МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 75

УДК 517.927:519.62

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

С.И. Фадеев

В статье дается изложение варианта метода дифференциальной прогонки, позволяющего найти численное решение $y(x)$, $x\in[a,b]$, линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения M-го порядка, $M \geq 2$. В сравнении с известными способами сведения краевой задачи к задачам Коши (методы факторизации, метод комбинации решений [1-3]) предлагаемый способ обладает универсальностью в том смысле, что его применение связано только с корректностью постановки краевой задачи.

Кратко содержание метода состоит в следующем. Составляется линейная комбинация функции $y(x)$ и ее производных до $(M-1)$-го порядка включительно, содержащая M коэффициентов $u_i(x)$ $(i = 1, 2,\dots, M)$, и приравнивается к коэффициенту $u_{M+1}(x)$. Функции $u_i(x)$ и $u_{M+1}(x)$, которые будем называть прогоночными коэффициентами, находятся как решение задачи Коши для линейной однородной системы из $M+1$ дифференциальных уравнений первого порядка, являющейся следствием эквивалентности полученного равенства и дифференциального уравнения краевой задачи. Построим последовательно M решений задачи Коши, изменяя лишь начальные данные, обусловленные граничными условиями краевой задачи. В результате будем иметь в каждой точке $x\in[a,b]$ алгебраическую систему из M линейных уравнений относительно $y(x)$ и ее производных, которая разрешима, если решение краевой задачи единственно. Поскольку система для определения прогоночных коэффициентов линейна и однородна, то устойчивость вычислений прогоночных коэффициентов, как и в [4], достигается за счет регулярной процедуры нормировки, дополняющей выбранный метод решения задачи Коши.

§1. Двухточечная краевая задача

1. Рассмотрим двухточечную краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x), \quad x\in[a,b], \tag{1.1}$$

с граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} x = a,\ u(a)\frac{dy}{dx} &= v(a)y + w(a), \quad u^2(a) + v^2(a) > 0, \\ x = b,\ \alpha(b)\frac{dy}{dx} &= \beta(b)y + \gamma(b), \quad \alpha^2(b) + \beta^2(b) > 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $u(a)$, $v(a)$, $w(a)$, $\alpha(b)$, $\beta(b)$, $\gamma(b)$ – обозначения заданных постоянных; $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ – кусочно-непрерывные на $[a,b]$ функции с конечным числом разрывов первого рода. При необходимости будем накладывать на P, Q и R другие ограничения. Если задача (1.1)-(1.2) корректно поставлена, то возможен следующий подход к ее решению.

Покажем, что дифференциальное уравнение (1.1) можно представить в виде

$$u(x)\frac{dy}{dx} = v(x)y + w(x), \tag{1.3}$$

где $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ – пока неизвестные функции. Для этого продифференцируем обе части (1.3) и исключим вторую производную при помощи (1.1). В результате получим уравнение

$$\left(\frac{du}{dx} - Pu - v\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dv}{dx} - Qu\right)y + \frac{dw}{dx} - Ru,$$

которое удовлетворяется тождественно, если функции u, v и w – решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{du}{dx} = Pu + v,\ \frac{dv}{dx} = Qu,\ \frac{dw}{dx} = Ru, \quad x\in[a,b]. \tag{1.4}$$

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ – решение задачи Коши для (1.4) с начальными условиями: $u = u(a)$, $v = v(a)$, $w = w(a)$ при $x = a$[*]. Тогда уравнение (1.3) определяет частное решение (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) в точке $x=a$ при произ -

---

[*] Очевидно, решение задачи Коши для (1.4) единственно.

вольном начальном значении y. Аналогично, если $u = \alpha(x)$, $v=\beta(x)$, $w=\gamma(x)$ – решение (I.4) с начальными условиями: $u = \alpha(b)$, $v=\beta(b)$, $w = \gamma(b)$, то уравнение

$$\alpha(x) \frac{dy}{dx} = \beta(x)y + \gamma(x) \qquad (I.5)$$

определяет частное решение (I.I), которое удовлетворяет граничным условиям (I.2) в точке $x=b$, и в котором произвольно выбирается начальное значение y. Потребуем, чтобы оба частных решения, представленных равенствами (I.3) и (I.5), совпадали во всех точках $x \in [a,b]$. При этом единственное решение $y(x)$ краевой задачи (I.I)-(I.2) и производная $\frac{dy}{dx}(x)$ могут быть найдены из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{Vmatrix} u(x) & -v(x) \\ \alpha(x) & -\beta(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \frac{dy}{dx} \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} w(x) \\ \gamma(x) \end{Vmatrix}. \qquad (I.6)$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ и $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ – решения (I.4) с начальными условиями

