АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ.
ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 77

УДК 519.17

МАТРИЦЫ СЛОЕВ И ИЗОМЕТРИЧНОСТЬ ГРАФОВ

В.А. Скоробогатов

В работе Г.Чартранда и Дж.Стюарта [1] рассматриваются изометрические графы и некоторые их свойства.

В настоящей работе получена характеризация изометрических графов в терминах матриц слоев графов, которые рассматривались в [2].

Общепринятые обозначения совпадают с обозначениями из [3].

Будем рассматривать связные неографы без петель и кратных ребер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $V_0 \subseteq V$, $V_i(V_0)$ – множество вершин, находящихся на расстоянии i от V_0. Упорядоченное разбиение $\hat{V}(V_0) = \{V_i \mid i=\overline{0,k}\}$, $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$; $\bigcup\limits_{i=0}^{k} V_i = V$, назовем относительным разбиением по отношению к V_0. Множество $V_i(V_0)$ назовем i-слоем графа по отношению к V_0; иногда подграф $G_i(V_0, E)$ будем также называть i-слоем G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Матрица $\lambda_n(G)$ слоев графа G определяется как $\lambda_n(G) = \| a_{ij} \|$, $i=1,2,\dots,C_p^n$, $j = 1,2,\dots,d(G)$, где $a_{ij} = |V_{ij}|$ – мощность слоя V_{ij}, т.е. число вершин, лежащих на расстоянии j от i-го подмножества вершин графа. Если $V_{ij} = \emptyset$, то $a_{ij} = 0$. Число ненулевых элементов в строке $\lambda_n(G)$ назовем длиной строки. Элементы a_{ij} будем также называть компонентами i-строки.

При $n=1$ будем говорить о $\lambda_1(G)$-матрице, иногда будем такую матрицу называть единичной λ-матрицей и обозначать ее $\lambda(G)$.

Строки в $\lambda(G)$ будем называть по именам вершин: например, для вершины $v \in V(G)$ соответствующая строка в $\lambda(G)$ будет называться v-строкой и обозначаться $\lambda_G(v)$. Пусть $A_n(G) \subseteq \lambda_n(G)$, где $A_n(G)$ – множество всех различных строк матрицы $\lambda_n(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Множество $\Lambda_s(G)$ будем называть 1_s-спектром графа G или просто 1-спектром при s = 1.

Согласно [I] изометрические графы определяются следующим образом. Пусть $|V(G)| = |V(H)|$. Обозначим через $G\sim>H$ отношение: граф H изометричен из G, и, соответственно, если графы G и H изометричны один из другого, то будем пользоваться следующим обозначением: $G<\sim>H \Leftrightarrow (G\sim>H) \& (H\sim>G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [I].

$$G\sim>H \Leftrightarrow \forall v\in V(G) \exists \varphi_v : V(G) \xrightarrow{\text{на}} V(H) \mid$$

$$\mid \forall u\in V(G)\ d(u,v)=d(\varphi_v u, \varphi_v v),\ \varphi_v u, \varphi_v v \in V(H),$$

где φ_v – однозначное соответствие V(G) на V(H).

Пусть $\Lambda_1(G)$ и $\Lambda_1(H)$ – спектры графов G и H.

ЛЕММА. Если $\lambda_G(v)\in\Lambda_1(G)$, $\lambda_H(w)\in\Lambda_1(H)$ и $\lambda_G(v) = \lambda_H(w)$, то для $v\in V(G)$ существует отображение φ_v: V(G) на V(H), при котором $\varphi_v v=w$ и для всех $u\in V(G)$

$$d_G(u,v) = d_H(\varphi_v u, \varphi_v v) = d_H(\varphi_v u, w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства строк $\lambda_G(v)=\lambda_H(w)$ следует, что существует однозначное отображение (на самом деле взаимно-однозначное) $\varphi_v = \{\varphi_{v_j} \mid j=\overline{1,k}\}$, $\varphi_{v_j} = V_j(v) \to V_j(w)$, $\varphi_{v_0} = v\to w$, где $V_i(r)$ есть i-й слой из $\hat{R}(r)$, $R\in\{G,H\}$ и $r\in\{v, w\}$, так как $\forall_i |V_i(v)| = |V_i(w)|$.

Теперь покажем, что выполняется условие равенства расстояний для всех i при $V_i(v) \to V_i(w)$.

Пусть u, s – произвольные вершины такие, что $u\in V_i(v)$, $s\in V_i(w)$, и пусть $\varphi_v u = s$, тогда, очевидно, для любого i $(1\le i\le k)$ $d(u,v) = d(s, w) = i$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА.

$$\Lambda_1(G) = \Lambda_1(H) \Leftrightarrow G<\sim>H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость условия $\Lambda_1(G) = \Lambda_1(H) \Rightarrow G<\sim>H$ непосредственно следует из леммы, поскольку для каждой $\lambda_G(v)$ существует $\lambda_H(u)$ такая, что $\lambda_G(v) = \lambda_H(u)$, и наоборот.

Покажем, что $G<\sim>H \Rightarrow \Lambda(G) = \Lambda(H)$. Для этого предположим обратное, пусть $G<\sim>H$, но $\Lambda_1(G) \ne \Lambda_1(H)$. Здесь заметим, что из определения 3 следует, что в $\lambda_1(G) - \Lambda_1(G)$ содержатся строки, которые уже есть в $\Lambda_1(G)$.

