ЭМПИРИЧЕСКОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 76

УДК 518.74

ЗАКОНОМЕРНОСТИ В ЯЗЫКЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.Е.Витяев

Общая цель работы – показать возможности использования теории измерений [1–3] в распознавании образов и эмпирическом предсказании. Аппарат, используемый в теории измерений, и, в частности, многоместные отношения, используемые в ней, довольно необычны для распознавания и эмпирического предсказания. Поэтому приведенная аргументация направлена на показ необходимости использования в этих областях теории измерений и, в частности, многоместных отношений. Будем предполагать, что основные понятия теории измерений известны. Обозначения, относящиеся к теории измерений будем заимствовать из [1].

1. Адекватность предсказаний и алгоритмов. Распространим понятие адекватности числовых утверждений, вводимое в теории измерений, на алгоритмы распознавания и эмпирического предсказания. Так как алгоритмы распознавания являются частными случаями алгоритмов эмпирического предсказания, когда предсказываемый признак принимает значения в шкале наименований, то в дальнейшем мы будем говорить только об алгоритмах эмпирического предсказания или, для краткости, просто алгоритмах предсказания.

Определим сначала, что такое адекватное предсказание. Предсказание, сделанное алгоритмом, адекватно тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно допустимых преобразований тех измерений, на основе которых сделано предсказание. Алгоритм предсказания адекватен, если он всегда дает адекватные предсказания. Уточним эти определения.

Пусть M – матрица исходных данных для алгоритма, элементы $x_{ij} = m_i(a_j)$ ($i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,l$) которой есть результаты измерения i-го признака у j-го объекта, m_i – числовое представление соответствующего признака (некоторые значения x_{ij} могут отсутствовать либо из-за того, что данное значение не измерено, либо из-за того, что оно оставлено для предсказания). При допустимом преобразовании всех признаков $\gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$, где γ_i – допустимое преобразование i-го признака, матрица M переходит в $M' = \gamma(M)$ с элементами $x'_{ij} = \gamma_i(x_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,l)$.

Обозначим результат применения алгоритма предсказания T к матрице M через $T(M)$, который будем называть результатом предсказания. Для определения адекватного предсказания не имеет значения, в каком конкретном виде представлен результат предсказания: либо как принадлежность к какому-нибудь образу одного или нескольких объектов из M, взятых для предсказания, либо как интервалы или точные значения предсказываемой величины на некоторых объектах из M. Важно лишь, чтобы он был однозначно определен. Предположим, что мы применяли алгоритм T сначала к матрице M и получили результат $T(M)$, потом к $M' = \gamma(M)$ и получили результат $T(M')$. Предсказание алгоритма инвариантно относительно допустимого преобразования γ тогда и только тогда, когда результаты предсказания $T(M)$ переходят в результаты предсказания $T(M')$ при применении ко всем величинам из $T(M)$ преобразования γ, что запишем следующим образом: $T(M') = \gamma(T(M))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Предсказание $T(M)$ будем называть адекватным тогда и только тогда, когда для любых допустимых преобразований γ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ имеет место $T(\gamma(M)) = \gamma(T(M))$, $\gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгоритм T адекватен тогда и только тогда, когда он дает адекватные предсказания для любых входных данных M.

Для случая, когда T есть алгоритм распознавания образов, подробное определение адекватности дано в [4]. Адекватность алгоритма является одним из критериев его объективности. Заведомо адекватные алгоритмы можно получить следующим образом.

Из теории измерений следует, что эмпирическая система является первичной по отношению к числовому представлению. Но она необозрима для нашего восприятия. Введение числовых представлений поэтому необходимо ввиду их удобства и легкости для восприятия. В настоящее время решение задач предсказания связано с ЭВМ. Для ЭВМ разница между оперированием с эмпирической системой или оперированием с числовым представлением не так принципиальна, как для человека. Поэтому появляется возможность построения алгоритмов, работающих непосредственно с эмпирическими системами в качестве признаков. Это дает возможность единообразно представлять любые признаки как количественные, так и качественные. С помощью эмпирических систем можно представлять признаки, вообще не имеющие числового представления, как, например, признаки, измеряемые в шкале частичного порядка. Для признаков, представленных в виде эмпирических систем, не надо доказывать теорем представления и единственности, для них не встает проблема адекватности предсказаний и алгоритмов.

