ЭМПИРИЧЕСКОЕ ПРЕДСКАЗАНИЕ И РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 76

УДК 519.95:681.3.06

АППРОКСИМАЦИЯ НЕЧЕТКИХ ОТНОШЕНИЙ

Ю.П.Дробышев, В.В.Пухов

Многие методы обработки данных основаны на использовании матрицы связей совокупности объектов, которая может быть получена способом, описанным, например, в [1]. В матрице связей требуется обнаружить определенного вида заранее заданные закономерности (структуры). В общем случае такие структуры отсутствуют и необходимо обратиться к приближенному анализу. Это, в свою очередь, требует указания степени точности соответствия исходной матрицы связи и выделенной структуры.

Аппроксимация матриц связи с элементами 0 и 1 четкими бинарными отношениями рассматривалась рядом авторов [2-4]. В данной работе решается задача аппроксимации матриц связи, которые могут рассматриваться как нечеткие отношения [5], четкими отношениями из заданного класса. Другие постановки и подходы к решению этой задачи с использованием нечетких категорий описаны, например, в [6,7].

1. Постановка задачи аппроксимации

Мы будем рассматривать множество объектов M и матрицу связей $\mu = \{\mu(x,y), (x,y) \in M \cdot M,\ 0 \le \mu(x,y) \le 1\}$, которая является нечетким бинарным отношением. Пусть D - множество всех нечетких бинарных отношений на конечном множестве M. В множестве D можно выделить классы наиболее употребительных в практике отношений, таких как: отношения порядка (полного или частичного), эквивалентности, толерантности и т.д. В дальнейшем будем рассматривать классы отношений, задаваемые перечнем аксиом. Например, класс четких отношений $\hat{D}$ задается следующим образом:

$$\mu \in \hat{D} \Leftrightarrow 1)\,\mu(x,y) = 0 \vee 1 \ \text{для всех} \ x,y \in M.$$

Класс отношений нечетких толерантностей $D_T \subset D$ задается следующим способом:

$$\mu \in D_T \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\,\mu(x,x) = 1 \ \text{для всех} \ x \in M; \\ 2)\,\mu(x,y) = \mu(y,x) \ \text{для всех} \ x,y \in M. \end{cases}$$

Класс эквивалентностей $D_\sim \subset \hat{D}$ задается следующим способом:

$$\mu \in D_\sim \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\,\mu(x,x) = 1 \ \text{для всех} \ x \in M; \\ 2)\,\mu(x,y) = \mu(y,x) \ \text{для всех} \ x,y \in M; \\ 3)\ \text{транзитивность}. \end{cases}$$

Весьма часто возникает следующая задача: заданная матрица нечеткого отношения $\mu_0 \in D$ должна быть аппроксимирована матрицей из фиксированного класса четких отношений $D_R \subseteq \hat{D}$.

Обычно задачу аппроксимации сводят к минимизации расстояния между исходным и аппроксимирующим объектами, если можно ввести функцию метрики. В нашем случае удобно рассмотреть метрику, определяемую формулой

$$d(\mu_1, \mu_2) = \max_{(x,y)} |\mu_1(x,y) - \mu_2(x,y)|.$$

Таким образом, возникает

ЗАДАЧА А. Требуется найти множество $\{\mu_R^*\}_A$ такое, что

$$\{\mu_R^*\}_A = \arg \min_{\mu_R \in D_R} d(\mu_0, \|\mu_0\|\mu_R) =$$

$$= \arg \min_{\mu_R \in D_R} \max_{(x,y)} |\mu_0(x,y) - \|\mu_0\|\mu_R(x,y)|,$$

$$\|\mu_0\| = \max_{(x,y)} \{\mu_0(x,y)\},$$

где коэффициент $\|\mu_0\|$ выравнивает нормы аргумента функции d.

Рассмотрим теперь способ аппроксимации, который заключается в том, что исходное отношение μ_0 представляется в виде взвешенной суммы двух отношений, а именно:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_0(x,y) = \theta_1\mu_R(x,y) + \theta_2\mu(x,y) \ \text{для всех} \ x,y \in M; \\ \theta_1 + \theta_2 = \|\mu_0\|; \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1 \geq 0;\\&\theta_2 \geq 0;\\&\mu_R \in D_R,\ \bar{\mu} \in D.\end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Существование разложения (I) доказывается леммой.

