МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)

I978 год Выпуск 75

5I7.5

ФОРМУЛЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. Имамов

Ж.Л.Лагранж построил полином степени N, совпадающий с функцией одной переменной $x(t)$ в точках $t=a_i$, $i=0,1,\dots,N$, из отрезка $[a,b]$ в следующей форме (см. [I]):

$$I_N(x;t) = \sum_{i=0}^{N} x(a_i)\,\varphi_i(t), \qquad \text{(I)}$$

где базисные интерполяционные полиномы $\varphi_i(t)$ определяются как

$$\varphi_i(t) = \prod_{k\neq i} \frac{t-a_k}{a_i-a_k}, \qquad i = 0,1,\dots,N. \qquad (2)$$

Многие интерполяционные формулы, в частности формулы интерполирования тригонометрическими и обобщенными полиномами, рациональными и сплайн-функциями, формально можно записать в виде (I). Существенное обстоятельство в формуле Лагранжа является то, что в ней базисные функции записываются в явном виде (2). То же самое можно говорить о формуле интерполирования тригонометрическими полиномами.

В остальных случаях, особенно в случае функций многих переменных, явные базисные функции интерполирования, за исключением некоторых видов расположения узлов интерполирования, не были известны до недавних пор. В I959 году И.С.Березин, Н.П.Жидков построили формулу интерполирования с явными полиномиальными базисными функциями. В I964 году Д.Шепард (см., например, [2]) построил формулу интерполирования с явными базисными функциями в виде отношения двух функций (рациональные функции). В настоящей статье мы предлагаем один принцип построения интерполяционных формул для функ -

ций многих переменных с явными достаточно гладкими базисными функциями при произвольном расположении узлов интерполяции и укажем множество интерполяционных формул, обобщающих формулы интерполирования Ньютона и Лагранжа.

I. Постановка задачи и формулы интерполирования. Пусть R^n – n-мерное евклидово пространство точек $t=[t_1,\dots,t_n]$ с обычной нормой $|t|=\sqrt{t_1^2+\dots+t_n^2}$; $\omega=\{a_i\in\Omega,\ i=0,1,\dots,N;\ a_i\neq a_k\}$ – произвольная сетка узлов, заданная в ограниченной области $\Omega\subset R^n$. Требуется найти функцию $I_N(x;t)$, совпадающую с функцией $x(t)$ в узлах сетки ω.

Для решения этой задачи рассмотрим множество $\Psi=\Psi(\omega)$ функций $\phi_{ik}(t)$ $(i\neq k;\ k=0,1,\dots,N)$ таких, что

1) $\phi_{ik}(t)$ – достаточно гладкая функция, определенная в области Ω с ограниченными производными;

2) $\phi_{ik}(a_i)=1$, $\phi_{ik}(a_k)=0$.

Приведем примеры функций $\phi_{ik}(t)$, которые принадлежат множеству Ψ независимо от сетки ω:

$$\phi_{ik}(t)=\langle t-a_k, a_i-a_k\rangle\cdot|a_i-a_k|^{-2},$$

$$\phi_{ik}(t)=|t-a_k|^{\alpha}\cdot|a_i-a_k|^{-\alpha}, \tag{3}$$

$$\phi_{ik}(t)=|t-a_k|^{\alpha}\exp|t-a_k|^{\beta}\ |a_i-a_k|^{-\alpha}(\exp|a_i-a_k|^{\beta})^{-1},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное в R^n произведение; α, β – натуральные числа.

Следующие функции не для всяких сеток ω образуют (причина объясняется ниже) множество $\Psi=\Psi(\omega)$:

$$\phi_{ik}(t)=\langle t-a_k, c\rangle\cdot(\langle a_i-a_k, c\rangle)^{-1} \quad (0\neq c\in R^n),$$

$$\phi_{ik}(t)=(|t|^{\alpha}-|a_k|^{\alpha})(|{\cdot}_i|^{\alpha}-|a_k|^{\alpha})^{-1}, \tag{4}$$

$$\phi_{ik}(t)=(\exp|t|^{\alpha}-\exp|a_k|^{\alpha})(\exp|a_i|^{\alpha}-\exp|a_k|^{\alpha})^{-1}.$$

Количество примеров функций $\phi_{ik}(t)$ типа (3) или (4) можно увеличивать следующими способами. Пусть функция $\phi(t)$ удовлетворяет условиям:

3) $\phi(t)$ – достаточно гладкая функция, определенная в области $\Omega_1=\bigcup\limits_{i=0}^{N}[\Omega-a_i]$ с ограниченными производными;

4) $\phi(0)=0$, $\phi(a_i - a_k) \neq 0$ для $i \neq k$.