2. Виды закономерностей в языке эмпирических систем. Следующим шагом после перехода от признаков к эмпирическим системам должно быть рассмотрение множества закономерностей, выразимых в языке эмпирических систем. Под языком $L(P_1, \ldots, P_n, \ldots, Q_1, \ldots, Q_k)$ эмпирических систем $\mathbf{A} = \langle A; P_1, \ldots, P_{n_1} \rangle, \ldots, \mathbf{B} \rightleftharpoons \langle B; Q_1, \ldots, Q_{n_k} \rangle$ будем понимать язык первой ступени, содержащий в качестве нелогических символов символы отношений $P_1, \ldots, P_{n_1}, \ldots, Q_1, \ldots, Q_{n_k}$, которые будем обозначать теми же символами, что и сами отношения. Для того чтобы продемонстрировать достаточную выразительность этих языков, покажем, как в них могут быть выражены основные законы классической физики. В настоящее время неизвестно, все ли законы природы, в том числе и физические, могут быть выражены в языке эмпирических систем. Пока основанием для этого является только первичность закономерностей, представленных в эмпирических системах, по отношению к числовым представлениям. В конце этого пункта приводятся закономерности, не имеющие аналога в числовом виде.

Опишем следующий эксперимент. Пружина с прикрепленной к ней с одного конца чашей для гирь или других объектов другим концом подвешивается к опоре. В чашу кладутся объекты различного веса, и фиксируется растяжение пружины относительно исходного состояния. В процессе эксперимента одну пружину можно заменить на другую. Результаты эксперимента будем представлять в виде тройки $r = \langle a, p, b \rangle$, где $a \in A$ – вес объекта, находящегося в чаше, $p \in \Pi$ – упругость пружины, $b \in B$ – длина растяжения пружины относительно исходного состояния. Эмпирические системы этих величин обозначим соответственно через $\mathbf{A} = \langle A; \leq_a, o_a \rangle$, $\mathbf{\Pi} = \langle \Pi; \leq_p \rangle$ и $\mathbf{B} = \langle B; \leq_b, o_b \rangle$. Возьмем числовую систему $\mathbf{R}_1 = \langle Re^0; \leq, + \rangle$ для величин a и b и числовую систему $\mathbf{R}_2 = \langle Re^0; \leq \rangle$ для величины p. Зафиксируем шкалу веса $m_a: A \to Re^0$, длины $m_b: B \to Re^0$ и упругости $m_p: \Pi \to Re^0$. Результаты эксперимента удовлетворяют закону Гука, который в числовом виде записывается так: $\forall r (m_a(a) = m_p(p) \cdot m_b(b))$, $r = \langle a, p, b \rangle$.

Опустив, для простоты, закономерности, использующие символы отношений $\leq_a, \leq_b, \leq_p$, выпишем закономерность, использующую символы отношений o_a, o_b и выражающую закон Гука в языке эмпирических систем :

$$\forall r_1, r_2, r_3 \, (p_1 \sim_p p_2 \sim_p p_3 \rightarrow (a_1 o_a a_2 = a_3 \leftrightarrow b_1 \, o_b \, b_2 = b_3)), \quad (I)$$

где $r_i = \langle a_i, p_i, b_i \rangle$, $i = 1,2,3$. Законы такого вида называются законами подобия [3, с.484], так как они устанавливают подобие эмпирических систем, в данном случае эмпирических систем **A** и **B** .

Другой пример закона подобия дает измерение плотности, основанное на законе: отношение m/v постоянно для данного материала. По закону подобия при постоянной плотности (т.е. фиксированном материале) устанавливается подобие эмпирических систем массы и объема.