ЛЕММА. Для данного фиксированного $\mu_R \in D_R$ разложение (I) существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В матричном равенстве $\mu_0(x,y) = \theta_1\mu_R(x,y) + \theta_2\bar{\mu}(x,y)$ рассмотрим те равенства, где $\mu_R(x,y) = 1$. Для таких (x,y) получаем неравенство

$$\theta_1 \leq \mu_0(x,y). \qquad (2)$$

Для тех (x,y), где $\mu_R(x,y) = 0$, имеем:

$$\theta_1 \leq \|\mu_0\| - \mu_0(x,y). \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует

$$Q_1 \leq \begin{cases} \mu_0(x,y) & \text{при } \mu_R(x,y) = 1;\\ \|\mu_0\| - \mu_0(x,y) & \text{при } \mu_R(x,y) = 0\ . \end{cases} \qquad (4)$$

Учитывая, что $D_R \subseteq \hat{D}$, (4) можно записать следующим образом:

$$\theta_1 \leq \theta_1^* = \min_{(x,y)}\{\mu_0(x,y)\mu_R(x,y) + (\|\mu_0\| - \mu_0(x,y))(1-\mu_R(x,y))\}. \qquad (5)$$

При этом

$$\mu(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0(x,y) - \theta_1}{\|\mu_0\| - \theta_1} & \text{при } \mu_R(x,y) = 1;\\[2ex] \dfrac{\mu_0(x,y)}{\|\mu_0\| - \theta_1} & \text{при } \mu_R(x,y) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Формулы (5) и (6) доказывают существование разложения (I), которое имеет смысл только при $\theta_1^* > 0$. Общих условий для μ_0 и класса D_R, при которых неравенство $\theta^* > 0$ выполняется, сформулировать не удается. Для практических случаев, тем не менее, можно указать совокупность условий для его истинности, как это сделано, например, в п.2.

Приведенная лемма позволяет найти коэффициенты θ_1 и θ_2 единственным образом, если в качестве θ_1 выбирать θ_1^*, что объясняется смысловым содержанием этого коэффициента: θ_1 есть степень качества аппроксимация отношения μ_0, если в качестве аппроксимирующего отношения выбирается μ_R. Таким образом, можно считать θ_1^* функцией μ_R и, следовательно, можно ставить задачу (задача В) поиска таких μ_R^*, что $\theta_1^*(\mu_R) \le \theta_1^*(\mu_R^*)$ для всех $\mu_R \in D_R$.

ЗАДАЧА В. Требуется найти $\{\mu_R^*\}_B$ такое, что

$$\{\mu_R^*\}_B = \arg \max_{\mu_R \in D_R} \theta_1^*(\mu_R) =$$

$$= \arg \max_{\mu_R \in D_R} \min\{\mu_0(x,y)\mu_R(x,y) + (\|\mu_0\| - \mu_0(x,y)(1 - \mu_R(x,y))\}.$$

Эквивалентность задач А и В и правомерность задачи В как задачи аппроксимации доказывает следующая

ТЕОРЕМА.

$$\{\mu_R^*\}_A = \{\mu_R^*\}_B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем коэффициент $\theta_1^* = \theta_1^*(\mu_R)$ из (5) следующим образом:

$$\theta_1^*(\mu_R) = \min_{(x,y)} \{\mu_0(x,y)\mu_R(x,y) + (\|\mu_0\| - \mu_0(x,y))(1 - \mu_R(x,y))\} =$$

$$= \|\mu_0\| + \min_{(x,y)} \{-(\|\mu_0\| - \mu_0(x,y))\mu_R(x,y) - \mu_0(x,y)(1 - \mu_R(x,y))\} =$$

$$= \|\mu_0\| - \max_{(x,y)} \{(\|\mu_0\| - \mu_0(x\ y))\mu_R(x,y) + \mu_0(x,y)(1 - \mu_R(x,y))\} =$$

$$= \|\mu_0\| - d(\mu_0, \|\mu_0\|\mu_R).$$

Последнее равенство верно потому, что

$$d(\mu_0, \|\mu_0\|\mu_R) = \max_{(x,y)} \{|\mu_0(x,y) - \|\mu_0\|\mu_R(x,y)|\} =$$

$$= \max_{(x\ y)} \{(\|\mu_0\| - \mu_0(x,y))\mu_R(x,y) + \mu_0(x,y)(1 - \mu_R(x,y))\}.$$

Итак, отношение μ_R^*, доставляющее максимум функции $\theta_1^*(\mu_R)$, доставляет минимум $d(\mu_0, \|\mu_0\|\mu_R)$.

