МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 75

УДК 518.12

КУБИЧЕСКАЯ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КАК СРЕДСТВО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

В.А.Скороспелов

В статье описывается методика приближения пространственных кривых кубическими сплайнами, которая была успешно применена для внутреннего стандартного представления геометрического объекта "дуга кривой" в автоматизированной системе обработки геометрической информации [I].

В основе этой методики лежит кубическая эрмитова сплайн-интерполяция вектор-функции скалярного аргумента. Этому вопросу посвящен §I. Здесь приводятся постановка задачи интерполирования и оценка погрешности. §2 посвящен вопросу приближения дуги кривой кубическим сплайном. Рассматривается задача о восстановлении кривой по заданным точкам, в которых известно направление касательного вектора.

§I. Эрмитова интерполяция вектор-функции кубическим сплайном

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть на отрезке $[a,b]$ вещественной переменной t задана сетка Δ: $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ и пусть на этом отрезке определена непрерывная вектор-функция $\bar{r} = \bar{S}(t) = \bar{e}_1 S_x(t) + \bar{e}_2 S_y(t) + \bar{e}_3 S_z(t)$ ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – орты декартовых прямоугольных осей координат) такая, что на каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ $\bar{S}(t)$ есть кубический полином

$$\bar{P}_i(t) = \sum_{\lambda=0}^{3} \bar{a}_\lambda^{(i)} (t-t_i)^\lambda \qquad (I)$$

с векторными коэффициентами $\bar{a}_\lambda^{(i)} = (a_{x\lambda}^{(i)}, a_{y\lambda}^{(i)}, a_{z\lambda}^{(i)})$. Такую вектор-функцию назовем кубическим векторным сплайном и в дальнейшем для краткости будем пользоваться следующими его обозначениями: $\bar{S}_\Delta(t)$, $\bar{F}$-сплайн.

Задача интерполирования. Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах сетки Δ заданы значения вектор-функции $\bar{r}_i = \bar{r}(t_i)$ и ее первых производных $\bar{r}'_i = \frac{\partial}{\partial t}\bar{r}(t)\Big|_{t=t_i}$. Требуется построить кубический векторный сплайн $\bar{r} = \bar{S}_\Delta(t)$, интерполирующий $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}'(t)$, т.е. удовлетворяющий условиям:

$$\bar{S}_\Delta(t_i) = \bar{r}(t_i),\ \bar{S}'_\Delta(t_i) = \bar{r}'(t_i), \quad i=1,2,\dots,n\ . \tag{2}$$

Рассмотрим произвольный участок $[\,t_i, t_{i+1}\,]$. Коэффициенты $\bar{a}_\lambda^{(i)}$ полинома (I) определяются из условий, эквивалентных (2): $\bar{P}_i(t_i) = \bar{r}_i$, $\bar{P}_i(t_{i+1}) = \bar{r}_{i+1}$, $\bar{P}'_i(t_i)=\bar{r}'_i$, $\bar{P}'_i(t_{i+1})=\bar{r}'_{i+1}$. Подставляя сюда выражение (I), получим систему уравнений относительно величин $\bar{a}_\lambda^{(i)}$, которая имеет решение:

$$\bar{a}_0^{(i)} = \bar{r}_i\,,$$

$$\bar{a}_1^{(i)} = \bar{r}'_i\,,$$

$$\bar{a}_2^{(i)} = \frac{1}{\Delta t_i^2}\left(3\bar{h}_i-\Delta t_i(2\bar{r}'_i+\bar{r}'_{i+1})\right), \tag{3}$$

$$\bar{a}_3^{(i)} = \frac{1}{\Delta t_i^3}\left(-2\bar{h}_i+\Delta t_i(\bar{r}'_i+\bar{r}'_{i+1})\right),$$

где $\bar{h}_i = \bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$.

Таким образом, условия (2) однозначно определяют $\bar{S}_\Delta(t)$. При этом следует отметить очень важное с точки зрения практических приложений свойство локальности полученного сплайна, которое заключается в том, что каждое его звено определяется независимо от остальных.

