МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 75

УДК 519.61

АЛГОРИТМ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

С.И. Фадеев

Численные подходы к решению многих задач математической физики позволяют представить проблему в виде линейной разностной краевой задачи с трехдиагональной матрицей коэффициентов:

$$\begin{aligned}
&A_{1,1}y_1 + A_{1,2}y_2 = B_1,\\
&A_{2,1}y_1 + A_{2,2}y_2 + A_{2,3}y_3 = B_2,\\
&\quad\dots\\
&A_{i,1}y_{i-1} + A_{i,2}y_i + A_{i,3}y_{i+1} = B_i,\\
&\quad\dots\\
&A_{N-1,1}y_{N-2} + A_{N-1,2}y_{N-1} + A_{N-1,3}y_N = B_{N-1},\\
&A_{N,1}y_{N-1} + A_{N,2}y_N = B_N,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $A_{i,1}, A_{i,2}, A_{i,3}$, B_i – заданные числа. Наиболее эффективным способом решения этой задачи является метод прогонки, различные варианты которого можно разделить на две группы. К первой группе отнесем те варианты, в которых устойчивость вычислений опирается на преобладание элементов главной диагонали матрицы коэффициентов A (см., например, [1][*]):

$$|A_{i,2}| \ge |A_{i,1}| + |A_{i,3}|, \quad i = 2,3,\dots,N-1;$$
$$|A_{1,1}| \ge |A_{1,2}|, |A_{N,2}| \ge |A_{N,1}|, |A_{1,1}/A_{1,2}| + |A_{N,2}/A_{N,1}| < 2. \tag{2}$$

Благодаря экономичности, простоте реализации и минимальным требованиям к машинной памяти, эти варианты прогонки получили широкое распространение.

---

[*] При большом числе публикаций по методу прогонки ссылка только на [1] лишь означает, что книга А.А.Самарского содержит достаточно полный список литературы по данному вопросу.

Ко второй группе отнесем численные методы, в которых прогонка организована устойчиво при более слабых ограничениях на коэффициенты $A_{i,j}$. В силу большей универсальности эти методы более громоздки, но практическое их применение оправдано, если есть уверенность в том, что решение системы линейных уравнений устойчиво по отношению к достаточно малым (принимая во внимание обусловленность матрицы A) возмущениям. Из известных методов этого типа отметим следующие.

В работе [2] (см.также [3]) метод прогонки использует ограничения на коэффициенты $A_{i,j}$, по смыслу противоположные (2): коэффициенты,не принадлежащие главной диагонали, должны быть отличны от нуля. Отметим также, что рекуррентные формулы метода, определяющие прогоночные коэффициенты, содержат операцию извлечения квадратного корня, что отрицательно сказывается на скорости вычислений.

Остановимся более подробно на статье А.Н. Боголюбова и В.И.Телегина "Об одном варианте метода прогонки" ([4], см. также [5]). В их работе предложен алгоритм решения (I) (авторы назвали этот вариант "немонотонной прогонкой"), обладающий устойчивостью и в тех случаях, когда не выполнены условия устойчивости (2) обычного метода прогонки [I]. Благодаря тому что прогоночные коэффициенты немонотонной прогонки определяются с точностью до произвольного множителя,процесс их вычисления (прямая прогонка) по рекуррентным формулам, в которых на каждом шагу имеется только одна операция деления на модуль максимального элемента строки, всегда устойчив. Повышенная устойчивость обратной прогонки, в ходе которой вычисляются неизвестные системы,обеспечивается выбором направления вычислений (в сторону убывания или возрастания индекса уравнения). Однако частое изменение направления вычислений может привести к накоплению ошибок округлений. Ниже приведен пример, принадлежащий В.Л.Мирошниченко, который иллюстрирует это обстоятельство.