$$\begin{aligned} &u = u(a),\ v = v(a),\ w = w(a) \ \text{при} \ x = a, \\ &\alpha = \alpha(b),\ \beta = \beta(b),\ \gamma = \gamma(b) \ \text{при} \ x = b \end{aligned} \qquad (I.7)$$

соответственно. Тогда решение (I.I) - (I.2) имеет вид

$$y(x) = \frac{\gamma(x)\ u(x) - \alpha(x)\ w(x)}{\alpha(x)\ v(x) - \beta(x)\ u(x)}. \qquad (I.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно убедимся, что знаменатель правой части (I.8)

$$D(x) = \begin{vmatrix} u(x) & -v(x) \\ \alpha(x) & -\beta(x) \end{vmatrix}$$

не может на $[a,b]$ обратиться в нуль. Предположим противное: $D(x_0) = 0$, $x_0 \in [a,b]$. Очевидно, достаточно рассмотреть четыре случая.

а) $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Из (I.3) следует, что $w(x_0) = 0$. Тогда в силу однородности системы (I.4) ее решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям в точке x_0, было бы тождественно равно нулю на $[a,b]$, что противоречит (I.7).

б) Пусть $u = k\alpha$, $v = k\beta$ и, как следует из (I.6), $w = k\gamma$ при $x = x_*$, где k – коэффициент пропорциональности. В силу однородности системы (I.4) можно считать, что $k = 1$[ж]. Но тогда разности $u-\alpha$, $v-\beta$, $w-\gamma$, являясь решением (I.4), удовлетворяли бы нулевым начальным условиям в точке x_*, т.е. были бы тождественно равны нулю на $[a,b]$, что невозможно. Действительно, при $u=\alpha$, $v=\beta$ и $w=\gamma$ решение дифференциального уравнения (I.3) при произвольном начальном значении y удовлетворяло бы (I.I)-(I.2) в силу определения u, v, w, α, β, γ, что противоречит предположению о единственности реше-ния краевой задачи.

в) $u(x_*) = \alpha(x_*) = 0$. В силу однородности системы (I.4) можно считать, что $v(x_*) = \beta(x_*)$ и, как следует из (I.6), $w(x_*) = \gamma(x_*)$. Как и в п."б", составим разности $u-\alpha$, $v-\beta$ и $w-\gamma$, кото-рые обращаются в нуль в точке x_*, что невозможно (см.п. "б").

г) $u(x_*) = kv(x_*)$, $\alpha(x_*) = k\beta(x_*)$, где k – коэффициент про-порциональности, $v(x_*) \neq 0$, $\beta(x_*) \neq 0$. В силу однородности сис-темы (I.4) можно считать, что $v(x_*)=\beta(x_*)$. Но тогда разности $u-\alpha$, $v-\beta$ и, как следует из (I.6), $w-\gamma$ равны нулю в точке x_*, что не-возможно (см. п. "б").

Вычисляя производную dD/dx с учетом (I.4), можем записать дифференциальное уравнение

$$\frac{dD}{dx} = P(x)D, \quad D(x) = D(a)\exp\left[\int_a^x P(t)\,dt\right]. \qquad (I.9)$$

Полученное выражение $D(x)$ непосредственно свидетельствует о том, что $D(x) \neq 0$ на $[a,b]$, если $D(a) \neq 0$.

Продифференцируем дважды (I.8) с учетом (I.4) и (I.9) в точ-ках непрерывности P, Q и R. В результате найдем выражения первой и второй производных в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma(x)v(x) - \beta(x)w(x)}{\alpha(x)v(x) - \beta(x)u(x)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = R + Qy - P\frac{dy}{dx}. \qquad (I.10)$$

Подставив y и dy/dx из (I.8) и (I.10) в (I.I2), убеждаемся в вы-полнении граничных условий краевой задачи. Поскольку построенное решение (I.I)-(I.2) единственно, то теорема доказана.