В дальнейшем будем пользоваться следующей формой представления полинома (I). Подставим (3) в (I), соберем степени t при известных величинах $\bar{r}_i, \bar{r}_{i+1}, \bar{r}'_i, \bar{r}'_{i+1}$ и сделаем замену переменной

$$u = \frac{t-t_i}{\Delta t_i}\ . \tag{4}$$

Тогда для звена $\bar{P}_i(u)$ $\bar{P}$-сплайна получим выражение, эквивалентное (I):

$$\bar{P}_i(u) = \bar{r}_i F_1 + \bar{r}_{i+1} F_2 + \bar{r}_{iu} G_1 + \bar{r}_{i+1,u} G_2; \quad u \in [0,1],$$

где $F_1 = (1-u)^2(2u+1)$, $F_2 = u^2(3-2u)$, $G_1 = u(1-u)^2$, $G_2 = u^2(u-1)$,

$$\bar{r}_{iu} = \Delta t_i \, \bar{r}'_i = \left.\frac{\partial \bar{r}(u)}{\partial u}\right|_{u=0}, \quad \bar{r}_{i+1,u} = \Delta t_i \bar{r}'_{i+1} = \left.\frac{\partial \bar{r}(u)}{\partial u}\right|_{u=1}.$$

В качестве погрешности интерполяции $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}'(t)$ $\bar{P}$-сплайном примем величину $R^{(k)}(t) = |\bar{r}^{(k)}(t) - \bar{S}_\Delta^{(k)}(t)|$, $t \in [a,b]$, $k=0,1$. Оценку погрешности проведем, предполагая, что $\bar{r}(t)$ на $[a,b]$ имеет кусочно-непрерывную вторую производную.

Рассмотрим произвольный участок с номером i и заменой переменной (4) приведем его к отрезку $[0,I]$. Тогда $R_i(u) = |\bar{r}_i(u) - \bar{P}_i(u)| = |\bar{r}_i(u) - \bar{r}_i F_1 - \bar{r}_{i+1} F_2 - \bar{r}_{iu} G_1 - \bar{r}_{i+1,u} G_2|$. Подставим сюда величины $r_i, r_{i+1}, r_{iu}, r_{i+1,u}$, представив их в виде разложения Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши [2]. Учитывая, что $F_1 + F_2 + G_1 + G_2 \equiv 1$, получим:

$$R_i(u) = \left| F_1 \int_0^u \bar{r}_{uu} g \, dg + F_2 \int_u^1 \bar{r}_{uu}(1-g)\,dg - G_1 \int_0^u \bar{r}_{uu}\,dg + G_2 \int_1^u \bar{r}_{uu}\,dg \right| \le$$

$$\le \left| \int_0^u \bar{r}_{uu}[F_1(u)g - G_1(u)]\,dg \right| + \left| \int_1^u \bar{r}_{uu}[F_2(u)(1-g) + G_2(u)]\,dg \right| = I_1 + I_2,$$

где $\bar{r}_{uu} = \bar{r}''(u)$. Положим $\|\bar{r}_{uu}\| = \max\limits_{u \in [0,1]} |\bar{r}_{uu}(u)|$. Тогда для I_1 и I_2 справедливы оценки

$$I_1 \le \int_0^u |\bar{r}_{uu}| |F_1 g - G_1|\,dg \le \|\bar{r}_{uu}\| (1-u)^2 \int_0^u |(2u+1)g - u|\,dg =$$

$$= (1-u)^2 u^2 \frac{(1-4u^2)}{2(2u+1)} \|\bar{r}_{uu}\|,$$

$$I_2 \le \int_u^1 |\bar{r}_{uu}| |(1+g)F_2 - G_2|\,dg \le \|\bar{r}_{uu}\| u^2 \int_u^1 |(2u-3)g + (2-u)\,dg =$$

$$= (1-u)^2 u^2 \frac{4(1-u)^2+1}{2(3-2u)} \|\bar{r}_{uu}\|,$$

на основании которых получим

$$R_i(u) \le 4\,\frac{u^2(1-u)^2}{(3-2u)(2u+1)}\,\|\,\bar r_{uu}\,\|\,.$$

Поскольку $\max\limits_{u\in[0,1]} \dfrac{u^2(1-u)^2}{(3-2u)(2u+1)} = 1/64$ и учитывая, что $\|\,\bar r_{uu}\| = \Delta t_i^2 \max\limits_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |\bar r_{tt}(t)| = \Delta t_i^2 \|\bar r_{tt}\|_i$, окончательно для погрешности интерполяции вектор-функции $\bar P$-сплайном на произвольном участке сетки Δ получим оценку [ж)]

$$R_i(t) \le \frac{1}{16}\,\Delta t_i^2\,\|\,\bar r_{tt}\,\|_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,n-1. \tag{5}$$