Определим прогонку как универсальную, если процесс вычислений устойчив всякий раз, когда матрица A коэффициентов линейной разностной краевой задачи (I) достаточно хорошо обусловлена.Пусть рассматриваемая система линейных уравнений имеет единственное решение. Используя рекуррентные формулы для прогоночных коэффициентов немонотонной прогонки, организуем правую и левую прямые прогонки. При этом система распадается на независимые блоки из двух уравнений, разрешимость которых есть следствие единственности решения системы. В дальнейшем будем называть этот вариант "универсальной прогонкой".

I. Следуя [4], преобразуем (I) к виду:

$$
\begin{aligned}
&A_{1,4}y_1 + A_{1,5}y_2 = b_1,\\
&\quad\ldots\qquad\quad \ldots\\
&A_{i,4}y_i + A_{i,5}y_{i+1} = b_i,\\
&\quad\ldots\qquad\quad \ldots\\
&A_{N-1,4}y_{N-1} + A_{N-1,5}y_N = b_{N-1},\\
&A_{N,1}y_{N-1} + A_{N,2}y_N = B_N,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $A_{i,4}$, $A_{i,5}$, b_i – прогоночные коэффициенты, удовлетворяющие рекуррентным формулам:

$$
A_{1,4} = A_{1,1}/\lambda_1, \quad A_{1,5} = A_{1,2}/\lambda_1, \quad b_1 = B_1/\lambda_1,
\qquad \lambda_1 = \max(|A_{1,1}|, |A_{1,2}|, |B_1|),
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bar{A}_{i,4} = A_{i-1,4}A_{i,2} - A_{i,1}A_{i-1,5}, && A_{i,4} = \bar{A}_{i,4}/\lambda_i,\\
&\bar{A}_{i,5} = A_{i-1,4}A_{i,3}, && A_{i,5} = \bar{A}_{i,5}/\lambda_i,\\
&\bar{b}_i = A_{i-1,4}B_i - A_{i,1}B_{i-1}, && b_i = \bar{b}_i/\lambda_i,\\
&\lambda_i = \max(|\bar{A}_{i,4}|, |\bar{A}_{i,5}|, |\bar{b}_i|), && i = 2, 3, \ldots, N-1,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

причем $|A_{i-1,4}| > 0$ – условие невырожденности преобразования i-го уравнения (I) в i-е уравнение (3). Если $A_{i-1,4} = 0$, то i-е уравнение (I) переписывается для системы (3) без изменений, но для вычисления прогоночных коэффициентов по-прежнему используются формулы (5).

Вследствие единственности решения (I) последние уравнения (3) однозначно определяют y_N и y_{N-1}. Представив упомянутые уравнения в виде

$$
\begin{aligned}
&A_{N-1,4}y_{N-1} + A_{N-1,5}y_N = b_{N-1}, \quad u_N y_{N-1} + v_N y_N = w_N,\\
&u_N = A_{N,1}/\delta_N, \quad v_N = A_{N,2}/\delta_N, \quad w_N = B_N/\delta_N,\\
&\delta_N = \max(|A_{N,1}|, |A_{N,2}|, |B_N|),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

получим следующие выражения для y_N и y_{N-1}:

$$\Delta_N = A_{N-1,4}\, v_N - A_{N-1,5}\, u_N,$$
$$y_N = \frac{1}{\Delta_N}(A_{N-1,4}\, w_N - b_{N-1} u_N) \qquad y_{N-1} = \frac{1}{\Delta_N}(b_{N-1} v_N - A_{N-1,5} w_N). \tag{7}$$

Аналогичным способом, используя рекуррентные формулы левой прямой немонотонной прогонки, преобразуем систему (I) к виду:

$$\begin{aligned}
&A_{1,4} y_1 + A_{1,5} y_2 = b_1,\\
&u_2\, y_1 + v_2\, y_2 = w_2,\\
&\ \ldots \qquad \ldots\\
&u_{i+1} y_i + v_{i+1} y_{i+1} = w_{i+1},\\
&\ \ldots \qquad \ldots\\
&u_N y_{N-1} + v_N y_N = w_N,
\end{aligned} \tag{8}$$