Примечание. Мы могли ограничиться определением решения крае-вой задачи в виде (I.6), не используя явных представлений $y(x)$ и $D(x)$. Действительно, по доказанному, определитель системы (I.6)

[ж] Для этого достаточно, например, умножить $u(a)$, $v(a)$ и $w(a)$ на k.

всегда отличен от нуля $[a,b]$, а решение (I.6) удовлетворяет (I.I)-(I.2) в силу определения u, v, w и α, β, γ, если решение краевой задачи существует и единственно.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий случай вырождения системы (I.6):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1, \quad x \in [0,1],$$

$$\frac{dy}{dx} = cy \;\; \text{при} \;\; x = 0; \;\; \frac{dy}{dx} = 2y \;\; \text{при} \;\; x = 1,$$

где c – вещественный параметр. Построив точные решения двух задач Коши для системы $\frac{du}{dx} = v$, $\frac{dv}{dx} = 0$, $\frac{dw}{dx} = u$, с начальными условиями

$$u = 1, \quad v = c, \quad w = 0, \text{ при } x = 0,$$
$$u = 1, \quad v = 2, \quad w = 0, \text{ при } x = 1,$$

запишем (I.6) в виде:

$$\begin{Vmatrix} 1 + cx, & -c \\ 1 - 2x, & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dy}{dx} \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x + \frac{c}{2} x^2 \\ x - x^2 \end{Vmatrix},$$

причем определитель системы $D(x)$ равен $-(c+2)$. Если $c \neq -2$, то решение системы имеет вид: $dy/dx = x$, $y = \frac{1}{2} x^2$. Пусть $c = -2$. Непосредственно проверяется, что функция

$$y(x) = \text{const}\,(1-2x) + \frac{1}{2} x^2,$$

являясь общим решением дифференциального уравнения

$$(1-2x)\frac{dy}{dx} = -2y + x - x^2,$$

удовлетворяет как граничным условиям, так и дифференциальному уравнению краевой задачи. Таким образом, тождественное равенство нулю определителя системы D есть следствие неединственности решения краевой задачи.

Заметим, что другая возможность обращения в нуль $D(x)$ связана с неразрешимостью краевой задачи (I.I)-(I.2). При этом система (I.6) оказывается несовместной.

2. Равенства (I.3)-(I.4) показывают, что прогоночные коэффициенты достаточно определить с точностью до пропорционального множителя. Это позволяет дополнить численный метод решения задачи Ко-

ми (I.4) процедурой нормировки с целью повышения устойчивости вычислительного процесса, как это было предложено в [4] применительно к вычислению прогоночных коэффициентов при решении линейной трехточечной разностной краевой задачи методом немонотонной прогонки.

Представим (I.4) в виде векторного уравнения:

$$\frac{dU}{dx} = G(x)\,U, \qquad (I.11)$$

где U – вектор, G – матрица:

$$U = \begin{Vmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Vmatrix}, \qquad G = \begin{Vmatrix} P(x) & 1 & 0 \\ Q(x) & 0 & 0 \\ R(x) & 0 & 0 \end{Vmatrix} .$$

Для решения (I.11) воспользуемся, например, методом Рунге-Кутта [5]. Обозначим через x_i точки разбиения $[a,b]$, U_i – вектор U, элементы которого определены в точке x_i, $i=1,\ldots,N$, $a=x_1<\ldots<x_N=b$. Применив формулы Рунге-Кутта, получим в точке x_i, $1<x_r\leq N$, уравнение

$$U_i = (E + A_i)\,U_{i-1} \qquad (I.12)$$

с точностью $O(h_i^{r+1})$, где E – единичная матрица, A_i – матрица, определяющая приращение вектора U в точке x_i, $h_i = x_i - x_{i-1}$, r – точность метода Рунге-Кутта.

Пусть $\| U_{i-1}\|_I = \max(|u|, |v|, |w|) = 1$ (здесь и далее используются обозначения норм из [6]). Обозначим через Λ_i норму вектора U_i, вычисленного по формуле (I.12): $\Lambda_i = \|U_i\|_I$. Тогда при вычислении вектора U_{i+1} в правую часть (I.12) подставляется вместо U_i нормированный вектор $\bar{U}_i$ с элементами $\frac{1}{\Lambda_i}(E + A_i)U_{i-1}$, так что $\|\bar{U}_i\|_I = 1$, и так далее. На первом шаге нормировке подлежат начальные условия (I.7). Кроме того, используется нормировка при вычислении коэффициентов методом Рунге-Кутта, определяющих приращение вектора U.

