М Е Т О Д Ы   С П Л А Й Н - Ф У Н К Ц И Й
(Вычислительные системы)

1978 год   Выпуск 75

УДК 518.5

К ВОПРОСУ ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ КУБИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Н.Н. Павлов

Способ аппроксимации точечно заданных кривых, предложенный в [I], состоит в построении на заданной сетке кубического параметрического сплайна дефекта 2, минимизирующего функционал суммы квадратов уклонений точек исходной кривой.

Такой подход дает приемлемые результаты лишь тогда, когда каждое из подмножеств множества точек исходной кривой, аппроксимируемое двумя соседними звеньями сплайна, содержит большое число точек. Когда же число точек хотя бы в одном из таких подмножеств мало (но не меньше трех, ибо в противном случае нет единственности решения [I]), характер поведения аппроксимирующего сплайна может сильно отличаться от характера аппроксимируемой кривой, при этом разрывы второй производной в узлах сплайна могут принимать очень большие значения.

Указанные недостатки могут быть в значительной степени устранены путем введения ограничений на разрывы второй производной в узлах сплайна. Решению задачи построения аппроксимирующего сплайна с такими ограничениями посвящена настоящая статья.

Пусть аппроксимируемая дуга задана упорядоченным массивом точек, представленных своими радиусами-векторами $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i=\overline{1,n}$. Аппроксимирующая кривая берется в виде кубического параметрического сплайна дефекта 2 $\vec{R}(t) \in C^1[0,I]$, определенного на сетке $0 = T_1 < T_2 < \ldots < T_N = 1$ и представимого на отрезке $[T_{L-1}, T_L]$, $2 \le L \le N$, в виде:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_{L-1} F_0^{(L)}(t) + \vec{R}_L F_1^{(L)}(t) + R'_{L-1} G_0^{(L)}(t) + R'_L G^{(L)}(t),$$

где $F_0^{(L)}(t) = (T_L-t)^2[2(t-T_{L-1})-h_L]/h_L^3$,

$$F_1^{(L)}(t) = 1 - F_0^{(L)}(t),$$

$$G_0^{(L)}(t) = (T_L - t)^2(t - T_{L-1})/h_L^2 ,$$

$$G_1^{(L)}(t) = -(t - T_{L-1})^2(T_L - t)/h_L^2 ,$$

$$h_L = T_L - T_{L-1} .$$

Коэффициенты $\{\vec{R}_L, \vec{H}_L, L=\overline{1,N}\} = q$ подлежат определению из условия минимума функционала

$$\left.\begin{aligned} &H(q) = \sum_{i=2}^{n-1} \min_{t_i\in[0,1]} [\vec{R}(t_i)-\vec{r}_i]^2 , \\ &\text{при ограничении} \\ &f(q) = \sum_{L=2}^{N-1} [\vec{R}''(T_L+0)-\vec{R}''(T_L-0)]^2 \le \varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Здесь

$$\vec{R}''(T_L+0)-\vec{R}''(T_L-0)=\lambda_L\vec{H}_{L-1}+2\vec{H}_L+\mu_L\vec{H}_{L+1}-3\lambda_L\frac{\vec{R}_L-\vec{R}_{L-1}}{h_L} - 3\mu_L\frac{\vec{R}_{L+1}-\vec{R}_L}{h_{L+1}}$$
$$\lambda_L=\frac{h_{L+1}}{h_L+h_{L+1}}, \qquad \mu_L = 1-\lambda_L , \qquad h_L = T_L - T_{L-1} \qquad (2)$$

Рассмотрим задачу: минимизировать функционал $H(q)$ при ограничении $f(q) = 0$. Пусть $Q = \{q: f(q) = 0\}$, $q_H = \arg\min[H(q)]$ (запись $q_F=\arg\min[F(q)]$ означает, что аргумент q_F доставляет минимум функционалу $F(q)$). В дальнейшем будем считать, что $q_H \notin Q$, так как в случае $q_H\in Q$ задача сводится к отысканию q_H.

Рассмотрим последовательность $\{ q_k = \arg\min[H(q) + p_k f(q)]\}$, где p_k неотрицательные вещественные числа, причем $p_{k+1} > p_k$ и $\lim_{k\to\infty} p_k = \infty$.