Тогда ясно, что функция

$$\phi_{ik}(t) = \phi(t-a_k)(\phi(a_i-a_k))^{-1} \tag{5}$$

удовлетворяют условиям 1 и 2 (см. стр. 51).

Пусть теперь функция $\phi(t)$ такая, что

5) $\phi(t)$ – достаточно гладкая функция, определенная в области Ω с ограниченными производными;

6) $\phi(a_i) \neq \phi(a_k)$ для $i \neq k$, т.е. точки $a_i \in \omega$ лежат на поверхностях с различными уровнями функции $\phi(t)$.

Тогда функция

$$\phi_{ik}(t) = [\phi(t)-\phi(a_k)]\,[\phi(a_i)-\phi(a_k)]^{-1} \tag{6}$$

удовлетворяют условиям 1 и 2.

Условие 6 выясняет вопрос о том, почему функции $\phi_{ik}(t)$ (4) не для всяких сеток ω образуют множество $\Psi = \Psi(\omega)$ и когда его образуют. Например, чтобы имели смысл функции $\phi_{ik}(t) = \langle t - a_k, c\rangle \times (\langle a_i - a_k, c\rangle)^{-1}$, необходимо, чтобы точки $a_i \in \omega$ лежали на различных гиперплоскостях, а для двух последних функций из (4) – на различных сферах.

Теперь мы можем построить функцию $I_N(x;t)$.

ТЕОРЕМА I. Интерполирующая формула $I_N(x;t)$ имеет вид

$$I_N(x;t) = \sum_{i=0}^{N} x(a_i)\,\varphi_i(t) \,, \tag{7}$$

где

$$\varphi_i(t) = \prod_{k \neq i} \phi_{ik}(t), \quad i = 0,1,\ldots,N. \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) вытекает, что $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронеккера. Тогда ясно, что $I_N(x;a_j) = x(a_j)$, $j=0,1,\ldots,N$, и теорема доказана.

Подставляя $\varphi_i(t)$ $(i=0,1,\ldots,N)$ с $\phi_{ik}(t) = \langle t-a_k, a_i - a_k\rangle \times |a_i-a_k|^{-2}$ в формулу (7), получим результат И.С.Березина, Н.П.Жидкова. Полученная функция $I_N(x;t)$ является полиномом степени N. Аналогичный результат получается, если использовать функции

$$\phi_{ik}(t) = \langle t-a_k, c\rangle(\langle a_i-a_k, c\rangle)^{-1}, \; i \neq k; \quad i,k=0,1,\ldots,N.$$

Для сравнения приведем формулу Д.Шепарда

$$I_N(x;t) = \sum_{i=0}^{N} x(a_i)\Big(\prod_{k\neq i}|t-a_k|^{\alpha}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{N}\prod_{j\neq i}|t-a_j|^{\alpha}\Big)^{-1} .$$

2. Ньютонова форма записи формулы $I_N(x;t)$. Оказывается, что интерполяционную функцию $I_N(x;t)$ (7) можно записать в форме, близкой к формуле Ньютона полинома $I_N(x;t)$ (I), если для построения $\varphi_i(t)$, $i=0,1,\ldots,N$, использовать функции $\varphi_{ik}(t)$ вида (6). Для этого мы введем разделенные разности функции $x(t)$ относительно функции $\psi(t)$, удовлетворяющей условиям 5 и 6 (стр. 52).

Разделенные разности нулевого порядка $x_\psi(a_i)$ функции $x(t)$ относительно функции $\psi(t)$ в точках a_i $(i = 0,1,\ldots,N)$ совпадают со значениями $x(a_i)$; разности первого порядка определяются равенством $x_\psi(a_i;\, a_j) = [x(a_j)-x(a_i)][\psi(a_j)-\psi(a_i)]^{-1}$, разности второго порядка – равенством $x_\psi(a_i;\, a_j;\, a_k) = [x_\psi(a_j;\, a_k) - x_\psi(a_i;\, a_j)]\times$ $\times[\psi(a_k) - \psi(a_i)]^{-1}$,и вообще разности k-го порядка $x_\psi(a_0;\ldots;a_k)$ определяются через разности (k-1)-го порядка:

$$x_\psi(a_0;\ldots;a_k)=[x_\psi(a_1;\ldots;a_k)-x_\psi(a_0;\ldots;a_{k-1})][\psi(a_k) - \psi(a_0)]^{-1} .$$

Простое представление разделенных разностей $x_\psi(a_0;\ldots;a_k)$ k-го порядка дает следующая

ЛЕММА. Справедливо представление

$$x_\psi(a_0;\ldots;a_k) = \sum_{j=0}^{k} x(a_j) \prod_{i\neq j} [\psi(a_j) - \psi(a_i)]^{-1} . \qquad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы можно проводить по индукции, следуя [I], и мы его опускаем.