где u_i, v_i, w_i – прогоночные коэффициенты, вычисление которых осуществляется по формулам (с учетом (6)):

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_{i-1} = v_i\, A_{i-1,1}, \qquad u_{i-1} = \bar{u}_{i-1}/\delta_{i-1},\\
&\bar{v}_{i-1} = v_i\, A_{i-1,2} - u_i\, A_{i-1,3}, \quad v_{i-1} = \bar{v}_{i-1}/\delta_{i-1},\\
&\bar{w}_{i-1} = v_i\, B_{i-1} - w_i\, A_{i-1,3}, \quad \bar{w}_{i-1} = w_{i-1}/\delta_{i-1},\\
&\delta_{i-1} = \max(|\bar{u}_{i-1}|, |\bar{v}_{i-1}|, |\bar{w}_{i-1}|), \quad i = N, N-1, \ldots, 3,
\end{aligned} \tag{9}$$

причем $|v_{i+1}| > 0$ – условие невырожденности преобразования i-го уравнения (I) в i-е уравнение (8). Если $|v_{i+1}| = 0$, то i-ые уравнения (I) и (8) совпадают, а для вычисления прогоночных коэффициентов по-прежнему используются формулы (9). Первые два уравнения (8) однозначно определяют y_1 и y_2:

$$\Delta_2 = A_{1,4}\, v_2 - A_{1,5}\, u_2,$$
$$y_2 = \frac{1}{\Delta_2}(A_{1,4}\, w_2 - b_1\, u_2), \qquad y_1 = \frac{1}{\Delta_2}(b_1\, v_2 - A_{1,5}\, w_2). \tag{I0}$$

Сопоставление (3) и (8) показывает, что неизвестные (I) могут быть представлены как решения систем из двух уравнений, образованных соответствующими уравнениями (3) и (8): $i = N-1, N-3, \ldots, 3, 1$ (N-четное)

$$A_{i,4} + A_{i,5}\, y_{i+1} = b_i,\quad u_{i+1}\, y_i + v_{i+1}\, y_{i+1} = w_{i+1}\,.$$

$$\Delta_{i+1} = A_{i,4}\, v_{i+1} - A_{i,5}\, u_{i+1}, \tag{II}$$

$$y_{i+1} = \frac{1}{\Delta_{i+1}}(A_{i,4} w_{i+1} - b_i u_{i+1}),\quad y_i = \frac{1}{\Delta_{i+1}}(b_i v_{i+1} - A_{i,5} w_{i+1}).$$

После вычисления прогоночных коэффициентов правой прямой прогонки по формулам (3), (4) одновременно с вычислением прогоночных коэффициентов левой прямой прогонки (6),(9) находятся неизвестные системы (I) из (II). Если N-нечетное, то на последнем шаге левой прямой прогонки находится только y_1.

Отметим, что в силу независимости преобразований (5) и (9) формулы (II) верны и в том случае, если при некотором $i = k$ преобразования (5) или (9) вырождаются, т. е. при вычислении неизвестных исключается необходимость обращения вновь к системе (I) (в отличие от [4]). Пусть, например, $A_{k-1,4} = 0$. При этом группа уравнений из (3) и (8), $k-2 \le i \le k+1$, имеет вид:

$$\begin{aligned} &A_{k-2,4} y_{k-2} + A_{k-2,5} y_{k-1} = b_{k-2},\\ &u_{k-1}\; y_{k-2} + v_{k-1}\; y_{k-1} = w_{k-1}; \end{aligned} \tag{12.1}$$

$$\begin{aligned} &0\cdot y_{k-1} + A_{k-1,5} y_k = b_{k-1},\\ &u_k y_{k-1} + v_k\cdot y_k = w_k; \end{aligned} \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned} &A_{k,1} y_{k-1} + A_{k,2} y_k + A_{k,3} y_{k+1} = B_k,\\ &u_{k+1} y_k + v_{k+1} y_{k+1} = w_{k+1}; \end{aligned} \tag{12.3}$$

