АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ.
ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ
(Вычислительные системы)

1978 год Выпуск 77

УДК 519.I

АНАЛИЗ СВОЙСТВ ГИПЕРГРАФОВ И ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ ИХ ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

О.Л.Бандман, В.П.Маркова

Известно [I,2], что для изучения свойств любой комплексной функции, определенной на конечной абелевой группе, можно применять аппарат гармонического анализа. Этот аппарат использовался в некоторых работах [3,4] по теории переключательных функций, где был получен ряд новых результатов. На основании изоморфизма между гиперграфами и булевыми функциями, в статье делается попытка исследовать свойства Фурье-преобразований гиперграфов и графов как их частный случай. На основании известных положений гармонического анализа получены соотношения между Фурье-коэффициентами для гиперграфов и графов некоторых классов.

§I. Фурье-преобразование гиперграфов

Пусть гиперграф $H = \langle X, h'(X) \rangle$ задан множеством вершин $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и функцией $h'(X)$, которая отображает множество всех подмножеств $\{X'_i \subset X\}$ $(i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$ в множество целых неотрицательных чисел N. Подмножества $X'_i \subset X$, для которых $h(\hat{X}_i) \neq 0$, являются ребрами гиперграфа и обозначаются $\hat{X}_i$. Каждому $\hat{X}_i$ поставим в соответствие вектор $X_i = (x_n, \ldots, x_1)$ $(x_j \in \{0, 1\})$ таким образом, что если $x_j \in X'_i$, то $x_j = 1$, в противном случае $x_j = 0$, и пронумеруем все $X' \subset X$ так, чтобы $X_i = (x_n, \ldots, x_1)$ был равен двоичному выражению числа i. Тогда множеству $\{X'_i\}$ будет соответствовать пространство X^n (0,1)-векторов длиной n, и гиперграф будет определяться парой $\langle X, h(x) \rangle$, где $h(X): X^n \to N$. Значение функции $h(X)$ в точке $X_i \in X^n$ равно кратности ребра $\hat{X}_i$. Если $h(X_i) = 0$, то ребра не существует. Если гиперграф $H = \langle X, h(X) \rangle$ не содержит кратных ребер, то $h(X_i) \in \{0, 1\}$, т.е. $h(X)$ – булева функция. Вектор $X_0=(0\ldots0)$ обозначает пустое множество вершин ($\hat{X}_0 = \emptyset$), а значение $h(X_0)=1$ будем понимать как существование ребра, не инцидентного ни одной вершине гиперграфа H.

Таким образом, множество всех гиперграфов без кратных ребер изоморфно множеству булевых функций, и, следовательно, булеву алгебру можно интерпретировать как алгебру гиперграфов и, наоборот, на гиперграфы переносить известные свойства булевых функций.

Множество X^n с операцией покомпонентного сложения по mod_2 векторов X_i представляет собой аддитивную абелеву группу $\hat{X}^n=\langle X^n, \oplus\rangle$ с нулевым элементом X_0. И, следовательно [I,2], функцию $h(X)$ можно представить ортогональным рядом (в частности, рядом Фурье).

Ф у р ь е - п р е о б р а з о в а н и е однозначно отображает вектор функции $h(X)=(h(X_0),\ldots,h(X_{2^n-1}))$ в целочисленную функцию той же длины $h^*(W)=(h^*(W_0),\ldots,h^*(W_{2^n-1}))$, определенную в пространстве W^n, изоморфном X^n. Значение $h^*(W)$ в каждой точке $W_j\in W^n$ называется Ф у р ь е - к о э ф ф и ц и е н т о м и вычисляется по формуле

$$h^*(W_j)=\sum_{X_i\in X^n} h(X_i)(-1)^{X_i\cdot W_j}, \qquad (I)$$

где в степени стоит скалярное произведение векторов X_i и W_j.

Фурье-преобразование симметрично, обратный переход осуществляется по аналогичной формуле

$$h(X_i)=2^{-n}\sum_{W_j\in W^n} h^*(W_j)(-1)^{W_j\cdot X_i} \text{ для всех } X_i\in X^n. \qquad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Множество Фурье-коэффициентов $H^*=\{h^*(W_j)\}$, $j=0,\ldots,2^n-1$, функции $h(X)$ гиперграфа $H=\langle X,h(X)\rangle$ будем называть Ф у р ь е - п р е о б р а з о в а н и е м гиперграфа, или Ф у р ь е - с п е к т р о м.

Теоретико-графовый смысл коэффициента Фурье-преобразования легко выяснить из его формального определения (I). Пространству $W^n=\{W_0,\ldots,W_{2^n-1}\}$ поставим в соответствие множество всевозможных подмножеств вершин $\{\hat{W}_0,\ldots,\hat{W}_{2^n-1}\}$ гиперграфа, при этом будем считать, что $\hat{W}_j$ содержит те вершины w_{j_ν}, для которых в векторе $W_j=(w_{j_n},\ldots,w_{j_1})$ элемент $w_{j_\nu}=1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножество вершин $\hat{W}_j$ будем называть **обобщенной вершиной гиперграфа**.