Рассмотрим, например, формулы Рунге-Кутта четвертого порядка точности:

$$\left.\begin{aligned} &K_1 = h_{i+1}G(x_i)U_i, \\ &K_2 = h_{i+1}G(x_i + h_{i+1}/2)U_2, \quad U_2 = U_i + K_1/2, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad (I.13)$$

$$\left.\begin{aligned} K_3 &= h_{i+1}G(x_i+h_{i+1}/2)U_3, \quad U_3 = U_i + K_2/2, \\ K_4 &= h_{i+1}G(x_i+h_{i+1})U_4, \quad U_4 = U_i + K_3, \\ U_{i+1} &= U_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \end{aligned}\right\}$$

Обозначим через $u^{(j)}$, $v^{(j)}$, $w^{(j)}$ элементы вектора U_j, $j = 2, 3, 4$, $C_j = |u^{(j)}|$. Перед вычислением K_j производится сравнение C_j с I. Если $C_j > 1$, то $u^{(j)}$, $v^{(j)}$, элементы вектора U_i и значения K_s, $1 \le s < j$, делятся на C_j. В противном случае упомянутые величины не нормируются.

В результате мы получим рекуррентные формулы для вычисления прогоночных коэффициентов, в которых отсутствует операция умножения $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ на величины, по модулю больше I. Заметим, что процедура нормировки может быть опущена, если выбранный метод устойчиво решает задачу Коши для системы (I.II).

3. Рассмотрим самосопряженное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{dy}{dx}\right] = Q(x)y + R(x), \quad x\in[a,b], \qquad (I.I4)$$

с граничными условиями (I.2). Ограниченные на $[a,b]$ функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, а также граничные условия (I.2) подчинены известным условиям самосопряженности краевой задачи [7].

Потребуем, чтобы уравнение

$$u(x)P(x)\frac{dy}{dx} = v(x)\,y + w(x) \qquad (I.I5)$$

было эквивалентно (I.I4). Продифференцируем обе части (I.I5) и исключим элемент $\frac{d}{dx}(P\frac{dy}{dx})$ при помощи (I.I4). В результате получим уравнение:

$$\left(P\frac{du}{dx} - v\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dv}{dx} - Qu\right)y + \frac{dw}{dx} - Ru, \qquad (I.I6)$$

т.е. функции u, v и w удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$P\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = Qu, \quad \frac{dw}{dx} = Ru \quad . \qquad (I.I7)$$

Как и в п. I, имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ - решения (I.17) с граничными условиями:

$$u = u(a)/P(a), \quad v = v(a), \; w = w(a) \text{ при } x=a, \qquad \alpha = \alpha(b)/P(b), \quad \beta = \beta(b), \; \gamma = \gamma(b) \text{ при } x=b \tag{I.18}$$

соответственно. Тогда решение (I.14), удовлетворяющее граничным условиям (I.12), имеет вид:

$$y(x) = \frac{\gamma(x)u(x) - \alpha(x)w(x)}{\alpha(x)v(x) - \beta(x)u(x)}. \tag{I.19}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы аналогично приведенному в п.I. Отметим лишь выражение производной

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{P(x)} \cdot \frac{\gamma(x)v(x) - \beta(x)w(x)}{\alpha(x)v(x) - \beta(x)v(x)}. \tag{I.20}$$

4. Остановимся на случае, когда дифференциальное уравнение (I.I) допускает периодическое с периодом T решение. Запишем граничные условия периодичности:

$$y(a) = y(b), \; \frac{dy}{dx}(a) = \frac{dy}{dx}(b), \; b = a+T. \tag{I.21}$$

Пусть λ - некоторая постоянная (например, равная $y(a)$ или $\frac{dy}{dx}(a)$). Уравнение (I.I) можно представить в виде

$$u(x)\frac{dy}{dx} = v(x)y + w(x) + \lambda z(x), \tag{I.22}$$

если потребовать, чтобы функции u, v, w и z удовлетворяли системе дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du}{dx} = Pu + v, \quad \frac{dv}{dx} = Qu, \quad \frac{dw}{dx} = Ru, \quad \frac{dz}{dx} = 0. \tag{I.23}$$

(При использовании процедуры нормировки (см. п.2) значения z, вообще говоря, не будут тождественно равны постоянной.)