$$\begin{aligned} &A_{k+1,4} y_{k+1} + A_{k+1,5} y_{k+2} = b_{k+1},\\ &u_{k+2}\; y_{k+1} + v_{k+2}\; y_{k+2} = w_{k+2}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Если y_{k+2} и y_{k+1} найдены из (12.4), то для вычисления y_k и y_{k-1} используются формулы (12.2) (индекс i в (II) уменьшается сразу на 2) и, таким образом, система (12.3) пропускается. Пусть теперь y_{k+1} и y_k определяются из (12.3). В результате формальных вычислений $A_{k,4}$, $A_{k,5}$ и b_k по формулам (5), как легко заметить, k-е уравнение (3) с точностью до нормирующего множителя повторяет (k-1)-е уравнение, и поэтому вместо (12.3) образуется система из первого уравнения (12.2) и второго уравнения (12.3), из которой и находятся y_{k+1} и y_k. Далее для вычисления y_{k-1} и y_{k-2} мы обращаемся уже к (12.1).

Таким образом, мы получили выражения для неизвестных (1) в виде формул алгоритма "встречной прогонки" [1], если прямую правую и прямую левую прогонки организовывать до места "встречи" с использованием (4),(5) и (6),(8) соответственно. Существенно, что вычисление неизвестных по формулам (11) столь же устойчиво по отношению к малым возмущениям, что и для исходной системы, благодаря устойчивости процесса вычислений прогоночных коэффициентов.

Легко видеть, что число операций, необходимых для решения (1) предлагаемым способом, по-прежнему имеет порядок $O(N)$. При редукции практических задач к (1), как правило, основные затраты машинного времени связаны с вычислением правых частей (1) и коэффициентов системы. Следовательно, применение метода универсальной прогонки желательно связать с хранением в машинной памяти как коэффициентов системы $A_{i,1}$, $A_{i,2}$, $A_{i,3}$ и B_i, так и прогоночных коэффициентов $A_{i,4}, A_{i,5}, b_i$. Увеличение объема машинной памяти при этом (по сравнению с вариантами прогонок [1]) не играет существенной роли, если учесть возможности современной вычислительной техники. Устойчивость вычислительного процесса, - по существу, единственный критерий выбора варианта прогонки (с числом операций $O(N)$). Поэтому универсальную прогонку, видимо, целесообразно использовать как стандартную процедуру решения задачи (1).

2. Рассмотрим пример: $i = 2,3,\dots, N-1$,

$$\begin{aligned} -\varepsilon y_1 + y_2 &= a(1-\varepsilon), \\ \dots \quad & \dots \\ y_i + y_{i+2} &= 2a, \\ \dots \quad & \dots \\ y_{N-1} - \varepsilon y_N &= a(1-\varepsilon) \end{aligned} \tag{13}$$

где ε и a - положительные параметры: $0 \le \varepsilon < 1, (1-\varepsilon)a > 1$. В зависимости от N определитель системы (13) Δ_N равен : $k = 1,2,\dots$,

$$N = 2k, \quad \Delta_N = (-1)^k(1-\varepsilon^2),$$

$$N = 2k+1, \quad \Delta_N = 2(-1)^{k+1}\varepsilon .$$

Очевидно, $y_j \equiv a$ – единственное решение (I3), если $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon = 0$ решение (I3) единственно в случае четного N.

Для прогоночных коэффициентов (4), (5) имеем следующие выражения:

$$R = \frac{1}{a(1+\varepsilon)}, \qquad T = \frac{1}{a(1-\varepsilon)}, \qquad S = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}
A_{1,4} &= -\varepsilon T, & A_{1,5} &= T, & b_1 &= 1,\\
A_{2,4} &= -R, & A_{2,5} &= -\varepsilon T, & b_2 &= -1,\\
A_{3,4} &= \varepsilon R, & A_{3,5} &= -R, & b_3 &= -S,\\
A_{4,4} &= R, & A_{4,5} &= \varepsilon R, & b_4 &= 1,\\
A_{5,4} &= -\varepsilon R, & A_{5,5} &= R, & b_5 &= S,\\
A_{6,4} &= A_{2,4}, & A_{6,5} &= A_{2,5}, & b_6 &= b_2,
\end{aligned}$$

и так далее; $i \geq 2$, $A_{i,4} = A_{i+4,4}$, $A_{i,5} = A_{i+4,5}$, $b_i = b_{i+4}$.