Выясним теперь смысл коэффициентов $(-1)^{X_i \cdot W_j}$, определяющих знак слагаемого в (I). Для этого введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Ребро $\hat{X}_i$ будем называть **четно-инцидентным** обобщенной вершине $\hat{W}_j$, если $\hat{X}_i$ и $\hat{W}_j$ имеют четное число общих вершин, т.е. $|\hat{X}_i \cap \hat{W}_j|_{mod 2} = 0$, $[X_i \cdot W_j]_{mod 2} = 0$. Соответственно ребро $\hat{X}_i$ будем называть **нечетно-инцидентным** обобщенной вершине $\hat{W}_j$, если $\hat{X}_i$ и $\hat{W}_j$ имеют нечетное число общих вершин, т.е. $|\hat{X}_i \cap \hat{W}_j|_{mod 2} = 1$, $[X_i \cdot W_j]_{mod 2} = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. **Степенью четной инцидентности** (d^0-степенью) обобщенной вершины $\hat{W}_j$ будем называть число четно-инцидентных ей ребер. Соответственно **степенью нечетной инцидентности** (d^1-степенью) обобщенной вершины $\hat{W}_j$ будем называть число нечетно-инцидентных ей ребер.

Рассматривая теперь выражение (I), легко увидеть, что значение Фурье-коэффициента в обобщенной вершине $\hat{W}_j$ равно алгебраической сумме кратностей всех ребер гиперграфа, причем ребра нечетной инцидентности учитываются со знаком "минус", т.е.

$$h^*(W_j) = d^0(W_j) - d^1(W_j)$$

для всех $W_j \in W^n$. Если, кроме того, учесть, что для любой обобщенной вершины $W_j \in W^n$ $d^0(W_j) + d^1(W_j) = m$, где m - число ребер гиперграфа, то Фурье-коэффициент можно выразить через степень инцидентности одного вида

$$h^*(W_j) = m - 2d^1(W_j) = 2d^0(W_j) - m \quad \text{для всех} \quad W_j \in W^n. \qquad (3)$$

§2. Свойства Фурье-преобразования гиперграфов

Поскольку Фурье-преобразование однозначно [I] отображает $h(X) \to h^*(W)$ и обратное преобразование также однозначно, то из (3) вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ I. **Множество степеней нечетной инцидентности** $D = \{d^1(W_j)\}$, $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, **однозначно представляет гиперграф** $H = \langle X, h(X) \rangle$ **от ребрами**.

Из свойств ортогональности [I] Фурье-преобразования непосредственно следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Фурье-преобразование полного гиперграфа $H = \langle X, h(X)\rangle$ ($h(X_i) = 1$ для всех $X_i \in X^n$) равно

$$h^*(W_j) = \begin{cases} 2^n \text{ для } W_j = W_0, \\ 0 \text{ для всех } W_j \in W^n,\ W_j \neq W_0. \end{cases} \qquad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Гиперграф $\bar{H} = \langle X, \bar{h}(X)\rangle$ будем называть дополнением гиперграфа $H = \langle X, h(X)\rangle$ (без кратных ребер), если он имеет все те ребра, которые дополняют $H = \langle X, h(X)\rangle$ до полного гиперграфа. Функция $\bar{h}(X)$ равна булеву отрицанию функции $h(X)$.

Из свойства линейности Фурье-преобразования [I]

$$(\alpha\, h_1(X) + \beta\, h_2(X))^* = \alpha\, h_1^*(W) + \beta\, h_2^*(W) \ ,$$

где α и β - произвольные комплексные числа, и из представления функции $\bar{h}(X)$ через $(1-h(X))$ следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Между коэффициентами Фурье-преобразований гиперграфа $H = \langle X, h(X)\rangle$ (без кратных ребер) и его дополнения $\bar{H} = \langle X, \bar{h}(X)\rangle$ имеют место следующие соотношения:

$$\bar{h}^*(W_j) = \begin{cases} 2^n - h^*(W_0) \text{ для } W_j = W_0, \\ -h^*(W_j) \text{ для всех } W_j \in W^n,\ W_j \neq W_0 . \end{cases} \qquad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Векторы X_i или W_j, содержащие l единиц, будем называть векторами l-го уровня.

Множество векторов l-го уровня будем обозначать через $X^{(l)}$ или $W^{(l)}$. Очевидно, что $|X^{(l)}| = |W^{(l)}| = C_n^l$. Аналогично этому, ребро $\hat{X}_i$ или обобщенную вершину $\hat{W}_j$ будем относить к l-му уровню, если $|\hat{X}_i| = l$ или $|\hat{W}_j| = l$.

Из соотношений (I), (3) и (4) вытекают следующие свойства Фурье-преобразования гиперграфов:

I. Нулевой коэффициент Фурье-преобразования гиперграфа равен числу ребер гиперграфа (следует из (I)): $h^*(W_0) = m$.

2. Все Фурье-коэффициенты гиперграфа имеют одинаковую четность (следует из (3)): $|h^*(w_j)|_{mod\,2} = |h^*(w_i)|_{mod\,2}$ для всех w_j, $w_i \in W^n$.