Приведем без доказательства следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $z(x)$, и $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$ - решения (I.23) с начальными условиями при $x = a$:

$$u = 0,\ v = 1,\ w = 0,\ \delta = -1,$$
$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0,\ \delta = 1 \qquad (I.24)$$

соответственно. Тогда периодическое решение (I.I) определяется алгебраической системой двух линейных уравнений:

$$\begin{Vmatrix} u(x) & -v(x) \\ \alpha(x) & -\beta(x) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dy}{dx} \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} w(x) + y(a)\ z(x) \\ \gamma(x) + \frac{dy}{dx}(a)\ \delta(x) \end{Vmatrix}, \qquad (I.25)$$

где

$$\begin{Vmatrix} u(b) & -v(b)-z(b) \\ \alpha(b)-\delta(b) & -\beta(b) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dy}{dx}(a) \\ y(a) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} w(b) \\ \gamma(b) \end{Vmatrix}. \qquad (I.26)$$

(Явные выражения $y(x)$ и $\frac{dy}{dx}(x)$, следующие из (I.25)-(I.26), мы не будем выписывать.)

Примечание. Если второе граничное условие (I.24) задать при $x=b$, то система (I.26) запишется в виде

$$\begin{Vmatrix} u(b) & -v(b)-z(b) \\ \alpha(a)-\delta(a) & -\beta(a) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{dy}{dx}(a) \\ y(a) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} w(b) \\ \gamma(a) \end{Vmatrix}. \qquad (I.27)$$

§2. Краевая задача для системы дифференциальных уравнений. Многоточечная краевая задача

Результаты §I естественным образом переносятся на случай, когда (I.I) - векторное уравнение [2], либо для решения многоточечной краевой задачи [8]. Остановимся на основных моментах этого обобщения.

I. Пусть краевая задача для векторного уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} = Q(x)y + R(x), \qquad x\in[\ a,b\ ], \qquad (2.I)$$

с граничными условиями

$$x = a,\quad u(a)\,\frac{dy}{dx} = v(a)y + w(a),$$
$$x = b,\quad \alpha(b)\,\frac{dy}{dx} = \beta(b)y + \gamma(b), \tag{2.2}$$

имеет единственное решение, устойчивое к малым возмущениям. Здесь P, Q и R, y – матрицы и векторы соответственно размерности $m \times m$ и m: $u(a)$ $v(a), \alpha(b), \beta(b)$ и $w(a)$, $\gamma(b)$ – матрицы и векторы той же размерности с заданными элементами, подчиненными условию линейной независимости вектор-строк матриц $\| u(a)-v(a) \|$ и $\| \alpha(b)-\beta(b) \|$, причем норма каждой вектор-строки больше нуля. Как и в §I, будем предполагать, что элементы P, Q и R кусочно-непрерывны на $[a,b]$ с конечным числом разрывов первого рода.

Представим (2.I) в виде

$$u(x)\,\frac{dy}{dx} = v(x)y + w(x), \tag{2.3}$$

где u, v – матрицы размерности $m \times m$, v – вектор размерности m, которые определим из условия эквивалентности векторных уравнений (2.I) и (2.3). После выполнения тех же операций, что и в п.I §I, получим следующую систему $2m^2+m$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных элементов матриц u, v и вектора w:

$$\frac{du}{dx} = uP(x) + v,\quad \frac{dv}{dx} = uQ(x),\quad \frac{dw}{dx} = uR(x). \tag{2.4}$$

Покажем, что решение (2.4) сводится к m-кратному интегрированию системы, состоящей только из $2m+1$ дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого преобразуем (2.4), используя обозначения вектор-столбцов:

$$s = 1, 2, \ldots, m,$$
$$u_s = (u_{s1}, u_{s2}, \ldots, u_{sm}),\quad v_s = (v_{s1}, v_{s2}, \ldots, v_{sm}),$$
$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_m),$$