Пусть N – четное. Обращаясь к методу немонотонной прогонки, мы видим, что обратный ход немонотонной прогонки состоит в "монотонном" вычислении y_i по формуле:

$$y_i = -\frac{A_{i,5}}{A_{i,4}} y_{i+1} + \frac{b_i}{A_{i,4}},$$

что и приводит к потере точности вычислений. В то же время с помощью метода универсальной прогонки восстанавливается с машинной погрешностью точное решение (I3) при любом произвольно малом ε. Если ε – "точный" нуль, то метод немонотонной прогонки также позволяет найти (с машинной погрешностью) точное решение (I3).

3. Отметим некоторые принципиальные моменты обобщения метода универсальной прогонки на случай системы векторных уравнений специального вида.

Пусть (I) – система векторных уравнений, в которой y_k и B_k – векторы размерности m, $A_{k,1}$, $A_{k,2}$, $A_{k,3}$ – квадратные матрицы размерности $m \times m$. К такому виду редуцируется, например, краевая задача для системы из m линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка при аппроксимации разностной схемой [I]. Нашей целью является организация устойчивой матричной прогонки, использующей только условие достаточно хорошей обусловленности матрицы коэффициентов системы векторных уравнений. Известные варианты матричной прогонки эффективно решают краевую разностную задачу (I), если выполняются условия [I]: $i = 2,3,\dots, N-1$,

$$\|A_{1,2}^{-1}A_{1,3}\| < 1, \quad \|A_{N,2}^{-1}A_{N,1}\| < 1, \quad \|A_{i,2}^{-1}A_{i,1}\| + \|A_{i,2}^{-1}A_{i,3}\| < 1. \quad (I4)$$

Как и при $m = 1$, преобразуем (I) к (3), где теперь b_k – вектор размерности m, $A_{4,k}$ и $A_{5,k}$ – матрицы размерности $m \times m$. Рассмотрим систему уравнений

$$A_{i-1,4}y_{i-1} + A_{i-1,5}y_i = b_{i-1}, \quad (I5)$$

$$A_{i,1}y_{i-1} + A_{i,2}y_i + A_{i,3}y_{i+1} = B_i, \quad (I6)$$

в которой матрицы $A_{i-1,4}$, $A_{i-1,5}$ и вектор b_{i-1} будем считать уже известным. При преобразовании (I6) к виду

$$A_{i,4}y_i + A_{i,5}y_{i+1} = b_i \quad (I7)$$

возможны три случая.

Пусть $A_{i-1,4}$ – неособенная матрица. Введем обозначения (текущий индекс опущен):

$$a_4' = k_1 A_{i-1,4}, \qquad a_4'' = k_2 A_{i-1,4}^{-1}, \quad (I8)$$

где k_1 и k_2' – нормирующие постоянные, значения которых предстоит подобрать таким образом, чтобы вычисление элементов $A_{i,4}$ $A_{i,5}$ и b_i (I7) не сопровождалось накоплением ошибок округления. Подставим выражение y_{i-1} из (I5) в (I6) и умножим обе части равенства на $k_1k_2A_{i-1,4}$. Из сопоставления полученного уравнения с (I7) следует, что

$$\begin{aligned} A_{i,4} &= (k_2\, a_4')A_{i,2} - a_4'\, A_{i,1}(a_4''\, A_{i-1,5}), \\ A_{i,5} &= (k_2\, a_4')A_{i,3}, \\ b_i &= (k_2\, a_4')B_i - a_4'\, A_{i,1}(a_4''\, b_{i-1}). \end{aligned} \quad (I9)$$