3. Степень вершины x_ν гиперграфа

$$d(x_\nu) = d^1(w_{2^{\nu-1}}) = \frac{m - h^*(w_{2^{\nu-1}})}{2}, \quad w_{2^{\nu-1}} \in W^{(1)}.$$

4. Число ребер нечетной инцидентности гиперграфа

$$|D^1(H)| = d^1(w_{2^n-1}) = \frac{m - h^*(w_{2^n-1})}{2}.$$

<u>Пример I</u>. Гиперграф $H_1 = \{0,1,2,3,10,12,16,17,18,19,20\}$ (рис.I) задан множеством ребер, т.е. $\{\hat{X}_i : h(X_i) = 1\}$.

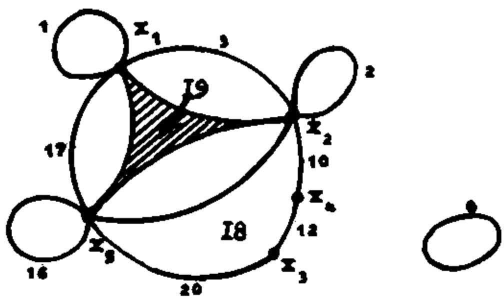


Рис.I. Гиперграф H_1 ($n = 5$, $m = 11$).

Фурье-спектр H_1^* зададим матрицей, в которой наборам значений $(w_3w_2w_1)$ соответствуют столбцы, а наборам значений (w_5w_4) – строки, т.е.

$H_1^* =$

w_5w_4 \ $w_3w_2w_1$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	11	3	1	1	7	1	-3	-3
01	7	-1	1	1	7	-1	1	1
10	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
11	-3	-3	-1	-1	1	1	3	3

Рассмотрим обобщенную вершину $\hat{W}_j = \{x_4, x_1\}$, т.е. $W_j = (01001)$, $j = 9$. Нечетно-инцидентными ребрами для этой вершины будут $\{1,3,10,12,17,19\}$, четно-инцидентными – $\{0,2,16,18,20\}$; $d^1(W_9) = 6$, $d^0(W_9) = 5$, $h^*(W_9) = -1$.

Число ребер m гиперграфа равно 11, так как $m = h^*(W_0)$. Числа ребер нечетной и четной инцидентностей соответственно будут: $|D^1| = \dfrac{m - h^*(W_{11})}{2} = 4$, $|D^0| = m - |D^1| = 7$. Степень вершины x_2 будет $d(x_2) = \dfrac{m - h^*(W_2)}{2} = 5$.

§3. Фурье-преобразования изоморфных гиперграфов

Два гиперграфа $H_1 = \langle X, h_1(X)\rangle$ и $H_2 = \langle X, h_2(X)\rangle$ называются изоморфными, если существует матрица подстановок P порядка $[n \times n]$ ($p_{ij} \in \{0,1\}$, $\det P = 1$, $P^{-1} = P^t$) такая, что

$$h_1(X_i) = h_2(X_i P) \quad \text{для всех} \quad X_i \in X^n . \tag{6}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть среди C_n^l обобщенных вершин l-го уровня $\alpha_1^{(l)}$ имеют d^1-степени, равные d_1^1, $\alpha_2^{(l)}$ – d^1-степени, равные d_2^1, и т.д. Тогда множество $D^{(l)} = \{\alpha_1^{(l)}(d_1^1), \ldots, \alpha_q^{(l)}(d_q^1)\}$ такое, что $\sum_{p=1}^{q} \alpha_p^{(l)} = C_n^l$ будем называть d^1-набором l-го уровня.

ТЕОРЕМА 1. Изоморфные гиперграфы $H_1 = \langle X, h_1(X)\rangle$ и $H_2 = \langle X, h_2(X)\rangle$ имеют равные d^1-наборы на каждом l-м уровне, т.е.

$$H_1 \sim H_2 \Rightarrow D^{(l)}(H_1) = D^{(l)}(H_2)$$

для всех $l = 0,\ldots,n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H_1 \sim H_2$, т.е. справедливо (6). Обозначим $X_i \cdot P$ через X_i'. Тогда, поскольку $P^{-1} = P^t$, имеем

$$X_i = X_i' \cdot P^t . \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (1) и суммируя по X_i', получим

$$h_1^*(W_j) = \sum_{X_i \in X^n} h_1(X_i)(-1)^{X_i \cdot W_j} = \sum_{X_i' \in X^n} h_2(X_i')(-1)^{X_i' P^t W_j} = h_2^*(W_j') .$$

где $W'_j = P^t W_j$.

Поскольку умножение (0,I)-вектора W_j на матрицу подстановок не меняет в нем количества единиц, векторы W_j и W'_j принадлежат одному и тому же уровню. Следовательно, применение любой подстановки на вершинах гиперграфа не изменяет его фурье-коэффициентов, а только переставляет их местами в пределах того же уровня.

<u>Пример 2.</u> Гиперграф $H_2 = \{0,3,4,5,6,8,12,16,20,24,28\}$ (рис.2) изоморфен H_1 (рис.I), причем

$$P = \begin{array}{c|ccccc|c} & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & \\ \hline & 1 & & & & & x_5 \\ & & & & & 1 & x_4 \\ & & & & 1 & & x_3 \\ & & 1 & & & & x_2 \\ & & & 1 & & & x_1 \\ \hline \end{array}$$

Легко проверить, что наборы d^t-степеней обобщенных вершин на всех уровнях у обоих гиперграфов одинаковы (см. таблицу).