Пример закона подобия с обратно пропорциональной связью величин может дать эксперимент с рычагом. Постоянной величиной здесь будет фиксированный вес, удерживаемый на одном конце рычага. На другом конце расстояние b от точки приложения некоторого веса a до точки опоры будет обратно пропорционально прилагаемому весу, удерживающему рычаг в равновесии. Эмпирическая система упругости заменится в данном случае на эмпирическую систему веса $A' = \langle A'; \leq_{a'}, o_{a'} \rangle$, который удерживается на одном конце рычага. Эксперимент представляется тройкой $r = \langle a, a', b \rangle$, $a \in A$, $a' \in A'$, $b \in B$. Тогда закон подобия выражается следующим образом: $\forall r_1, r_2 (a'_1 \sim_{a'} a'_2 \rightarrow (a_1 o_a a_1 = a_2 \leftrightarrow b_2 o_b b_2 = b_1))$.

Выпишем в общем случае законы подобия для уравнений вида $y^n = kx^m$ и $y^n = k/x^m$, $m, n > 0$. Обозначим эмпирические системы величин y, x и k через $\langle Y; \leq_y, o_y \rangle$, $\langle X; \leq_x, o_x \rangle$ и $\langle K; \leq_k \rangle$; i_y-кратное применение отношения o_y к $y \in Y$ обозначим через $i_y a = a o_y \ldots o_y a$; эксперимент r обозначим через $r = \langle y, x, k \rangle$, $y \in Y$, $x \in X$, $k \in K$. Формулировки закона подобия для указанных формул примут вид :

$$\forall r_1, r_2 (k_1 \sim_k k_2 \rightarrow (x_2 \sim_x i_x^m x_1 \leftrightarrow y_2 \sim_y i_y^n y_1)),$$

$$\forall r_1, r_2 (k_1 \sim_k k_2 \rightarrow (x_2 \sim_x i_x^m x_1 \leftrightarrow y_1 \sim_y i_y^n y_2)),$$

где i – произвольное целое, большее 0. Для более полной характеристики закономерностей $y^n = kx^m$ и $y^n = k/x^m$ нужно было бы привести закономерности, использующие символы отношений $\leq_y, \leq_x, \leq_k$, которые существенно дополняли бы приведенные закономерности и определили бы "независимость" величин k и x^m, благодаря чему можно брать их произведение или частное, но для простоты ограничимся ссылкой на [3, гл.6].

Кроме законов подобия, существуют законы обмена [3, с.488]. Примером может служить закон $E = \frac{1}{2} mv^2$, в котором компоненты m и v изменяются независимо друг от друга и имеют в своих эмпирических системах отношения o_m, o_v. Другим примером закона обмена, но уже для отношения величин $b = p_1/p_2$ может быть видоизмененный эксперимент с рычагом. Вес, который удерживается рычагом, теперь уже не фиксирован. Изменяя веса на обоих концах рычага, мы исследуем вопрос: как при изменении одного из весов должен изменяться другой вес, чтобы при заданной длине рычага равновесие сохранилось. Эмпирические системы здесь те же, что и в предыдущем случае:

$$\forall r_1, r_2((a_1 o_a a_1 = a_2 \& a_1' o_{a'} a_1' = a_2') \to b_1 \sim_b b_2).$$

Смысл данной закономерности в том, что если пропорционально увеличить прилагаемый и удерживаемый веса, то равновесие сохранится. Закон обмена показывает, как должны взаимно обмениваться две величины своими значениями, чтобы значение третьей осталось неизменным.