Для погрешности интерполяции первой производной приведем только окончательный результат, поскольку техника получения оценки остается прежней

$$R_i'(t) \le \frac{25}{108}\,\Delta t_i\,\|\,\bar r_{tt}\,\|_i\,, \quad i = 1,2,\ldots,n-1\,. \tag{6}$$

Обозначим через α угол между векторами $\bar r'(t)$ и $\bar P'(t)$. Его величина характеризует погрешность приближения касательного вектора по направлению. Справедливо следующее неравенство $|\sin\alpha| \le (|\bar r'(t) - \bar P'(t)|)/|\,\bar r'(t)\,|$, на основании которого получим

$$|\,\sin\alpha\,|_i \le \frac{25}{108}\,\Delta t_i\,\|\bar r_{tt}\|_i \Big/ \min_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |\bar r'(t)|\,.$$

§2. Приближение дуги кривой кубическим сплайном

Будем рассматривать кривые, состоящие из конечного числа регулярных (по крайней мере, дважды дифференцируемых) дуг, гладко сопряженных друг с другом. Иными словами, будем считать, что они допускают параметризацию $\bar r = \bar r(t)$, $t\in[a,b]$ с кусочно-непрерывной второй производной $\bar r''(t)$.

Предполагается, что на кривой всегда определено положительное направление обхода, в соответствии с которым

- считается упорядоченной любая последовательность ее точек;
- ориентирован касательный вектор;
- выбрано направление положительного изменения параметра для различных параметризаций кривой.

[ж)] Технология получения подобных оценок погрешности сплайн-интерполяции разработана Мирошниченко В.Л. Автор применил ее для оценки погрешности кубической сплайн-интерполяции вектор-функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вектор-функцию $\bar{P}(t)$, $t\in[a,b]$ назовем ε-приближением кривой Γ, если среди всех параметризаций этой кривой, определенных на отрезке $[a,b]$, найдется такая параметризация $\bar{r}(t)$, что $|\bar{P}(t) - \bar{r}(t)| \le \varepsilon$ на $[a,b]$.

Ответ на вопрос о существовании такой вектор-функции дает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Любую регулярную (по крайней мере, дважды дифференцируемую) кривую можно приближенно описать $\bar{P}$-сплайном с погрешностью, не превышающей наперед заданную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{r}(t)$, $t\in[a,b]$, есть некоторая параметризация кривой. Из предыдущего параграфа известно, что $\bar{P}$-сплайн, определенный на сетке Δ: $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$, интерполирует ее на каждом участке этого разбиения с погрешностью, для которой справедлива оценка (5). Задавшись некоторым $\varepsilon > 0$, потребуем чтобы $R_i(t) \le \varepsilon$. Это условие накладывает ограничение на длину участков разбиения Δ

$$\Delta t_i \le 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{\|\bar{r}_{tt}\|_i}}\,, \quad i = 1,2,\ldots,n-1\,.$$

Поскольку сетка Δ произвольная, можно добиться, чтобы она удовлетворяла этому условию. Тогда из (5) следует, что $|\bar{r}(t) - \bar{P}(t)| \le \varepsilon$ на $[a,b]$. А это и означает, что $\bar{P} = \bar{P}(t)$ есть ε-приближение кривой.

Из утверждения следует, что задача о приближении кривой $\bar{P}$-сплайном, когда известна какая-либо ее параметризация, фактически сводится к выбору некоторой сетки Δ, зависящей от этой параметризации и заданной степени приближения кривой.

Рассмотрим задачу о восстановлении кривой. Пусть $\{Q_i\}$, $i=1,2,\ldots,n$,– последовательность точек кривой, в каждой из которых известно направление касательного вектора к ней. Требуется определить гладкую кривую, проходящую через заданные точки и имеющую заданное направление касательной в них. Интерес представляет также ответ на вопрос: какова при этом погрешность восстановления кривой?

Эту задачу можно свести к задаче интерполяции вектор-функции, если при некоторых соглашениях относительно выбора точек Q_i в них удается определить значение какой-либо параметризации кривой.

Так, например, будем предполагать, что если с каждой дугой $[Q_i, Q_{i+1}]$ связать прямоугольную декартову систему координат $(O^{(i)}, x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)})$ с началом в точке Q_i и осью $x^{(i)}$, проходящей через точку Q_{i+1}, то в этих осях дуга допускает параметризацию:

$$x^{(i)} = t, \; y^{(i)} = y^{(i)}(t), \; z^{(i)} = z^{(i)}(t), \; t \in [0, h_i], \qquad (7)$$

где $y^{(i)}(t)$, $z^{(i)}(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции с кусочно-непрерывной второй производной, h_i – длина хорды, соединяющей точки Q_i, Q_{i+1}.