Т а б л и ц а

l	$D^{(l)}=\{\alpha_p^{(l)}(d_p^l)\}$
0	{1(11)}
1	{2(2), 1(4), 2(5)}
2	{3(-1), 3(-1), 3(1), 1(7)}
3	{2(-3), 4(-1), 4(1)}
4	{2(-1), 2(1), 1(3)}
5	{1(3)}

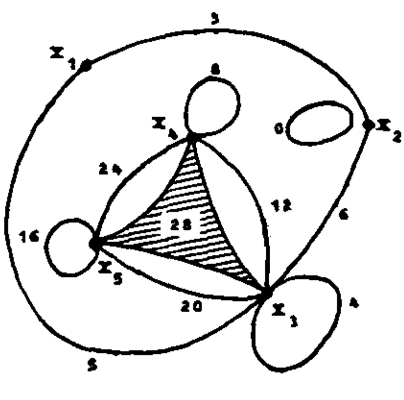


Рис.2. Гиперграф H_2, изоморфный H_1.

§4. Фурье-преобразования гиперграфов, содержащих полные и пустые подгиперграфы

Пусть в гиперграфе (без кратных ребер) $H = \langle X, h(X)\rangle$ содержится полный подгиперграф $H_0' = \langle X', h_0'(X)\rangle$, где $X' \subset X, X' = \{x_{m_k}, \ldots, x_{m_1}\}$, $m_g \in \{1, \ldots, n\}$, т.е. $h_0'(X_i) = 1$ для всех ребер $\hat{X}_i$, у которых все инцидентные им вершины принадлежат X'.

Пусть X' соответствует вектору X_b, компоненты которого определяются следующим образом:

$$x_{b_\nu} = \begin{cases} 1, \text{ если } x_\nu \in X', \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Примем, что $h(X_0) = 1$, и тогда функция $h(X_i) = 1$ во всех точках подпространства $V_b = \{X_i : X_i \le X_b\}$[ж)], которое представляет собой k-мерный подкуб, образованный подмножеством переменных X'.

Рассматривая $h(X)$ как булеву функцию, наличие полного подгиперграфа $H_0' = \langle X', h_0(X)\rangle$ мы будем интерпретировать как существование импликанты k-й размерности $K(X) = \bar{x}_{m_n} \ldots \bar{x}_{m_{n-k}}$, $m_g \in \{1, \ldots, n\}$, в которой свободными переменными являются $x_\nu \in X'$, а связанными – $x_\nu \in X''$, где $X'' = X \setminus X'$.

Подпространство $V_b = \{X_i : X_i \le X_b\}$ с операцией "сложение по mod2" – аддитивная подгруппа порядка 2^k ($X_0 \in V_b$, $V_b \subset X^n$). Согласно теореме о характерах фактор-группы [1], V_b в области Фурье-преобразования отображается на множество векторов $V_{\bar{b}} = \{W_j : W_j \le W_{\bar{b}}\}$, где вектор $W_{\bar{b}}$ является инверсным к вектору X_b. Подпространство $V_{\bar{b}}$ называется **нуль-пространством** для V_b и содержит все те векторы W_j, для которых $X_i \cdot W_j = 0$ для всех $X_i \in V_b$.

Соотношение между значениями $h(X_i)$, $X_i \in V_b$, и $h^*(W_j)$, $W_j \in V_{\bar{b}}$, определяет

ТЕОРЕМА ПУАССОНА [3]. **Для любого подпространства V_b пространства X^n и любой вещественной функции $h(X)$**

$$\sum_{X_i \in V_b} h(X_i) = 2^{k-n} \sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} h^*(W_j),$$

где $k = |X_b|$.

Из этой теоремы непосредственно следует, что если функция постоянная на V_b ($h(X_i) = c$ для всех $X_i \in V_b$), то $\sum_{X_i \in V_b} h(X_i) = c2^k$

ж) Знак "$\le$" обозначает покомпонентное сравнение векторов.

и, следовательно,

$$\sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} h^*(W_j) = c2^n . \tag{8}$$

Значение $h(X_0)$ не меняет собственно гиперграфа, и поэтому выбор его в значительной мере произволен. Однако значения Фурье-коэффициентов при $h(X_0)=1$ и $h(X_0)=0$ различны:

$$h^*(W_j)_{h(X_0)=1} = h^*(W_j)_{h(X_0)=0} + 1 \quad \text{для всех } W_j \in W^n .$$

Поэтому условие (8) при определении полных и пустых подгиперграфов ($c=1$ и $c=0$) соответственно изменится на величину 2^{n-k}.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Гиперграф $H=\langle X, h(X)\rangle$ содержит полный подгиперграф на подмножестве вершин X', если для коэффициентов его Фурье-преобразования H^* справедливы соотношения:

$$\sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} h^*(W_j) = \begin{cases} 2^n, \text{если } h(X_0) = 1, \\ 2^n - 2^{n-k}, \text{если } h(X_0) = 0 . \end{cases} \tag{9}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Гиперграф $H=\langle X, h(X)\rangle$ содержит пустой подгиперграф (состоящий из изолированных вершин) на подмножестве вершин X', если для коэффициентов его Фурье-преобразования H^* справедливы соотношения:

$$\sum_{W_j \in V_{\bar{b}}} h^*(W_j) = \begin{cases} 2^{n-k}, \text{ если } h(X_0) = 1, \\ 0, \quad \text{если } h(X_0) = 0 . \end{cases} \tag{10}$$

Используя теорему Пуассона, можно определить клики гиперграфа, проверяя справедливость соотношения (8) для подпространств $V_{\bar{b}}$, начиная с l-го уровня, где l – наименьшее число, для которого $2^{n-l} \le h^*(W_0)$.