В [2] доказывается сходимость $\{q_k\}$ к решению сформулированной задачи при предположении, что функционалы $H(q)$ и $f(q)$ являются полунепрерывными снизу. В нашем случае $H(q)$ и $f(q)$ даже непрерывны.

Имеем $\lim_{k\to\infty} f(q_k) = 0$, следовательно, $\forall\varepsilon > 0$ найдётся $p_\varepsilon \geq 0$ такое, что для $p \geq p_\varepsilon$

$$f(q_p) \leq \varepsilon. \tag{3}$$

Покажем, что для выполнения неравенства (3) достаточно взять $p_\varepsilon = H(q^*)/\varepsilon$, где q^* – произвольный элемент множества Q.

Предположим противное: пусть $f(q_p) > \varepsilon$ при $p \geq p_\varepsilon = H(q^*)/\varepsilon$. Так как q_p является точкой минимума функционала $H(q) + pf(q)$, то $H(q^*) + pf(q^*) \geq H(q_p) + pf(q_p)$. Но $f(q^*) = 0$, а $H(q_p) \geq 0$, следовательно,

$$H(q^*) \geq pf(q_p) \geq \frac{H(q^*)}{\varepsilon} f(q_p) = \frac{f(q_p)}{\varepsilon} H(q^*) .$$

Но $H(q^*) \neq 0$, так как в противном случае $q^* = q_H$, что противоречит тому, что $q_H \notin Q$. Следовательно, $H(q^*) > H(q^*)$.

Итак, наше предположение о том, что $f(q_p) > \varepsilon$, неверно.

Доказанное утверждение справедливо для любого неотрицательного функционала $F(x)$, имеющего единственный минимум и минимизируемого при ограничении $f(x)=0$.

В нашем случае для получения оценки p_ε сверху достаточно положить $q^* = 0$. Для получения более тонкой оценки может быть использован следующий прием. Пусть $\vec{R}(t)$, $t \in [0,1]$, – аппроксимирующий сплайн на простейшей подсетке $0 = T_1 < T_N = 1$ исходной сетки, тогда $q^* = \{\vec{R}_k = \vec{R}(T_k),\ \vec{H}_k = \vec{R}'(T_k),\ k = \overline{1,N}\}$ будет принадлежать, очевидно, Q. При этом $H(0) > H(q^*)$.

Рассмотрим задачу, тождественную (1): минимизировать функционал

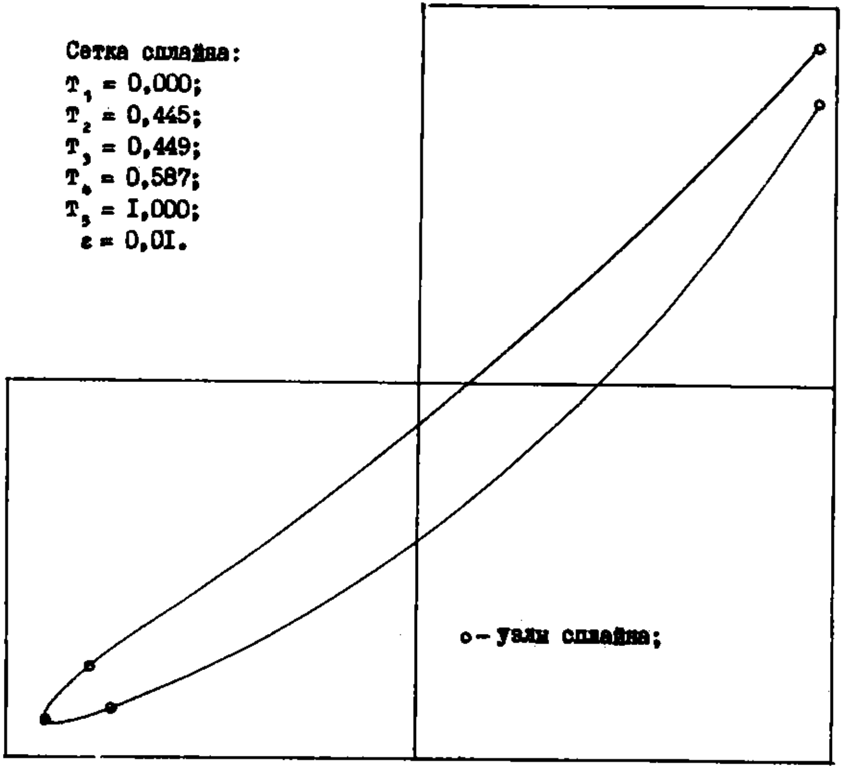
$$F = \sum_{i=2}^{n-1} [\vec{R}(t_i) - \bar{r}_i]^2 + pf(q)$$

