для остаточного члена

$$r_{ijk}(f) = \sum_{l=i,j,k} \varphi_l(x,y)\,([f(x_l,y_l) - f(x,y)] +$$

$$+ \sum_m \beta_l^m [f(x_l^m,y_l^m) - f(x_l,y_l)]\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для сетки "а" имеем $\|\sigma - f\| \le 2\frac{1}{4}\,\omega(f,h)$; для сетки "б" $\|\sigma-f\| \le 1\frac{1}{8}\,\omega(f,h)$.

4. Рассмотрим пример приближенного решения задачи наилучшего приближения функции $f\in C^2(\Omega)$ линейными сплайнами. Положим $q_i = f(x_i,y_i) + \varepsilon x_i + \varepsilon y_i$. Выбирая точки p_i так, чтобы выполнялись неравенства

$$\max_{i,j,k}\ \max_{\Delta_{ijk}} |f''_{xx}|\,\delta^2 x_{ijk} \le 16\,\varepsilon x ,$$

$$\max_{i,j,k}\ \max_{\Delta_{ijk}} |f''_{yy}|\,\delta^2 y_{ijk} \le 16\,\varepsilon y ,$$

$$\max_{i,j,k}\ \max_{\Delta_{ijk}} |f''_{xy}|\,H^2_{ijk} \le 6\varepsilon xy,$$

$$\min_{p_i} (\varepsilon x + \varepsilon y + \varepsilon xy) \le \varepsilon,$$

получаем процесс аппроксимации с коэффициентами

$$q_i = f(x_i,y_i) - \varepsilon x\ \mathrm{sign}\ f''_{xx}(x_i,y_i) - \varepsilon y\ \mathrm{sign}\ f''_{yy}(x_i,y_i),$$

гарантирующий заданную погрешность $\|\sigma - f\|\le\varepsilon$. При этом на каждом треугольнике приближение близко к наилучшему локальному.

Вернемся к интерполяционной оценке. Запишем тождество

$$2r_{ijk}(f) = \sum_l \varphi_l(x,y)[f''_{xx}(\xi,\eta)(x_l-x)^2 + 2f''_{xy}(\xi,\eta)(x_l-x)(y_l-y) +$$

$$+f''_{yy}(\xi,\eta)(y_l-y)^2]+\sum_l \varphi_l(x,y)\{[(f''_{xx})_l - f''_{xx}(\xi,\eta)](x_l-x)^2 +$$

$$+2[(f''_{xy})_l-f''_{xy}(\xi,\eta)](x_l-x)(y_l-y)+[(f''_{yy})_l-f''_{yy}(\xi,\eta)](y_l-y)^2\}.$$

Теперь видно, что знак главного члена погрешности совпадает с выражением $\operatorname{sign} \Gamma(\xi,\eta)$, где $\operatorname{sign} \Gamma(\xi,\eta)=+1$, если матрица $\Gamma(\xi,\eta)$ положительно определенная, и $\operatorname{sign} \Gamma(\xi,\eta)=-1$, если матрица $\Gamma(\xi,\eta)$ отрицательно определенная. Переходя к модулям, получаем

$$\max_{x,y\in\Delta_{ijk}} |\sigma(x,y)-f(x,y)| \le \frac{\max(\delta^2 x_{ijk},\delta^2 y_{ijk})}{8}\|\Gamma(\xi,\eta)\|_1 +$$

$$+\frac{H^2_{ijk}}{3}\max_{r+s=2} \omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^r \partial y^s}\right).$$

Для функции $f(x,y)$ с матрицей Γ постоянного знака, непосредственно рассматривая приближение многогранниками отрезков чаш параболоидов, убеждаемся, что близкое к наилучшему равномерное приближение с погрешностью $|r(f)| \le \max_l|\varepsilon_l| + o(H^2)$ доставляет элемент $\sigma_\varepsilon(x,y)$ с коэффициентами

$$q_l = \varepsilon_l \le -\frac{1}{16}\max_{j,k}[\max(\delta^2 x_{ijk},\delta^2 y_{ijk})\max_{\xi,\eta\in\Delta_{ijk}}\|\Gamma(\xi,\eta)\|_1 \times$$

$$\times \operatorname{sign}\Gamma(x_l,y_l).$$

Выравнивая полученные максимумы из условия $\min\max|\varepsilon_l| \le \varepsilon$, получаем приближение с гарантированной оценкой $\|\sigma-f\| \le \varepsilon + o(H^2)$. В случае, когда знак $\Gamma(x_l,y_l)$ не определен, имеем седловидную точку и полагаем $\operatorname{sign}\Gamma(x_l,y_l) = 0$.

Отметим, что для функций $f(x,y) = x^2+ y^2\pm xy$ наилучшее равномерное приближение доставляет интерполяционный элемент $\sigma(x,y)$, сдвинутый на величину $-\frac{1}{8}\max\limits_{i,j,k}\max\limits_{l,s=i,j,k}[x_l-x_s\pm(y_l-y_s)]^2$, поскольку в этом случае из доказательства теоремы I следует, что уклонение $\sigma(x,y)-f(x,y)$ достигает своего максимального значения в одном из треугольников Δ_{ijk} ровно четыре раза, меняя знак.

Литература

I. СТРЭНГ Г., ФИКС Дж. Теория метода конечных элементов. М., "Мир", 1977.

2. CIARLET P.G., RAVIART P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods. - "Arch.Rational Mech.and Analysis",1972,v.46,N 3,p.177-199.

3. BUCK R.C. Alternation theorems for functions of several variables.-"J.Approximat.Theory",1968,v.1,N 3,p.325-334.

Поступила в ред.-изд.отд.
10 июля 1978 года