<u>Пример 3</u>. Гиперграф H_1 (рис.1) имеет клику на подмножестве вершин $X'=\{x_5, x_2, x_1\}$, определяемом вектором $X_b=(10011)$, $V_b=\{X_i : X_i \le 10011\}$, $V_{\bar{b}}=\{W_j : W_j \le 01100\}$. Действительно,

$$\sum_{W_j\in V_{\bar b}} h^*(W_j) = h^*(00000) + h^*(01000) + h^*(00100) + h^*(01100) = 32.$$

Этот гиперграф H_1 имеет пустые подгиперграфы на подмножествах вершин $\{x_3\}$ и $\{x_4\}$. Нуль-пространства для них соответственно равны $V_{\bar b}=(W_j:\ W_j\le IIOII)$ и $V_{\bar b}=(W_j:\ W_j\le IOIII)$, т.е. первые четыре столбца и первая и третья строки матрицы из примера I. Суммируя спектральные коэффициенты для этих нуль-пространств, убеждаемся, что в обоих случаях их суммы равны I6.

§5. Фурье-преобразование ущербных гиперграфов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Ущербным гиперграфом $H'=\langle X', h'(X)\rangle$ будем называть гиперграф, полученный удалением из $H=\langle X, h(X)\rangle$ подмножества вершин $X''=X\setminus X'$ и всех инцидентных им ребер.

Удаление ребер из гиперграфа $H=\langle X, h(X)\rangle$ эквивалентно присвоению функции $h(X)$ нулевых значений в тех точках $X_i\in X''$, которые соответствуют удаленным ребрам, т.е. в которых хотя бы одна переменная $x_\nu\in X''$ равна I. В терминах булевых функций это равносильно умножению $h(X)$ на функцию $\varphi(X)=\underset{x_\nu\in X''}{\&}\bar{x}_\nu$, которая является импликантой на подпространстве $V_b=(X_i:\ X_i\le X_b)$, т.е. $h'(X_i) = h(X_i)\cdot\varphi(X_i)$ для всех $X_i\in X''$.

Как известно [4], Фурье-преобразование произведения двух функций равно свертке их преобразований:

$$(h'(X)\cdot\varphi(X))^* = 2^{-n}\sum_{W_j\in W^n}\varphi^*(W_j)\cdot h^*(W_j\oplus\tau_p) \quad \text{для всех } \tau_p\in W^n. \qquad (II)$$

В [3] показано, что если $\varphi(X_i)=I$ для всех $X_i\in V_b$, где V_b – множество элементов подгруппы Y_a, то

$$\varphi^*(W_j) = \begin{cases} 2^k & \text{для всех } W_j\in V_{\bar b}\ , \\ 0 & \text{для всех } W_j\notin V_{\bar b}\ . \end{cases} \qquad (I2)$$

Из (I2) видно, что спектральные коэффициенты импликанты $\varphi(X)$ отличны от нуля и равны 2^k, $k=|X_b|$, только на векторах из нуль-пространства $V_{\bar b}$.

Подставляя значение $\varphi^*(W_j)$ в (II), получим Фурье-коэффициенты ущербного гиперграфа $H'=\langle X', h'(X)\rangle$

$$h'^*(\tau_p) = 2^{k-n} \sum_{w_j \in V_{\bar b}} h^*(w_j \oplus \tau_p) \text{ для всех } \tau_p \in W^n . \qquad (13)$$

Для ущербных гиперграфов, полученных удалением только одной вершины $x_\nu \in X$ и инцидентных ей ребер, $\varphi(X) = \bar x_\nu$. Согласно (12),

$$\varphi^*(w_j) = \begin{cases} 2^{n-1} \text{ для всех } w_j \in V_{\bar b}, \ \bar b = e_\nu , \\ 0 \text{ для всех } w_j \notin V_b , \end{cases}$$

где $e_\nu = (0...1...0)$ – базисный вектор. Тогда

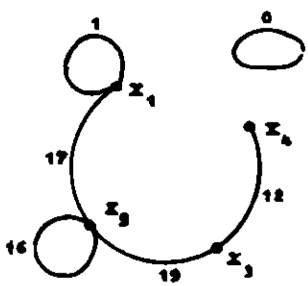
$$h'^*(\tau_p) = \frac{1}{2}\left(h^*(\tau_p) + h^*(\tau_p \oplus e_\nu)\right) \text{ для всех } \tau_p \in W^n .$$