Обозначим далее через n_1, n_2 и n_3 нормы [6]:

$$n_1 = \|A_{i-1}\|_I, \quad n_2 = \|A^{-1}_{i-1,4} A_{i-1,5}\|_{II}, \quad n_3 = \|A^{-1}_{i-1,4} b_{i-1}\|_{II}.$$

Очевидно, устойчивость вычисления будет иметь место при выполнении условий:

$$\|k_2 a'_4\|_I \le 1, \quad \|a'_4\|_I \le 1, \quad \|a''_4 A_{i-1,5}\|_{II} \le 1, \quad \|a''_4 b_{i-1}\|_{II} \le 1$$

или

$$k_1 k_2 n_1 \le 1, \quad k_1 n_1 \le 1, \quad k_2 n_2 \le 1, \quad k_2 n_3 \le 1. \tag{20}$$

Пусть

$$n = \max(n_1, n_2, n_3), \qquad n_4 = \max(n_2, n_3).$$

Из (20) следует, что значения параметров k_1 и k_2 достаточно выбрать по правилу:

$$k_1 = 1/n, \quad k_2 = \min(1,\ 1/n_4), \quad \text{если } n_1 = n,$$

$$k_1 = \min(n/n_4,\ 1/n_1), \quad k_2 = 1/n, \quad \text{если } n_1 \ne n.$$

Рассмотрим далее случай, когда $A_{i-1,4}$ – особенная матрица, $\|A_{i-1,4}\| > 0$. При этом в силу существования единственного решения (I), матрица $A_{i,1}$ либо неособенная, либо $\|A_{i,1}\| = 0$, и тогда (I6) уже имеет вид (I7). Подставим выражение y_{i-1} из (I6) в (I5) и умножим обе части равенства на нормирующий множитель k. Сопоставление полученного уравнения с (I7) показывает, что

$$A_{i,4} = (k A_{i-1,4}) A^{-1}_{i,1} A_{i,2} - k A_{i-1,5},$$

$$A_{i,5} = (k A_{i-1,4}) A^{-1}_{i,1} A_{i,3}, \tag{2I}$$

$$b_i = (k A_{i-1,4}) A^{-1}_{i-1} B_i - k b_{i-1},$$

где $k = \min(1,\ 1/n_1)$. Наконец, если $\|A_{i-1,4}\| = 0$, то ситуация вполне аналогична случаю $m = 1$.

В ходе левой прямой матричной прогонки элементы искомых векторов y_{i+1} и y_i определяются как решение системы из двух векторных уравнений (система линейных алгебраических уравнений размерности $2m$):

$$A_{i,4}\, y_i + A_{i,5}\, y_{i+1} = b_i,$$
$$u_{i+1}\, y_i + v_{i+1}\, y_{i+1} = w_{i+1}\,. \qquad (22)$$

Последовательность вычислений неизвестных (22) очевидным образом зависит от результата сравнения обусловленностей матриц $A_{i,4}, A_{i,5}$, u_{i+1}, v_{i+1} . Пусть, например, наиболее хорошо обусловлена матрица u_{i+1} . Тогда для y_i и y_{i+1} имеем следующие выражения:

$$C_i = A_{i,5} - A_{i,4}\, u^{-1}_{i+1}\, v_{i+1}\,, \qquad (23)$$

$$y_{i+1} = C^{-1}_i(b_i - A_{i,4}u^{-1}_{i+1}w_{i+1}), \quad y_i = u^{-1}_{i+1}(w_i - v_{i+1}\, y_{i+1}).$$

Разрешимость (22) есть прямое следствие условия единственности решения (I).

4. В заключение приведем на языке BASIC текст процедуры RIBBON-3 для решения линейной разностной трехточечной краевой задачи методом универсальной прогонки. В программе используются следующие обозначения:

A(I,J) - элементы массива $A_{i,j}$, $j = 1,2,3$;

A(I,J) - элементы массива $A_{i,j}$ прогоночных коэффициентов системы (3), $j = 4,5$;

u1,v1,w1, u, v, w - прогоночные коэффициенты системы (8);

B(I) - элемент вектор-столбца B_i правой части (1);

y (I) - элемент вектор-столбца b_i правой части (3);

N - размерность системы (I);

в ходе вычислений массив y(I) заполняется значениями неизвестных (I). Перед обращением к процедуре требуется заполнить массивы A(I,J) и B(I), I = 1,..., N, J = 1,2,3.