2. Решение некоторых задач аппроксимации

В этом разделе изложенный подход применен для двух частных случаев: аппроксимация произвольного нечеткого отношения μ_0 четким μ_R и решение задачи таксономии.

I. Аппроксимация нечеткого отношения четким. Пусть $\mu_0 \in D$, а $\mu_R \in \hat{D}$. В данном случае, если $\mu_0 \neq 0$, то, как следует из (5), $\theta_1^*(\mu_R)$ отлично от нуля. Анализ формулы (5) дает простое правило построения аппроксимирующего μ_R, а именно:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1, & \mu_0(x,y) \geq \frac{1}{2}\|\mu_0\|; \\ 0, & \mu_0(x,y) < \frac{1}{2}\|\mu_0\|. \end{cases}$$

При этом всегда $\theta_1^*(\mu_R) \geq \frac{1}{2}\|\mu_0\|$.

Подвергая остаточную

$$\overline{\mu} = \frac{\mu_0 - \theta_1^*\mu_R}{\|\mu_0\| - \theta_1^*}$$

дальнейшему разложению, получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ. Любое $\mu_0 \in D$ может быть представлено суммой

$$\mu_0 \in \sum_{\mu \in \hat{D}} \mu \cdot c(\mu), \text{ где } \sum_{\mu \in \hat{D}} c(\mu) = \|\mu_0\|, \quad c(\mu) \geq 0.$$

Очевидно также следующее экстремальное свойство коэффициентов $c(\mu)$: каждый $c(\mu)$ есть наибольший коэффициент аппроксимации разности между μ_0 и суммой предыдущих отношений со своими коэффициентами.

2. Аппроксимация нечеткого отношения толерантности отношением эквивалентности. Рассмотрим теперь задачу таксономии, т.е. аппроксимации исходного отношения $\mu_0 \in D$ четким отношением $\mu \in D_\sim$. Решение ищем на основе задачи В. Требуется найти $(\mu^*)_B \subseteq D_\sim$. В этом случае неравенство $\theta_1^*(\mu) > 0$ выполняется, если в μ_0 нет нетранзитивного контура, т.е. не существует тройки объектов x_1, x_2, x_3 таких, что $\mu_0(x_1,x_2)=1$, $\mu_0(x_2,x_3) = 1$ и $\mu_0(x_1, x_3) = 0$.

Имеем следующий алгоритм задачи таксономии.

Строится множество $T = \{\min\{\mu_0(x,y), 1-\mu_0(x,y)\}\}$ при $x \neq y$, упорядоченное по возрастанию. Описываемый алгоритм является пошаговым и сводится к последовательному перебору пар (x,y) в соответствии с порядком, введенным на множестве T. Число классов заранее не задано и неизвестно. Объединение объектов в таксоны производится по принципу близости их между собой. Пусть на k-м шаге имеются уже построенные таксоны $L_1, L_2, \ldots, L_t$, где $L_s \cap L_r = \emptyset$, $s \neq r$ и $\bigcup_{s \leq t} L_s \subseteq M$. Тогда на k-м шаге возможны 5 исходов:

I) каждый объект пары (x,y) входит в один из уже построенных таксонов L_s;

2) пара (x,y) дает начало новому таксону $L_{t+1} = \{x, y\}$;

3) пара (x,y) перестраивает множество построенных таксонов, т.е. для некоторых s и r выполняется $L_s \cup L_r = L_{t+1}$, и после этого $L_s := \emptyset$, $L_r := \emptyset$;

4) пара (x,y) пополняет массив Γ запретных пар в соответствии с правилом:

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \cup (x,y) \Leftrightarrow \mu_0(x\ y) = \min\{\mu_0(x,y),\ 1-\mu_0(x,y)\};$$

5) конец работы алгоритма вследствие выполнения условия $T_k = \emptyset$ либо при невозможности исходов I-3, что может быть при обнаружении на k-м шаге θ-нетранзитивного контура: объекты x_1, x_2, x_3 составляют θ-нетранзитивный контур, если $\mu_0(x_1, x_2) \geq \theta$, $\mu_0(x_2, x_3) \geq \theta$ и $\mu_0(x_1, x_3) \leq 1-\theta$ или $\theta \geq 0{,}5$.