Пример 4. Удалим из гиперграфа H_1 (рис.1) вершину x_2, т.е. $X'' = \{x_2\}$, $X' = \{x_5, x_4, x_3, x_1\}$. $e_\nu = (00010)$. Подпространство $V_{\bar b} = \{w_j : w_j \le 11101\}$, ему соответствуют первый, второй, пятый и шестой столбцы матрицы из примера 1. Коэффициенты $h^*(\tau_p)$ подсчитываем как $\frac{1}{2}(m_{ij} + m_{i(j+2)})$, где m_{ij} – значение коэффициента в таблице в i-й строке и j-м столбце:

$H'^* =$

w_5w_4 \ w_3w_1	00	01	10	11
00	6	2	2	-2
01	4	0	4	0
10	0	0	0	0
11	-2	-2	2	2

Взяв обратное преобразование по (2), получим функцию $h'(X)$ ущербного гиперграфа $H'_1 = \langle X'_1, h'(X) \rangle$ (рис.3):



$h' =$

x_5x_4 \ x_3x_1	00	01	10	11
00	1	1	0	0
01	0	0	1	0
10	1	1	1	0
11	0	0	0	0

Рис. 3. Ущербный гиперграф H_1^1 .

§6. Фурье-преобразование графов

Неориентированный граф $b = \langle X, g(X) \rangle$ без петель (в дальнейшем просто граф) будем рассматривать как частный случай гиперграфа, у которого функция $g(X)$ на всех уровнях, кроме $X^{(2)}$, равна нулю. Степень нечетной инцидентности обобщенной вершины $\widehat{W}_j$ графа равна числу ребер в разрезе, выделяющем подмножество $\widehat{W}_j \subset \widehat{W}^n$. Однозначность преобразования подтверждается известным фактом о том, что множество разрезов графа является его представлением. Поскольку d^1-степени обобщенных вершин $\widehat{W}_j$ и $\widehat{W}_{2^n-1-j}$ равны одному и тому же разрезу, то для представления графа достаточно половины его спектра, т.е. $G^* = \{g^*(W_0), \ldots, g^*(W_{2^{n-1}-1})\}$ (полуспектр графа) полностью представляет граф $G = \langle X, g(X) \rangle$.

Все приведенные в предыдущих параграфах утверждения и теоремы полностью переносятся на графы, кроме утверждения 4, поскольку наличие полного графа не соответствует постоянному (равному единице) значению функции $g(X)$ на подгруппе группы X^n.

С другой стороны, Фурье-преобразование графа определяет некоторые его характеристики, которые для гиперграфов подобным путем не могут быть выявлены.

§7. Фурье-преобразования несвязных графов и графов с точками сочленений

ТЕОРЕМА 2. Граф $G = \langle X, g(X) \rangle$ с m ребрами имеет k компонент связности $\{G_l = \langle \widehat{X}_l, g_l(X) \rangle\}$, $l = 1, \ldots, k$, тогда и только тогда, когда $g^*(W_j) = m$ для всех $W_j \in U^k$, где $U^k \subset W^n$, и является подгруппой $\widehat{U}^k = \langle U^k, \oplus \rangle$ группы X^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обобщенные вершины $\widehat{W}_j : W_j \in U^k$ являются объединением подмножеств вершин компонент связности, и поэтому d^1-степени (разрезы) этих вершин равны нулю. Следовательно, согласно (5), $g^*(W_j) = m$ для всех $W_j \in U^k$.

Обратное тоже верно, поскольку $g^*(W_j) = m$ только в том случае, если обобщенная вершина $\widehat{W}_j$ является объединением подмножеств вершин $\widehat{X}_l$, т.е. $W_j \in U^k$.

Из теоремы следует, что граф G имеет k компонент связности, если 2^{k-1} коэффициентов его полуспектра $G^* = \{g^*(W_0), \ldots, g^*(W_{2^{n-1}-1})\}$

равны m. Если все $\hat{W}_j$, $j \neq 0$, для которых $g^*(W_j) = m$, упорядочить так, что $|\hat{W}_{j1}| \leq |\hat{W}_{j2}| \leq \ldots$, то первые k подмножеств $\{\hat{W}_{j1}, \ldots, \hat{W}_{jk}\}$ определят подмножества вершин компонент связности.

Кроме того, из теоремы 2 непосредственно вытекают следующие свойства.

1. Если граф имеет изолированную вершину $x_\nu \in X$, то $g^*(W_0) = g^*(e_\nu) = m$, $e_\nu \in W^{(1)}$.

2. Если граф имеет висячую вершину $x_\nu \in X$, то $g^*(W_0) = m - 2$, $e_\nu \in W^{(1)}$.

3. Если граф имеет точку сочленения в вершине $x_\nu \in X$, то ее удаление приводит к появлению в спектре графа коэффициентов, равных m.

4. Если граф имеет мост (x_ν, x_μ), $x_\nu, x_\mu \in X$, то $g^*(W_j) = g^*(W_k) = m-2$, $x_\nu \in \hat{W}_j$, $x_\mu \in \hat{W}_k$, удаление из графа любой из вершин x_ν или x_μ приводит к появлению коэффициентов, равных m.