где u_{sk} v_{sk} и w_s – элементы матриц u, v и вектора w $1 \le k \le m$. Далее обозначим индексом операцию транспонирования. При этом (2.4) можно записать в виде

$$s = 1,2,\dots,m,$$

$$\frac{du_s}{dx} = P^T(x)u_s + v_s, \quad \frac{dv_s}{dx} = Q^T(x)u_s, \quad \frac{dw_s}{dx} = R^T(x)u_s. \tag{2.5}$$

Легко заметить, что для каждого s система (2.5) определяет u_s, v_s и w_s независимо от других значений s. В качестве иллюстрации приведем случай $m=2$:

$$\begin{array}{ll}
s = 1 & s = 2 \\
u'_{11} = P_{11}u_{11}+P_{21}u_{12}+v_{11}, & u'_{21} = P_{11}u_{21}+P_{21}u_{22}+v_{21}, \\
u'_{12} = P_{12}u_{11}+P_{22}u_{12}+v_{12}, & u'_{22} = P_{12}u_{21}+P_{22}u_{22}+v_{22}, \\
v'_{11} = Q_{11}u_{11}+Q_{21}u_{12}, & v'_{21} = Q_{11}u_{21}+Q_{21}u_{22}, \\
v'_{12} = Q_{12}u_{11}+Q_{22}u_{12}, & v'_{22} = Q_{12}u_{21}+Q_{22}u_{22}, \\
w'_{1} = R_1 u_{11}+R_2 u_{12}, & w'_{2} = R_1 u_{21}+R_2 u_{22},
\end{array}$$

где P_{sk} Q_{sk} и R_s – элементы матриц P, Q и вектора R, штрихом обозначена операция дифференцирования.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $u(x), v(x), w(x)$ и $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ – решения (2.4) с начальными условиями

$$u = u(a),\ v = v(a),\ w = w(a) \ \text{при}\ x=a,$$
$$\alpha = \alpha(b),\ \beta = \beta(b),\ \gamma = \gamma(b) \ \text{при}\ x=b \tag{2.6}$$

соответственно. Тогда решение (2.I) – (2.2) имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} u(x) & -v(x) \\ \alpha(x) & -\beta(x) \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{dy}{dx} \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} w(x) \\ \gamma(x) \end{matrix} \right\| . \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы не содержит новых положений по сравнению с доказательством теоремы I.

В результате, после вычисления прогоночных коэффициентов, краевая задача (2.I)-(2.2) сводится к решению алгебраической системы $2m$ уравнений относительно векторов $\frac{dy}{dx}$ и y. Например, при $m=2$ система (2.7) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} & -v_{11} & -v_{12} \\ u_{21} & u_{22} & -v_{21} & -v_{22} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\beta_{11} & -\beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\beta_{21} & -\beta_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Vmatrix},$$

где y_1 и y_2 - элементы вектора y.

Будем формально считать u_s, v_s и w_s, $1 \le s \le m$, элементами вектор-столбца $U^{(s)}$, а P^T, Q^T и R^T - элементами матрицы G:

$$U^{(s)} = \begin{Vmatrix} u_s \\ v_s \\ w_s \end{Vmatrix}, \qquad G = \begin{Vmatrix} P^T & E & 0 \\ Q^T & 0 & 0 \\ R^T & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом систему (2.5) можно представить в виде, аналогичном (I.II)

$$\frac{dU^{(s)}}{dx} = G(x)\, U^{(s)}. \qquad (2.8)$$

Дальнейшее сопоставление с п. 2, §I, показывает, что нормирующий коэффициент $A_i^{(s)}$ (см.определение A_i) достаточно выбрать равным

$$A_i^{(s)} = \max\left(\max_k |u_{sk}|,\ \max_k |v_{sk}|,\ |w_s| \right).$$

В остальном обращение к формуле, аналогичной (I.I2), остается прежним. Наконец, отметим, что устойчивое вычисление коэффициентов, через которые выражается приращение вектора $U^{(s)}$ по формулам Рунге-Кутта, связано с вычислением нормы $C_j^{(s)} = \|u_s^{(j)}\|_{\Pi}$ (см. определение C_j).