Ниже дано описание алгоритма.

Блок I. Формирование множества $T_k = T_{k-1} \setminus \min T_{k-1}$.

Блок 2. Проверка условия $T_k = \emptyset$. Если ДА, то переход к блоку II.

Блок 3. Вычисление величины $\theta_1^* := \min T_k$.

Блок 4. Вычисление пары (x, y), на которой достигается $\min T_k$.

Блок 5. Проверка условия: $\theta_1^* = \mu_0(x,y)$. Если ДА, то переход к блоку I2.

Блок 6. Проверка условия: $\bigcup_{s \leq t} L_s \{x, y\} = \emptyset$. Если ДА, то переход к блоку I3.

Блок 7. Проверка условия: $\mathrm{card}\ (\bigcup_{s \leq t} L_s \cap \{x,y\}) = 1$. Если НЕТ, то переход к блоку I4.

Блок 8. Фиксация таксона L_r, где содержится x (или y).

Блок 9. Проверка условия: $\Gamma \cap ((z,y) \neq \emptyset$, $z \in L_r$. Если НЕТ, то переход к блоку I9.

Блок IO. Присоединение элемента y (или x) к таксону L_r. Переход к блоку I.

Блок II. Вычисли величины $\theta_1^*: =1-\theta_1^*$. Переход к блоку 20.

Блок I2. Построение массива Γ, $\Gamma := \Gamma \cup (x,y)$. Переход к блоку I.

Блок I3. Построение нового таксона $L_{t+1} = \{x,y\}$. Переход к блоку I.

Блок I4. Проверка условия: $(\exists_r)/\{x,y\} \subseteq L_r$. Если ДА, то переход к блоку I.

Блок I5. Фиксация таксонов, включающих x и y, $x \in L_p$ $y \in L_q$

Блок I6. Проверка условия $\Gamma \cap [(L_p \cdot y) \cup (L_q \cdot x)] = \emptyset$. Если НЕТ, то переход к блоку I9.

Блок I7. Построение таксона $L_{t+1} = L_p \cup L_q$.

Блок I8. $L_p: =\emptyset$, $L_q: =\emptyset$. Переход к блоку I.

Блок I9. Определение величины $\theta_{opt}^*: =\theta_1^*$. Оставшиеся элементы из М произвольно распределяются по построенным таксонам.

Блок 20. КОНЕЦ.

Согласно данному алгоритму в блоке I9 производятся произвольное распределение оставшихся элементов по построенным таксонам. Это происходит из-за того, что в данном месте алгоритм обнаруживает нетранзитивный контур. Возможен и другой вариант таксономии на основе понятия неклассифицируемого объекта. Объект x называется неклассифицируемым, если для некоторых y и z одновременно выполняются условия $\vec{\mu}(x,y) = 1$, $\vec{\mu}(x,z) = 0$. Такой объект можно исключить, тем самым нетранзитивный контур разрушается и классификация может быть продолжена. В этом случае после окончания работы алгоритма получаем, кроме множества таксонов, еще и множество исключенных объектов, что дает повод для версификации данных. В этом варианте качество таксономии неисключенных объектов выше.

Литература

I. ВОРОНИН Ю.А. Введение мер сходства и связи для решения геолого-геофизических задач.-"Докл. АН", I97I, т.I99, № 5, с.I0II-I0I4.

2. ZAHN C.T. Approximating symmetric relations by equivalence relations.-"J.of the Society for Industrial and Applied Mathematics", 1964, v.12, N 4, Dec.

3. МИРКИН Б.Г. Задачи аппроксимации в пространстве отношений и анализ нечисловых признаков. -"Автоматика и телемеханика", I974, № 9, с.5I-6I.

4. МУЧНИК И.Б. Анализ экспериментальных графов. -"Автоматика и телемеханика", I974, № 9, с.62-80.

5. ZADEH L.A. Fuzzy Sets.- "Inform.and Control", 1965, N 8, p.338-353.

6. ROSENFELD A. Fuzzy Graphs.- In Fuzzy sets and their application to cognitive and decision processes. Academic Press,Inc. New York, 1975, p.77-96.

7. YEH R.T., BANG S.Y. Fuzzy Relation, Fuzzy Graphs, and Their Applications to Clustering Analysis.- IN: Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes. Academic Press, Inc. New York, 1975, p.125-150.

Поступила в ред. изд.-отд.
14 сентября 1978 года