<u>Пример 5.</u> Пусть задан граф $G_1 = \{3, 6, 10, 12, 18, 20, 24, 33, 34\}$ (рис.4). Его полуспектр G_1^* представлен следующей матрицей:

$G_1^* =$

$w_5 w_4$ \ $w_3 w_2 w_1$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	9	5	-1	-1	3	-1	-3	3
01	3	-1	-3	-3	3	-3	-3	-1
10	3	-3	-3	-1	1	-3	-1	-1
11	1	-3	-1	-1	3	-1	5	5

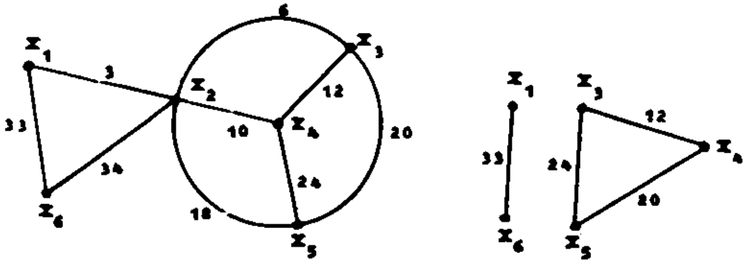


Рис.4. Граф G_1 ($n = 6$, $m = 9$) и ущербный граф G_1'.

Коэффициенты полуспектра ущербного графа $G_1' = \langle X', g_1'(X)\rangle$ полученного из $G_1 = \langle X, g(X)\rangle$ удалением вершины x_2 определяем по (13), причем при вычислении учитываем только первый, второй, пятый и шестой столбцы матрицы G_1^* :

$$G_1'^* = \begin{array}{c|cccc} {}_{w_5w_4}\diagdown^{w_3w_1} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \hline 00 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 01 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 11 & 0 & -2 & 4 & 2 \end{array}$$

Из полуспектра $G_1'^*$ видно, что $G_1' = \langle X', g_1'(X)\rangle$ имеет две компоненты связности, причем $U^k = \{00000,\ 01110,\ 10001,\ 11111\}$. Следовательно, обобщенные вершины $\hat{w}_j = 01110$ и $\hat{w}_j = 10001$ определяют подмножества вершин компонент связности $\{x_6, x_1\}$ и $\{x_5, x_4, x_3\}$.

§8. Фурье-преобразования графа, содержащего полные и пустые подграфы

Пусть $G_0 = \langle X, g_0(X)\rangle$ – полный граф, т.е. $g_0(X_i) = 1$ для всех $X_i \in X^{(2)}$. Из (1) или анализа разрезов полного графа вытекает, что

$$g_0^*(w_j) = \begin{cases} c_n^2 \text{ для } w_j = w_0, \\ c_n^2 - 2l(n-l) \text{ для всех } w_j \in W^{(l)},\ l = 1,\dots,n. \end{cases} \qquad (14)$$

Существование полного подграфа $G_0' = \langle X', g_0'(X)\rangle$, $X' \subset X$, устанавливает следующая

ТЕОРЕМА 3. Граф $G = \langle X, g(X)\rangle$ содержит полный подграф на подмножестве вершин X' тогда и только тогда, когда для коэффициентов его Фурье-преобразования справедливо соотношение

$$\sum_{w_j \in V_Б} g^*(w_j) = C_n^2 + \sum_{l=1}^{n-k} C_{n-k}^l [C_n^2 - 2l(n-l)], \qquad (15)$$

где $V_Б$ – нуль-пространство для $V_b = \{X_i : X_i \le X_b\}$, $\hat{X}_b = X'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение гиперграф $H = \langle X, h(X)\rangle$, образованный объединением графа $G = \langle X, g(X)\rangle$ и гиперграфа $H_0 = \langle X, h_0(X)\rangle$, который является дополнением к полному графу $G_0 = \langle X, g_0(X)\rangle$, т.е. $H = G \cup H_0$. Функция $h(X)$ полученного гиперграфа $h(X_i) = g(X_i) + h_0(X_i)$ для всех $X_i \in X^n$ останется булевой, поскольку пересечение G и H_0 по ребрам пусто, т.е. $h_0(X_i) \cap g(X_i) = \emptyset$ для всех $X_i \in X^n$.

Согласно свойству линейности Фурье-преобразования, имеем

$$h^*(W_j) = h_0^*(W_j) + g^*(W_j) \text{ для всех } X_i \in X^n . \tag{16}$$

Коэффициенты $h_0^*(W_j)$ из (16) на основании утверждения 3 и (9) и в силу $h_0(X) = \bar{g}_0(X)$, равны

$$h_0^*(W_j) = \begin{cases} 2^n - C_n^2 & \text{для } W_j = W_0, \\ 2l(n-1) - C_n^2 & \text{для всех } W_j \in W^{(l)},\ l = 1, \ldots, n . \end{cases} \tag{17}$$

Очевидно, что в гиперграфе $H = \langle X, h(X)\rangle$ содержится полный подгиперграф $H_0' = \langle X', h_0'(X)\rangle$ тогда и только тогда, когда в графе $G = \langle X, g(X)\rangle$ содержится полный подграф $G_0' = \langle X', g_0'(X)\rangle$. Это следует из того, что в $H = \langle X, h(X)\rangle$ до полного подгиперграфа $H_0' = \langle X', h_0'(X)\rangle$ может не хватать ребер только из-за отсутствия их в графе $G = \langle X, g(X)\rangle$, так как функция $h'(X)$ равна нулю для всех $X_i \in X^n$, кроме $X_i \in X''$.