2. Рассмотрим на $[a,b]$ линейное дифференциальное уравнение M-го порядка, $M \ge 2$,

$$\frac{d^M y}{dx^M} + \sum_{s=1}^{M-1} A_s(x) \frac{d^{M-s} y}{dx^{M-s}} + A_M(x)\, y = A_{M+1}(x) \qquad (2.9)$$

с ограниченными на $[a,b]$ коэффициентами $A_k(x)$, $k = 1,2,\dots,M+1$. Обозначим через $x^{(j)} \in [a,b]$, $j = 1,2,\dots,M$, точки, в которых заданы граничные условия вида

$$x = x^{(j)}, \quad \sum_{s=1}^{M-1} \alpha_{js} \frac{d^{M-s}y}{dx^{M-s}} + \alpha_{jM} y = \alpha_{jM+1}, \tag{2.10}$$

где α_{jk} – заданные постоянные. Произвол в распределении точек $x^{(j)}$ (не нарушающий порядка нумерации точек) ничем не ограничивается. (В частности, все $x^{(j)}$ могут совпадать, и тогда (2.9)-(2.10) является задачей Коши.) Будем предполагать, что сформулированная таким образом задача имеет единственное решение, устойчивое к малым возмущениям.

Представим (2.9) в виде

$$\sum_{s=1}^{M-1} u_s(x) \frac{d^{M-s}y}{dx^{M-s}} + u_M(x) y = u_{M+1}(x), \tag{2.11}$$

где функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, M+1$, удовлетворяют системе линейных уравнений вида:

$$s = 1, 2, \ldots, M-1,$$

$$\frac{du_s}{dx} = A_s u_1 - u_{s+1}, \quad \frac{du_M}{dx} = A_M u_1, \quad \frac{du_{M+1}}{dx} = A_{M+1} u_1. \tag{2.12}$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 5. Пусть $u_{js}(x)$, $1 \le j \le M$, $1 \le s \le M+1$, – решение (2.12) с граничными условиями: $u_{js} = \alpha_{js}$ при $x = x^{(j)}$. Тогда решение (2.9) - (2.10) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} u_{11}(x) & u_{12}(x) \ldots & u_{1M}(x) \\ u_{21}(x) & u_{22}(x) \ldots & u_{2M}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{M1}(x) & u_{M2}(x) \ldots & u_{MM}(x) \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y^{(M-1)} \\ y^{(M-2)} \\ \vdots \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_{1,M+1}(x) \\ u_{2,M+1}(x) \\ \vdots \\ u_{M,M+1}(x) \end{Vmatrix} \tag{2.13}$$

(верхний индекс y означает порядок производной).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы аналогично доказательству теоремы I. Представим (2.12) в виде векторного уравнения:

$$\frac{dU}{dx} = G(x)\, U, \tag{2.14}$$

где U – вектор, G – матрица

$$U = \begin{Vmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_{M-1}(x) \\ u_M(x) \\ u_{M+1}(x) \end{Vmatrix}, \quad G = \begin{Vmatrix} A_1(x) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2(x) & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M-1}(x) & 0 & 0 & \dots & -1 \\ A_M(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{M+1}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{Vmatrix}.$$

Описание процедуры нормировки при решении (2.I4) полностью повторяет приведенное в п. 2 §I, если в последнем заменить $u^{(j)}$ на $u_1^{(j)}$, $v^{(j)}$ – на вектор $(u_2^{(j)}, u_3^{(j)}, \dots, u_M^{(j)})$ и $w^{(j)}$ на $u_{M+1}^{(j)}$.

§3. Обсуждение результатов

Объективное сопоставление различных методов решения указанных типов краевых задач представляется весьма трудной проблемой и не является предметом обсуждения в настоящей статье. Вместо этого мы ограничимся перечислением некоторых заслуживающих внимания возможностей, присущих предлагаемому варианту метода дифференциальной прогонки, который в дальнейшем будем называть универсальной дифференциальной прогонкой. Приведем лишь один простой пример.