Рассмотрим подробно произвольный участок разбиения кривой, опуская для удобства записи его индекс. Длина дуги участка

$$\Delta s = \int_0^h |\bar{r}'|dt = \int_0^h \sqrt{1+y_t^2+z_t^2}\, dt \,.$$

Пусть $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы касательного вектора к кривой. Тогда $y_t = \cos\beta/\cos\alpha$, $z_t = \cos\gamma/\cos\alpha$. Поскольку $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, для длины дуги справедлива следующая оценка:

$$\Delta s = \int_0^h \frac{1}{\cos\alpha}\, dt \le h/C_x, \qquad (8)$$

где $C_x = \cos\alpha_{max}$, α_{max} – максимальный угол наклона касательного вектора к хорде.

Так как параметризация (7) связана с естественной параметризацией соотношением $s = s(t)$, $t \in [0, h]$, где $s(t)$ – строго монотонная функция, можно записать $\bar{r}_t = \bar{r}_s s_t$, $\bar{r}_{tt} = \bar{r}_{ss} s_t^2 + \bar{r}_s s_{tt}$. Из определения дуги следует

$$s_t = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{1}{\cos\alpha}\, dt = \frac{1}{\cos\alpha} \,.$$

Поскольку $x_{tt} = 0$, то $k(t) s_t^2 \cos\delta + s_{tt}\cos\alpha = 0$, где $k(t)$ – кривизна кривой, δ – угол наклона вектора главной нормали к хорде. Отсюда

$$s_{tt} = -\frac{k(t)\cos\delta}{\cos^3\alpha} \,.$$

Теперь нетрудно получить оценку величины

$$\|\bar{F}_{tt}\| = \sqrt{k^2(t)s_t^4+s_{tt}^2} = \sqrt{k^2\frac{1}{\cos^4\alpha}+k^2\frac{\cos^2\delta}{\cos^6\alpha}} = \frac{k(t)}{\cos^3\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\delta}.$$

Поскольку $\cos\delta \le \sin\alpha$, окончательно получим

$$\|\bar{r}_{tt}\| \le \frac{k_{max}}{C_x^3}, \tag{9}$$

где $k_{max} = \max\limits_{t\in[0,h]} k(t)$.

Обратимся непосредственно к поставленной задаче. Обозначим через $\bar{r}_i$ радиус-вектор точки Q_i , через $\bar{H}_i$ – заданный единичный касательный вектор кривой в этой точке. Рассмотрим сетку Δ: $0=t_1<$ $<t_2<\ldots<t_n=b$, где $t_i = \sum\limits_{k=1}^{i} h_k$, $i = 2,3,\ldots,n-1$, h_i –хорда i-го участка разбиения. На ней определим следующий P-сплайн, приближающий на каждом участке только что рассмотренную параметризацию,

$$\bar{P}_i = \bar{P}_i(\bar{r}_i,\bar{r}_{i+1},c_i\bar{H}_i,d_i\bar{H}_{i+1}),\ t\in[t_i,t_{i+1}],\ i = 1,2,\ldots,n-1, \tag{10}$$

где

$$c_i = \frac{h_i}{(\bar{H},\bar{h}_j)},\quad d_i = \frac{h_i}{(\bar{H}_{i+1},\bar{h}_i)},\quad \bar{h}_i = (\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_i).$$

Нетрудно убедиться, что этот сплайн удовлетворяет условиям поставленной задачи, а на основании (9) и (5) можно утверждать, что он восстанавливает на каждом участке кривую с погрешностью R_x , для которой справедлива оценка

$$R_{xi} \le \frac{k_{max}^{(i)}h_i^2}{16\,C_{xi}^3},\quad i = 1,2,\ldots,n-1 .$$

Следует отметить следующую особенность полученного решения. Каждое звено сплайна (10) приближает параметризацию (7), определенную на соответствующем участке разбиения Δ. По этой причине его первая производная, оставаясь непрерывной по направлению на $[0,b]$, терпит разрыв по модулю в каждом внутреннем узле сетки Δ .