при ограничениях

$$\frac{\partial}{\partial t_i} [\vec{R}(t_i) - \bar{r}_i]^2 = 0, \quad p \geq p_\varepsilon.$$

Применяя метод неопределенных множителей Лагранжа, приходим к системе вида

Сетка сплайна:
$T_1 = 0{,}000;$
$T_2 = 0{,}445;$
$T_3 = 0{,}449;$
$T_4 = 0{,}587;$
$T_5 = I{,}000;$
$\varepsilon = 0{,}0I.$



Аппроксимация гидродинамического профиля

X	Y	ΔR
94,80	78,50	0,45
71,10	52,60	0,19
47,40	29,90	0,30
23,70	7,90	0,31
0,00	−12,90	0,38
−23,70	−33,00	0,60
−71,10	−67,90	0,64
−94,80	−84,30	0,59
−106,60	−93,00	0,56
−115,00	−101,70	0,71
−106,60	−104,80	0,23
−94,80	−101,00	0,34
−71,10	−90,90	0,30
−47,40	−77,90	0,20
−23,70	−63,00	0,12
0,00	−45,50	0,06
23,70	−25,00	0,27
47,40	0,00	0,18
71,10	28,60	0,12
94,80	62,60	0,10

X,Y – координаты точек профиля; ΔR – величина уклонений исходных точек от аппроксимационной кривой.

$$\frac{\partial}{\partial q} F(q;\ t_2,\dots,\ t_{n-1}) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t_i} F(q;\ t_2,\dots,\ t_{n-1}) = 0,\quad i=\overline{2,n-1}. \qquad (4)$$

Заметим, что решением системы (4) будет точка минимума функционала F, выпуклого по переменным q и локально выпуклого по переменным $t_i \in T$, $i=\overline{2,n-1}$, (T – область локальной выпуклости F). Для отыскания минимума функционала F может быть применен один из методов численной минимизации. Следует иметь в виду только, что начальное приближение решения $t_i^{(0)}$, $i=\overline{2,n-1}$, должно принадлежать области T.

Величина ε, ограничивающая сумму квадратов разрывов второй производной в узлах сплайна, выбирается в зависимости от требований, предъявляемых к аппроксимирующему сплайну. Например, для построения сплайна, мало отличающегося от сплайна дефекта I, необходимо взять $\varepsilon \ll 1$. При этом следует иметь в виду, что, так как задача будет решаться численно, ε следует выбирать таким, чтобы не выйти за границы диапазона чисел, с которым может оперировать ЭВМ.

Функцию $f(q)$ можно задать в виде

$$f(q) = \sum_{L=2}^{N-1} \delta_L [\bar{R}''(T_L+0)-\bar{R}''(T_L-0)]^2 \quad ,$$

где δ_L могут принимать значения 0 и I. Это позволяет аппроксимировать кривые, состоящие из "плавных" участков, некоторым образом "сопряженных" между собой, например, кривую, состоящую из двух или большего числа гладко сопряженных прямолинейных участков.

На рисунке приведен пример аппроксимации гидродинамического профиля с помощью описанного метода.

Литература

I. ПАВЛОВ Н.Н., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Аппроксимация поверхностей лопасти гидротурбины. –В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы. Вып. 72.) Новосибирск, 1977, с. 56-64.

2. BUTLER T., MARTIN A. On a method of Courant for minimizing functionals. – "J.Math.and Phys.", 1962, vol.41, p.291-299.

Поступила в ред.-изд.отд.
6 июня 1978 года