I. Численное решение краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2} = By + 2-12x^2-Bx^2(1-x^2), \quad x\in[0,1], \qquad y=0 \ \text{при} \ x=0 \ \text{и} \ x=1 \tag{3.I}$$

проводилось методом простой факторизации и методом универсальной дифференциальной прогонки. Отрезок [0,I] разбивался равномерно на N-1 частей N = II, 2I. Для решения задачи Коши использовался метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. В силу этого обстоятельства точное решение (3.I), $y = x^2(1-x^2)$, восстанавливалось практически одинаково точно при различных N, если имел место устойчивый вычислительный процесс решения задачи Коши. Практически совпадающие результаты были получены при B = I,0,-I,-2. Однако уже при B = -3 попытка решить задачу методом простой факторизации вызывала АВОСТ, в то время как применение метода универсальной дифференциальной прогонки позволяло по-прежнему восстанавливать решение, в том числе и при засылке в ЭВМ значений B, равных -9,8696 и -1000. Аналогичное явление наблюдалось и при других граничных условиях (например, $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = 0$; $\frac{dy}{dx} = -2(y+1)$ при $x = 1$). Заметим, что изменение типа граничных условий не потребовало в методе универсальной дифференциальной прогонки изменения системы дифференциальных уравнений, к решению которых сводится проблема (см. [3]).

2. При решении краевых задач методом универсальной дифференциальной прогонки мы выигрываем порядок точности вычислений в сравнении с методами, использующими прямую и обратную прогонки. Действительно, применение, например, метода Рунге-Кутта точности r вносит погрешность $O(h^r)$ в вычисление прогоночных коэффициентов, где h - характерный шаг разбиения $[a,b]$. При обратной прогонке, использующей прогоночные коэффициенты, погрешность вычисления функции, дающей решение краевой задачи, накапливается к концу отрезка интегрирования до $O(h^{r-1})$.

3. Метод универсальной дифференциальной прогонки желательно совместить с хранением массивов коэффициентов, входящих в дифференциальное уравнение задачи, если вычисление коэффициентов достаточно трудоемко, с целью сокращения объема вычислений. По этой же причине желателен выбор формул Рунге-Кутта, в которых вычисление коэффициентов на нормированном отрезке [0,I] производятся в точках, симметрично расположенных относительно середины отрезка. Кроме классических формул Рунге-Кутта точности $r = 4$ укажем, например, формулы с $r = 6$ [9], применение которых увеличивает объем массива значений коэффициентов краевой задачи только в полтора раза по сравнению с классическим вариантом метода Рунге-Кутта. Напомним, что указанные массивы используются затем столько раз, сколько требуется построить решений задачи Коши.

4. Специальный вид векторного уравнения

$$\frac{dU}{dx} = G(x)U \,, \tag{3.2}$$

где U - вектор, G - матрица, не исключает возможности применения более эффективного, чем метод Рунге-Кутта, способа интегрирования (3.2). В частности, источником получения такого способа может служить представление (3.2) в виде [10]:

$$U = X(x)\, U_0 ,$$

где U_0 – вектор начальных данных, $X(x)$ – матрица.

Автор выражает искреннюю благодарность участникам семинара под руководством Ю.С.Завьялова за обсуждение результатов, а также В.Л.Мирошниченко за внимание к работе.

Литература

1. ГЕЛЬФАНД И.М., ЛОКУЦИЕВСКИЙ О.В. Метод прогонки для решения разностных уравнений. Препринт, см. также Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем.М.,Физматгиз,1962.

2. МАРЧУК Г.И. Численные методы расчета ядерных реакторов.М., Атомиздат, 1958.

3. БАБУШКА И., ВИТАСЕК Э., ПРАГЕР М. Численные процессы решений дифференциальных уравнений. М., "Мир", 1969.

4. БОГОЛЮБОВ А.Н., ТЕЛЕГИН В.И. Об одном численном методе решений линейных систем уравнений с трехдиагональной матрицей. -"Журн. вычислит. математики и мат.физики", 1974, т. 14, №3,с.539-541.

5. БЕРЕЗИН И.С., ЖИТКОВ Н.П. Методы вычислений. Т. 2. М.,Физматгиз, 1962.

6. ФАДДЕЕВ Д.К. и ФАДДЕЕВА В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л., Физматгиз, 1960.

7. МИХЛИН С.Г. Численная реализация вариационных методов.М., "Наука", 1966.

8. БЕЛЛМАН Р., КАЛАБА Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., "Мир", 1968.

9. BUTCHER I.C. Of Runge-Kutta processes of hich order. - "J. Austral.Math.Soc.",1964,v.4,N 1-2,p.179-194.

10. БЕЛЛМАН Р. Введение в теорию матриц. М., "Наука", 1976.

Поступила в ред.-изд.отд.
14 июня 1978 года