Для сравнения рассмотрим оценку погрешности интерполяции естественной параметризации кривой P-сплайном $R_{si} \le \frac{k_{max}^{(i)}\Delta s_i^2}{16}$. Учитывая (8), можно записать следующее соотношение между R_{xi} и R_{si}: $R_{si} \le R_{xi} \cdot C_{xi}$, которое означает, что естественная параметризация приближается лучше, чем параметризация (7), и дальнейшие рассуждения направлены на приближенное определение естественной параметризации кривой.

Из (6) следует соотношение $\left| |\bar{r}_t| - |\bar{P}_t^{(i)}| \right| \le C \Delta t_i \| \bar{r}_{tt} \|_i$, $C = \frac{25}{108}$. Интегрируя его на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, получим неравенство

$$|\Delta s_i - \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\bar{P}_t^{(i)}| \, dt| \le C \Delta t_i^2 \| \bar{r}_{tt} \|_i ,$$

которое означает, что погрешность приближения длины дуги кривой $\bar{P}$ -сплайном имеет тот же порядок, что и погрешность приближения самой кривой. Этот факт наводит на мысль использовать длину дуги сплайна в качестве приближения длины дуги кривой.

Рассмотрим звено $\bar{P}$ -сплайна, приближающее естественную параметризацию участка кривой с длиной дуги Δs и отнесенное к единичному отрезку, $\bar{P} = \bar{P}(u, \Delta s)$, $u \in [0,1]$. Считая Δs неизвестной величиной, потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\Delta s = \int_0^1 |\bar{P}'(u, \Delta s)| \, du . \qquad (II)$$

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение. Обозначим $\Phi(a) = \int_0^1 |\bar{P}'(u,a)| du$, $a \in [0, +\infty]$. Отметим следующие свойства этой функции:

$$1. \left| \frac{\partial}{\partial a} \Phi(a) \right| = \left| \frac{\partial}{\partial a} |\bar{P}'(u,a)| \, du \right| \le 1;$$

$$2. \ \Phi(a) > 0.$$

Рассмотрим $\Psi(a) = a - \Phi(a)$. Поскольку $\Psi' = 1 - \frac{\partial}{\partial a} \Phi(a) \ge 0$, $\Psi(0) < 0$ и $\lim_{a \to \infty} \Psi(a) = \infty$, найдется единственная точка $a^* > 0$ такая, что $\Psi(a^*) = 0$. Это и доказывает существование и единственность решения уравнения (II).

Так как в (II) справа стоит выражение длины дуги некоторой кривой, опирающейся на хорду h, справедливо неравенство $\Delta s \geq h$. Обозначим: $\bar{F}_1, F_2$ – граничные точки дуги, $\bar{H}_1, \bar{H}_2$ – единичные касательные вектора в них, $C_1 = \cos\alpha_1 = \frac{1}{h}(\bar{H}_1, \bar{h})$, $C_2 = \cos\alpha_2 = \frac{1}{h}(\bar{H}_2, \bar{h})$, $C = \min(C_1, C_2)$, $\rho = (\bar{H}_1, \bar{H}_2)$.

Рассмотрим:

$$\Phi\left(\frac{h}{C}\right) = \int_0^1 \left|P_u\left(u, \frac{h}{C}\right)\right| du =$$

$$= \frac{h}{C}\int_0^1 \sqrt{[F_2' C + (C_1 G_1' + C_2 G_2')]^2 - (C_1 G_1' + C_2 G_2')^2 + (G_1'^2 + G_2'^2 + \rho G_1' G_2')}\, du .$$

Можно показать, что выражение под корнем не превышает единицы для $u \in [0,1]$. Отсюда следует, что $\Phi\left(\frac{h}{C}\right) \leq \frac{h}{C}$ и для корня уравнения (II) справедлива оценка $h \leq \Delta s \leq \frac{h}{C}$.

Решение уравнения (II) можно получить методом итераций. Свойство I функции $\Phi(s)$ означает, что для этого метода выполнены достаточные условия сходимости. В качестве начального приближения следует взять $\Delta s_0 = h$.

Литература

I. ВАЙСБЕРГ Г.В., КОВАЛЕВА Л.Г., ПАВЛОВ Н.Н., СКОРОСПЕЛОВ В.А., ТУРУК П.А. Автоматизированная система проектирования и технологической подготовки производства. –В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы, вып. 68.) Новосибирск, 1976, с. 100-116.

2. БУРБАКИ Н. Функции действительного переменного. М., "Наука", 1965.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 мая 1978 года