В общем случае для уравнений вида $y = k^n x^m$ и $y = k^n / x^m$ законы обмена в языке эмпирических систем $\langle Y; \sim_y \rangle$, $\langle X; \leq_x, o_x \rangle$ и $\langle K; \leq_k, o_k \rangle$ примут вид:

$$\forall r_1, r_2((i_x^m x_1 \sim_x x_2 \& i_k^n k_2 \sim_k k_1) \to y_1 \sim_y y_2),$$

$$\forall r_1, r_2((i_x^m x_1 \sim_x x_2 \& i_k^n k_1 \sim_k k_2) \to y_1 \sim_y y_2).$$

Рассмотрим более сложный случай, когда все три переменные имеют отношения o. В том же эксперименте с рычагом можно выписать два закона подобия при фиксированных весах a и a' соответственно и один закон обмена, приведенные ранее. В общем случае два из этих законов определяют третий. Функциональные зависимости четырех и более переменных определяют целый набор законов подобия и обмена, каждый из которых выражает взаимосвязь двух отношений o при фиксированных значениях остальных переменных. Рассматривая зависимости многих переменных, можно выписать многие законы классической физики. Используя символы отношений o и $\leq$, можно сформулировать закономерности, которые в числовом виде выражаются логарифмической и экспоненциальной зависимостью. Известны шкалы и некоторые закономерности в них для циклических величин типа угла, релятивистских величин массы и скорости.

Приведем закономерности, не имеющие аналога в числовом виде. Возьмем эксперимент $r = \langle a, b, c \rangle$, для которого выполняются следующие две закономерности, определяющие "независимость" величин a и b:

$$\forall r_1, r_2 (b_1 \sim_b b_2 \& c_1 \leq_c c_2 \Rightarrow \forall r_3, r_4 (a_1 \sim_a a_3 \& a_2 \sim_a a_4 \& b_3 \sim_b b_4 \Rightarrow c_3 \leq_c c_4)),$$

$$\forall r_1, r_2 (a_1 \sim_a a_2 \& c_1 \leq_c c_2 \Rightarrow \forall r_3, r_4 (b_1 \sim_b b_3 \& b_2 \sim_b b_4 \& a_3 \sim_a a_4 \Rightarrow c_3 \leq_c c_4)).$$

Пример такого эксперимента есть в [3, с.268]. Если к тому же выполняются некоторые другие закономерности, то можно доказать [3, гл.6], что существуют функции $\varphi_1: A \rightarrow Re$ и $\varphi_2: B \rightarrow Re$, удовлетворяющие условию

$$\forall r_1, r_2 (c_1 \leq_c c_2 \Leftrightarrow \varphi_1(a_1) + \varphi_2(b_1) \leq \varphi_1(a_2) + \varphi_2(b_2)),$$

что дает аддитивное представление зависимости c от a и b. Приведенные закономерности не имеют аналога в числовых зависимостях. Они выражают только определенное свойство числовой зависимости, если такая числовая зависимость существует. Данных закономерностей недостаточно, чтобы, как в случае закономерности (I), почти полностью определить числовую зависимость. Более наглядно это проявляется в следующей закономерности: $\forall r_1, r_2 (a_1 \leq_a a_2 \& b_1 \leq_b b_2 \Rightarrow c_1 \leq_c c_2)$. Если для величин $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ существуют шкалы $m_a: A \rightarrow Re$, $m_b: B \rightarrow Re$, $m_c: C \rightarrow Re$, переводящие отношения $\leq_a$, $\leq_b$, $\leq_c$ в отношение порядка $\leq$ на числах, и если $m_c = f(m_a, m_b)$ для некоторой функции f, то приведенная закономерность перейдет в свойство монотонности функции f относительно шкал m_a и m_b, значения которых обозначим через y и x $\forall x, y (y_1 \leq y_2 \& x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(y_1, x_1) \leq f(y_2, x_2))$. Эта закономерность, как и две предыдущие, выражает отдельное свойство числовой зависимости. Однако одного этого свойства достаточно для организации и получения предсказаний [5].