RIBBON-3

```
1Ø  CØ=((ABS(A[1,1]) MAX ABS(A[1,2])) MAX ABS(B[1]))
2Ø  A[1, 4]=A[1,1]/CØ
3Ø  A[1,5]=A[1,2]/CØ
4Ø  Y[1]=B[1]/CØ
5Ø  FOR I=2 TO N-1
6Ø  A4=A[I-1,4]*A[I,2]-A[I,1]*A[I-1,5]
7Ø  A5=A[I-1,4]*A[I,3]
```

```
8Ø   Y=A[I-1,4]*B[I]-A[I,1]*Y[I-1]
9Ø   CØ=((ABS(A4) MAX ABS(A5)) MAX ABS(Y))
1ØØ  A[I,4]=A4/CØ
11Ø  A[I,5]=A5/CØ
12Ø  Y[I]=Y/CØ
13Ø  NEXT  I
14Ø  CØ=((ABS(A[N,1]) MAX ABS(A[N,2])) MAX ABS(B[N]))
15Ø  U1=A[N,1]/CØ
16Ø  V1=A[N,2]/CØ
17Ø  W1=B[N]/CØ
18Ø  KØ=Ø
19Ø  I=N-KØ
2ØØ  M1=A[I-1,4]*V1A[I-1,5]*U1
21Ø  Y[I]=(W1*A[I-1,4]-Y[I-1]*U1)/M1
22Ø  Y[I-1]=(V1*Y[I-1]-A[I-1,5]*W1)/M1
23Ø  IF I=2 THEN 4ØØ
24Ø  GOSUB 26Ø
25Ø  GOTO 34Ø
26Ø  U=V1*A[I-1,1]
27Ø  V=V1*A[I-1,2]-U1*A[I-1,3]
28Ø  W=V1*B[I-1]-W1*A[I-1,3]
29Ø  CØ=((ABS(U) MAX ABS(V)) MAX ABS(W))
3ØØ  U1=U/CØ
31Ø  V1=V/CØ
32Ø  W1=W/CØ
33Ø  RETURN
34Ø  IF I=3 THEN 39Ø
35Ø  I=I-1
36Ø  GOSUB 26Ø
37Ø  KØ=KØ+2
38Ø  GOTO 19Ø
39Ø  Y[1]=(V1*Y[1]-A[1,5]*W1)/(V1*A[1,4]-A[1,5]*U1)
4ØØ  END
```

Автор выражает искренню благодарность В.Л.Мирошниченко за внимание к работе и неоднократные обсуждения результатов.

Литература

1. САМАРСКИЙ А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.

2. МОНАСТЫРСКИЙ П.И., БАСИК В.А. О численном решении краевых задач, для которых не выполняется принцип максимума.-"Изв.АН БССР. Сер. физ.-мат.наук", 1971, № 2, 28-35.

3. КРЫЛОВ В.И., БОБКОВ В.В., МОНАСТЫРСКИЙ П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2, Минск, 1975.

4. БОГОЛЮБОВ А.Н., ТЕЛЕГИН В.И. Об одном варианте метода прогонки. -В кн.: Численные методы в физике плазмы. М., "Наука", 1977, с. 52-55.

5. БОГОЛЮБОВ А.Н., ТЕЛЕГИН В.И. Об одном численном методе решения линейных систем уравнений с трехдиагональной матрицей.-"Журн. вычислит. математики и мат. физики", № 3, т. 14, 1974, с.539-541.

6. ФАДДЕЕВ Д.К. и ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л., Физматгиз, 1960.

Поступила в ред.-изд.отд.
18 апреля 1978 года