Из представления (9) вытекает ряд следствий:

I) разделенная разность $x_\psi(a_0;\ldots;a_k)$ является линейным оператором от функции $x(t)$;

2) разделенная разность $x_\psi(a_0;\ldots;a_k)$ не меняется при любой перестановке своих аргументов $a_0,\ldots,a_k$.

В этом разделе предположим, что базисные интерполяционные функции $\varphi_i(t)$, $i=0,1,\ldots,N$, построены на основе функций $\varphi_{ik}(t)$, $i\neq k$; $i,k=0,1,\ldots,N$, представимых в виде (6).

Докажем теперь следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Справедливо представление

$$I_N(x;t) = x(a_0) + [\phi(t)-\phi(a_0)]x_\phi(a_0;a_1)+\ldots+ \\ + \prod_{i=0}^{N-1} [\phi(t)-\phi(a_i)]x_\phi(a_0;\ldots;a_N). \tag{10}$$

При $\phi(t)=t\in R$ из (10) вытекает формула Ньютона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I_k(x;t)$ – интерполяционная формула (7) по узлам $a_0,\ldots,a_k$. Имеем

$$I_N(x;t)=I_0(x;t)+\sum_{k=0}^{N-1}[I_{k+1}(x;t)-I_k(x;t)]. \tag{11}$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках в (11) согласно формуле (9):

$$I_{k+1}(x;t)-I_k(x;t)= \\ =\prod_{j=0}^{k}[\phi(t)-\phi(a_j)]\left\{\sum_{i=0}^{k+1}x(a_i)\prod_{j\neq i}[\phi(a_i)-\phi(a_j)]^{-1}\right\}= \\ =\prod_{j=0}^{k}[\phi(t)-\phi(a_j)]x_\phi(a_0;\ldots;a_{k+1}).$$

Из этого равенства и (11) вытекает (10).

Теорема 3. Справедливо равенство

$$x(t)-I_N(x;t)=\prod_{i=0}^{N}[\phi(t)-\phi(a_i)]x_\phi(t;a_0,\ldots,a_N). \tag{12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из формулы (9) и следующего равенства

$$x(t)-I_N(x;t)=\prod_{i=0}^{N}[\phi(t)-\phi(a_i)]\left\{x(t)\prod_{i=0}^{N}[\phi(t)-\phi(a_i)]^{-1}+\right. \\ \left.+\sum_{i=0}^{N}x(a_i)[\phi(a_i)-\phi(t)]^{-1}\prod_{j\neq i}[\phi(a_i)-\phi(a_j)]^{-1}\right\}.$$

Равенство (12) является обобщением следующего представления остаточного члена интерполяции по Лагранжу:

$$x(t)-I_N(x;t)=\prod_{i=0}^{N}(t-a_i)x(t;a_0;\ldots;a_N).$$

ТЕОРЕМА 4. Справедливы равенства

$$x(t) - I_N(x;t)=0 \quad \text{для} \quad x(t)=\phi^p(t), \quad p\le N,$$

$$x(t) - I_N(x:t)=\prod_{i=0}^{N}[\phi(t)-\phi(a_i)] \quad \text{для} \quad x(t)=\phi^{N+1}(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно вытекает из следующего представления разделенных разностей

$$x_\phi(t;a_0;\dots;a_N)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ \phi(t) & \phi(a_0)\dots & \phi(a_N) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \phi^N(t) & \phi^N(a_0) & \phi^N(a_N) \\ x(t) & x(a_0) & x(a_N) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \phi(t) & \phi(a_0) & \dots & \phi(a_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \phi^N(t) & \phi^N(a_0) & \dots & \phi^N(a_N) \\ \phi^{N+1}(t) & \phi^{N+1}(a_0) & \dots & \phi^{N+1}(a_N) \end{vmatrix},$$

которое доказывается методом индукции.

Теорема 4 означает, что формула $I_N(x;\ t)$ восстанавливает точно функции вида $x(t)=\phi^p(t)$, $p \le N$.

Литература

I. БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений, т.I,М., Физматгиз, I959.

2. GORDON W.J.,WIXOM J.A. Shepard's Method of "Metric inter - polation" to bivariate and multivariate interpolation. - "Math.Computat", 1978, v.32, N 141, p.253-264.

Поступила в ред.-изд.отд.
I8 апреля I978 года.