3. Закономерности в шкалах порядка. Рассмотрим подробнее свойство монотонности. Пусть есть две эмпирические системы $\mathbf{A} = \langle A; \leq_a \rangle$ и $\mathbf{B} = \langle B; \leq_b \rangle$, в которых A и B бесконечны и имеют счетную базу [I, с.7I]. Для этих систем существуют шкалы $m_A: A \rightarrow Re$ и $m_B: B \rightarrow Re$, единственные с точностью до

произвольных, монотонно возрастающих, непрерывных отображений $m_A(A) \to Re$ и $m_B(B) \to Re$ [I, с. 26]. Зафиксируем две шкалы m_A и m_B, отображающие множества A и B в числовую систему $R = \langle Re; \le \rangle$. Предположим, что в некотором эксперименте, результаты которого будем обозначать парой $r = \langle a,b \rangle$, значения из A и B связаны взаимно-однозначно, причем так, что для любых $r_1 = \langle a_1,b_1 \rangle$ и $r_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$ выполняется свойство монотонности $a_1 \le_a a_2 \Leftrightarrow b_1 \le_b b_2$. Тогда шкалы m_A и m_B будут связаны монотонной числовой зависимостью $m_B = F(m_A)$. Представим этот эксперимент с помощью эмпирической системы $\mathfrak{N} = \langle N; \le_1, \le_2 \rangle$, где $N \subset A \cdot B$ – множество всех возможных результатов $r = \langle a,b \rangle$ эксперимента, а отношения $\le_1, \le_2$ определяются следующим образом: $r_1 \le_1 r_2 \Leftrightarrow a_1 \le_a a_2$; $r_1 \le_2 r_2 \Leftrightarrow b_1 \le_b b_2$; $r_1 = \langle a_1,b_1 \rangle$, $r_2 = \langle a_2,b_2 \rangle$. Определим шкалы $m_1: N \to Re$ и $m_2: N \to Re$ так, что $m_1(r) = m_A(r)$ и $m_2(r) = m_B(b)$ для любого $r = \langle a, b \rangle \in N$. Тогда $m_2 = f(m_1)$. При допустимых преобразованиях $\gamma_1: m_1(N) \to Re$ и $\gamma_2: m_2(N) \to Re$ числовая зависимость f перейдет в $\gamma_2 m_2 = \gamma_2 f \gamma_1^{-1}(\gamma_1 m_1)$. При таких преобразованиях единственными адекватными утверждениями, которые можно сделать относительно f, могут быть только те, которые записаны с использованием отношения порядка; в частности, адекватным утверждением является свойство монотонности

$$\forall r_1, r_2 (m_1(r_1) \le m_1(r_2) \Leftrightarrow f(m_1(r_1)) \le f(m_1(r_2))). \qquad (2)$$

Как и в случае количественных шкал, в задачах распознавания образов f может быть решающим правилом, разделяющим все возможные эксперименты на два образа (см. рис.I). Вместо эмпирической системы $\mathfrak{N}$ рассмотрим эмпирическую систему $\mathfrak{M} = \langle A \times B; \le_1, \le_2, P_N \rangle$, где $\le_1$, $\le_2$ те же, что и в $\mathfrak{N}$, а P_N – одноместный предикат, истинный только на тех элементах $r \in A \times B$, которые принадлежат N. Тогда $\mathfrak{M}$ будет содержать выделенную предикатом P_N подмодель, изоморфную $\mathfrak{N}$. Используя отношения из $\mathfrak{M}$, можно определить одноместное отношение $P(r)$, истинное на объектах первого образа,

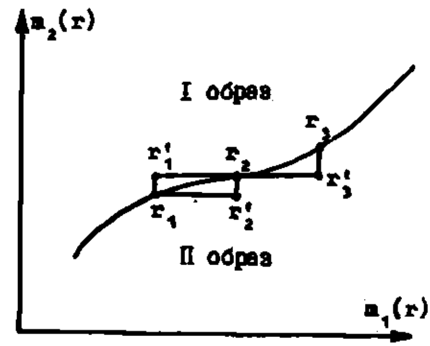

Рис. I

включая точки кривой, и ложное на объектах второго образа:

$$P(r) \leftrightarrow \exists r'(P_N(r') \& m_1(r) \le m_1(r') \& m_2(r) \ge m_2(r')). \qquad (3)$$