Таким образом, в существовании полного подграфа можно убедиться, проверив справедливость условия утверждения 3, а именно подставив (16), выразив $h_0^*(W_j)$ через (17), в (10) и объединив суммы по всем уровням:

$$2^n - C_n^2 + \sum_{l=1}^{n-k} C_{n-k}^l [2l(n-1) - C_n^2] + \sum_{W_j \in V_Б} g^*(W_j) = 2^n ,$$

откуда следует условие (15).

<u>Пример 6.</u> Граф G_1 (рис.4) имеет полный подграф на подмножестве вершин $X' = \{x_5, x_4, x_3, x_2\}$; $X_Б = 011110$, $V_Б = \{000000, 000001, 100000, 100001\}$. Правая часть условия (15) ($n = 6$, $k = 4$) равна $15 + 2(15-2\cdot5) + (15-4\cdot4) = 24$, левую часть условия получаем, суммируя коэффициенты из полуспектра $G_1'^*$, приведенного в примере 5, учитывая их симметричность, $\sum_{W_j \in V_Б} g^*(W_j) = 9 + 5 + 5 + 5 = 24$.

Для определения существования пустого подграфа справедливо условие (10). Им можно пользоваться для проверки графа на двудольность. Очевидно, что граф является двудольным тогда и только тогда, когда множество его вершин X можно разбить на два непересекающихся подмножества X' и X'' такие, что подграфы $G' = \langle X', g'(X)\rangle$ и $G'' = \langle X'', g''(X)\rangle$ оба являются пустыми. На таком определении двудольности графов основывается следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Граф $G = \langle X, g(X)\rangle$ является двудольным графом, разбивающим множество X на два подмножества X' и X'', $X' \cap X'' = \emptyset$, тогда и только тогда, когда для коэффициентов его Фурье-преобразования G^* справедливо соотношение

$$\sum_{w_j \in V_b} g^*(w_j) = \sum_{w_j \in V_{\bar b}} g^*(w_j) = 0 \;, \qquad (18)$$

где $V_b = \{ w_j : w_j \le w_b\}$, $\hat{w}_b = X'$, $V_{\bar b} = \{ w_j : w_j \le w_{\bar b}\}$, $\hat{w}_{\bar b} = X''$.

Пример 7. Проверим граф $G_2 = \{9, 10, 12, 17, 18, 20, 33, 34, 36\}$ (рис.5) на двудольность. Полуспектр $G_2'^*$ задан следующей таблицей

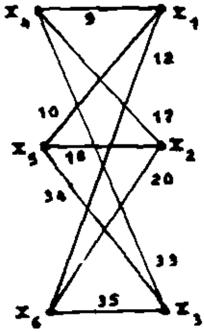


Рис. 5. Граф G_2 ($n = 6, m = 9$)

$G_2'^* =$

$w_5 w_4$ \ $w_3 w_2 w_1$	000	001	010	011	100	101	110	111
00	9	3	3	-3	3	-3	-3	-9
01	3	1	1	-1	1	-1	-1	-1
10	3	1	1	-1	1	-1	-1	-1
11	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-3

Выделим из множества вершин $X = \{x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1\}$ подмножество $X' = (x_3, x_2, x_1)$; $x_b = 000111$, $x_{\bar b} = 111000$. Суммы спектральных коэффициентов по нуль-пространствам V_b и $V_{\bar b}$ из (18) равны сумме элементов первой строки таблицы, вследствие симметричности коэффициентов Фурье-преобразования графа, т.е.

$$\sum_{w_j \in V_b} g^*(w_j) = \sum_{w_j \in V_{\bar b}} g^*(w_j) = 9+3+3-3+3-3-3-9 = 0 .$$

Следовательно, граф G_2 (рис.5) двудольный, причем $X'' = \{x_6, x_5, x_4\}$.

Заключение

Выявленные в статье свойства Фурье-преобразования графов и гиперграфов далеко не исчерпывают всех возможностей аппарата гармонического анализа на конечных абелевых группах. Они в основном непосредственно вытекают из известных положений теории Фурье-преобразований. Однако авторы надеются, что этого достаточно, чтобы сделать вывод о целесообразности использования данного аппарата как в области теории гиперграфов и графов, так и для разработки эффективных алгоритмов их анализа в приложениях.

Литература

I. ЛЮМИС Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. М., ИЛ., I956.

2. RUDIN W. Fourier analysis on groups. N.Y.-London,1962.

3. LECHNER R.I. Harmonic Analysis of Switching Functions. - In: Recent Development in Switching Theory. Ed.A.Mukhopadhyay.N.Y. -London,1971, p.122-230

4. КАРПОВСКИЙ М.Г., МОСКАЛЕВ Э.С. Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. Л., "Энергия", I973.

Поступила в ред.-изд.отд.
I0 октября I978 года