Отношение P адекватно. Адекватными утверждениями, позволяющими предсказывать принадлежность к образу, инвариантными относительно допустимых преобразований, так же, как и в предыдущем случае, могут быть только те утверждения, которые записаны с помощью отношения порядка, например:

$$\forall r_1, r_2(m_1(r_1) \ge m_1(r_2) \& m_2(r_1) \le m_2(r_2) \& P(r_1) \to P(r_2)),$$

$$\forall r_1, r_2(m_1(r_1) \ge m_1(r_2) \& m_2(r_1) \le m_2(r_2) \& \bar{P}(r_2) \to \bar{P}(r_1)) .$$

Формулы (2) и (3) существенно используют отношение порядка. В алгоритмах предсказания для шкал порядка используются в основном только одноместные отношения, поэтому необходимо показать, что формулы (2) и (3) не могут быть выражены с помощью какой бы то ни было конечной совокупности одноместных отношений. Одноместным отношением при этом может быть любое отношение $P(r)$, истинное на множестве $\{r = \langle a,b \rangle | a \in A_P \subset A\}$ для произвольного A_P, либо отношение $Q(r)$, истинное на множестве $\{ r = \langle a, b \rangle | b \in B_Q \subset B \}$ для произвольного B_Q.

Докажем, что формулы (2) и (3) логически неэквивалентны никакой формуле Φ в языке первой ступени без равенства, записанной в терминах конечного множества одноместных отношений $P_1, \dots, P_{n_1}$, $Q_1, \dots, Q_{n_2}$.

Приведем доказательство для формулы (2). Определим класс моделей $\mathfrak{I} = \{N' = \langle N', \le_1, \le_2 \rangle | N' \subset A \times B\}$, где $\le_1, \le_2$ имеют прежнюю интерпретацию. Эмпирическая система N принадлежит $\mathfrak{I}$. Все модели из $\mathfrak{I}$ отличаются только множеством N'. Для доказательства логической неэквивалентности достаточно показать, что для любой формулы Φ найдется в $\mathfrak{I}$ модель, на которой формула Φ и формула (2) будут принимать различные значения истинности. Возьмем модель $N \in \mathfrak{I}$. Для нее формула (2) истинна. Пусть дана произвольная формула Φ. Определим отношение эквивалентности $\sim_\Phi$ на элементах из N: $r_1 \sim_\Phi r_2$ тогда и только тогда, когда все предикаты $P_1, \dots, P_{n_1}$, $Q_1, \dots, Q_{n_2}$, входящие в Φ, принимают на r_1 и r_2 одинаковые значения истинности. Так как все отношения, входящие в Φ, одноместны и их число конечно, то число классов эквивалентности конечно. Тогда, в силу бесконечности A и взаимно-однозначного соответствия между A и B, можно найти r_1 и r_2 такие, что $r_1 \sim_\Phi r_2$ и $a_1 <_a a_2$ и $b_1 <_b b_2$. Заменим в множестве N элементы r_1 и r_2 на $r_1' = \langle a_1, b_2 \rangle$ и $r_2' = \langle a_2, b_1 \rangle$, получим множество N' и соответствующую модель $\mathfrak{M}' \in \mathfrak{J}$. Так как $r_1 \sim_\Phi r_2$, то $r_1 \sim_\Phi r_1'$ и $r_2 \sim_\Phi r_2'$. Поэтому, если вместо модели $\mathfrak{M}$ взять модель $\mathfrak{M}'$, истинность формулы Φ сохранится, а истинность формулы (2) изменится (она станет ложной), следовательно, они логически неэквивалентны.

Перейдем к формуле (3). Покажем, что в эмпирической системе $\mathfrak{M}$ предикат $P(r)$, определенный формулой (3), не может быть логически эквивалентен никакой формуле Φ, записанной в терминах одноместных отношений. Предположим противное: существует формула Φ такая, что $P(r) \Leftrightarrow \Phi(r, r_1, r_2, \dots, r_n)$, где $r_1, r_2, \dots, r_n$ – связанные переменные. По тем же причинам, что и в предыдущем случае, существуют r_1, r_2, r_3 (см.рис.I) такие, что $a_1 <_a a_2 <_a a_3$, $b_1 <_b b_2 <_b b_3$ и $r_1 \sim_\Phi r_2 \sim_\Phi r_3$. Тогда $P(r_1')$ истинно, а $P(r_3')$ ложно и $r_1' \sim_\Phi r_1$ и $r_3' \sim_\Phi r_3$. Следовательно, формула Φ принимает на r_1' и r_3' одинаковые значения, что противоречит тому, что P принимает на r_1' и r_3' различные значения. Значит, исходное предположение об эквивалентности предиката P и формулы Φ ложно.

Для шкал порядка наиболее отчетливо видна необходимость в использовании многоместных отношений, так как числовые закономерности неадекватны, а сведение их к шкале наименований путем использования только одноместных отношений исключает из рассмотрения закономерности вида (2), (3) и их следствия, которые могут быть существенны для предсказания [5].

4. Множество всех возможных закономерностей. Мы рассмотрели различные виды закономерностей в некотором языке L эмпирических систем. Большинство известных закономерностей являются универсальными формулами языка L, так как они обладают следующим эмпирически интерпретируемым свойством.

Представим результаты некоторого эксперимента с помощью набора $r = \langle a^1, a^2, \dots, a^n \rangle$, где a^i – все величины, измеряемые в ходе эксперимента. Пусть эмпирические системы величин a^i будут $\mathbf{A}_i = \langle A_i; (R_j^i)_{j \in I_i} \rangle$. Для каждого отношения R_j^i, $j \in I_i$ введем отношение Q_{ij}, определенное на экспериментах $r_k = \langle a_k^1, a_k^2, \dots, a_k^n \rangle$, $k=1,2,\dots,m_{ij}$ следующим образом: $Q_{ij}(r_1, \dots, r_{m_{ij}}) \Leftrightarrow R_j^i(a_1^i, \dots, a_{m_{ij}}^i)$.

Предположим, мы получили результаты l эксперментов $r_1,\dots,r_l$. Эксперименты $r_1,\dots,r_l$ вместе с отношениями Q_{ij}, определенными на них, образуют модель серии экспериментов $\mathfrak{S} = \langle S; (Q_{ij}) \rangle$, $S = \{r_1,\dots,r_l\}$. Для $S' \subset S$ отношения Q_{ij}, определенные на S, будут определены и на S'. Множество S' вместе с определенными на нем таким образом отношениями Q_{ij} будем называть подмоделью $\mathfrak{S}' = \langle S'; (Q_{ij}) \rangle$ модели $\mathfrak{S}$.

Проводя серии экспериментов различной длины и над различными объектами, но в фиксированной экспериментальной ситуации будем получать различные модели серии экспериментов. Обозначим множество всех возможных конечных моделей таких серий через $\mathfrak{I}$. Множество вообще всех возможных конечных моделей в языке L, содержащем символы отношений Q_{ij}, обозначим через $\mathcal{T}$. Нам нужно сформулировать необходимое и достаточное условие универсальной аксиоматизируемости класса $\mathfrak{I}$ в классе $\mathcal{T}$. Так как модели в $\mathfrak{I}$ и $\mathcal{T}$ конечны, таким условием будет наследственность [6, с.175] класса $\mathfrak{I}$ в $\mathcal{T}$, т.е. условие, что каждая подмодель $\mathfrak{S}'$ модели $\mathfrak{S} \in \mathfrak{I}$ также принадлежит $\mathfrak{I}$. Для конечных моделей наследственность эквивалентна локальной замкнутости, для которой доказано [6, с.174], что она является необходимым и достаточным условием универсальной аксиоматизируемости $\mathfrak{I}$ в $\mathcal{T}$.

Каков эмпирический смысл свойства наследственности? Это свойство означает: если в результате серии экспериментов S мы получили модель $\mathfrak{S}'$, то любая подмодель $\mathfrak{S}$ также может быть получена в результате экспериментов $S' \subset S$. Это условие удовлетворяется, если, во-первых, для любой серии экспериментов S любая подсерия $S' \subset S$ также может быть получена в результате экспериментов и, во-вторых, после определения истинности отношений на S', увидим, что их истинность не изменилась по сравнению с истинностью последних на всей серии S, т.е. исключение некоторых экспериментов не влияет на истинность отношений на оставшихся экспериментах. Эти условия формулируют определенную независимость экспериментов и отношений на них. При выполнении этих условий, закономерная связь величин из $r = \langle a^1,\dots,a^n \rangle$, получающаяся в результате эксперимента, выразима в виде универсальных формул. В случае, когда серии экспериментов удовлетворяют закономерности с квантором существования, приведенные условия могут нарушаться. Закономерность $\exists a_0 \forall a\, (a \circ a_0 = a)$ требует существования в любой серии экспериментов нулевого элемента a_0, что препятствует выполнению первого условия. Закономерность $\exists r D(r) \Rightarrow A$ при наличии эксперимента r, удовлетворяющего условию D, требует выполнения аксиомы A. Поэтому если взять подсерию S', не содержащую такого эксперимента r, то отношения не будут удовлетворять аксиоме A, т.е. принимать на подсерии S' другие значения истинности. Пример такой закономерности может встретиться в психологических экспериментах.

Будем в дальнейшем предполагать, что сформулированные условия выполнены, и ограничимся рассмотрением только универсальных формул. Но это множество слишком обширно для алгоритмического перебора. В работе [7] показано, что любая универсальная, не тождественно истинная формула $\forall x_1,\ldots,x_n\ A(x_1,\ldots,x_n)$ представима в виде конъюнкции формул вида

$$\forall x_1,\ldots,x_n (P_{i_1}^{\varepsilon_1}(x_1,\ldots,x_{m_{i_1}}) \& \ldots \& P_{i_n}^{\varepsilon_n}(x_1,\ldots,x_{m_{i_n}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{i_0}^{\varepsilon_0}(x_1,\ldots,x_{m_{i_0}})), \qquad (4)$$

где $\varepsilon=0(1)$ означает, что отношение берется с отрицанием (или без него). Таким образом, если закономерность универсально аксиоматизируема, то она аксиоматизируема с помощью формул вида (4). Приведенное представление закономерностей уже позволяет разрабатывать практически приемлемые методы обнаружения закономерностей и методы предсказания, использующие обнаруженные закономерности, которые на соответствующем обучающем материале могут обнаружить любую формулу вида (4). Метод, изложенный в [7], реализует такую возможность. Он также может использовать априорную информацию, представленную в виде совокупности формул вида (4). Для шкал наименований, порядка и частично отношений метод запрограммирован на ЭВМ БЭСМ-6 и апробирован на ряде прикладных задач.

Автор выражает благодарность Н.Г.Загоруйко за ряд полезных замечаний по работе.

Литература

1. ПФАНЦАГЛЬ. Теория измерений. М., "Мир", 1976.

2. Психологические измерения. Сб. под редакцией Л.Д.Мешалкина. М., "Мир", 1967.

3. KRANTZ D.H., LUCE R.D., SUPPES P., TVERSKY A. Foundations of measurenment.V.1. Academic press, 1971.

4. МАНОХИН А.Н. Методы распознавания образов, основанные на логических решающих функциях. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов. (Вычислительные системы, вып. 67.) Новосибирск, 1967, с. 42-53.

5. ЗАГОРУЙКО Н.Г.Искусственный интеллект и эмпирическое предсказание. Новосибирск, НГУ, 1975.

6. МАЛЬЦЕВ А.И. Алгебраические системы. М., "Наука", 1970.

7. ВИТЯЕВ Е.Е. Метод обнаружения закономерностей и метод предсказания. -В кн.: Эмпирическое предсказание и распознавание образов. (Вычислительные системы, вып. 67.) Новосибирск, 1976, с. 54-68.

Поступила в ред.-изд.отд.
23 августа 1978 года