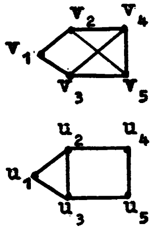
Рассмотрим случаи, которые следуют из неравенства спектров. Неравенство спектров означает, что хотя бы в одном из них содержится уникальная строка, пусть, для определенности, это $d_G(v)$. Тогда для всех $w \in V(H)$, $d_H(w) \neq d_G(v)$, строки могут различаться
а) только соответствующими компонентами (не менее чем двумя),
б) длиной и соответствующими компонентами.

В случае "а" $\varphi_{v_j} \in \varphi_v$, соответствующие не равным компонентам, неоднозначны хотя бы в одну сторону, так как мощности соответствующих слоев различны. Отсюда следует, что либо $G \not\rightarrow H$, либо $H \not\rightarrow G$. Откуда следует, что $G \not\leftrightarrow H$. Противоречие.

Случай "б" сводится к "а", так как различие строк по длине можно рассматривать как различие в соответствующих компонентах.

Из теоремы следует, что изометрические графы могут иметь различные λ_1-матрицы, но для каждой строки из $\lambda_1(G)$ должна быть равная ей строка из $\lambda_1(H)$, и наоборот. Таким образом, получена характеризация изометрических графов через 1-спектры.

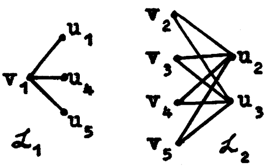
ПРИМЕР. На рис.I приведены графы G и H, для которых $\Lambda_1(G) = \Lambda_1(H)$, $\lambda_1(G) \neq \lambda_1(H)$.



$$\lambda_1(G) = \left\| \begin{array}{c|c} v_1 & 122 \\ v_2 & 131 \\ v_3 & 131 \\ v_4 & 131 \\ v_5 & 131 \end{array} \right\|; \quad \lambda_1(H) = \left\| \begin{array}{c|c} u_1 & 122 \\ u_2 & 131 \\ u_3 & 131 \\ u_4 & 122 \\ u_5 & 122 \end{array} \right\|; \quad \Lambda_1(G) = \Lambda_1(H) = \left\| \begin{array}{c} 122 \\ 131 \end{array} \right\|.$$

Рис. I

Можно было бы привести все возможные подстановки. Для этого достаточно построить все относительные одновершинные разбиения, учитывая их соответствия, определяемые матрицами слоев. Легко видеть, что это соответствие задается двудольным графом $\mathcal{L}$ (рис.2).



$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$$

Рис. 2

Отсюда можно получить множество подстановок для компоненты $\mathcal{L}_1$:

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 v_3 & v_4 v_5 \\ u_1 & u_2 u_3 & u_4 u_5 \\ u_1 & u_3 u_2 & u_4 u_5 \\ u_1 & u_2 u_3 & u_5 u_4 \\ u_1 & u_3 u_2 & u_5 u_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 v_3 & v_4 v_5 \\ u_5 & u_3 u_4 & u_1 u_2 \\ u_5 & u_4 u_3 & u_1 u_2 \\ u_5 & u_3 u_4 & u_2 u_1 \\ u_5 & u_4 u_3 & u_2 u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 v_3 & v_4 v_5 \\ u_4 & u_5 u_2 & u_3 u_1 \\ u_4 & u_2 u_5 & u_3 u_1 \\ u_4 & u_5 u_2 & u_1 u_3 \\ u_4 & u_2 u_5 & u_1 u_3 \end{pmatrix}$$

Аналогично можно выписать все остальные подстановки. Мы не будем этого делать, так как для данного примера их число равно 60.

Покажем, как в общем случае определить число таких подстановок. Для этого обозначим через $\alpha_i(G)$ кратность i-й строки из $\Lambda_1(G)$ в $\lambda_1(G)$, а через n_{ij} - мощность j-го слоя из этой строки. Тогда если Φ_v - множество всех отображений φ_v и $|\Phi_v| = \varphi(G,H)$, то

$$\varphi(G,H) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i(G)\cdot\alpha_i(H) \prod_{j=1}^{k} n_{ij}\,! \ldots , \tag{1}$$

где l - число строк в $\Lambda_1(G)$, k - длина соответствующей строки.

Действительно, значение $\varphi(G,H)$ равно числу взвешенных ребер в графе $\mathcal{L}$. Веса ребер определяются числом всевозможных перестановок вершин в соответствующих слоях.

Так, для нашего примера

$$\varphi(G,H) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(G)\cdot\alpha_i(H) \prod_{j=1}^{3}\cdot n_{ij}! = \alpha_1(G)\cdot\alpha_1(H)\cdot n_{11}!n_{12}!n_{13}! +$$

$$+\alpha_2(G)\cdot\alpha_2(H)\, n_{21}!n_{22}!n_{23}! = 1\cdot3\cdot1!\cdot2!\cdot2! + 4\cdot2\cdot1!3!1! = 60.$$

В этом примере показаны подстановки, соответствующие первому члену формулы (I).

Из приведенного способа подсчета числа перестановок становится достаточно ясным алгоритм нахождения самих перестановок, поэтому мы не приводим его описания.

Литература

I. CHARTRAND G., STEWART M.J. Isometric graphs. - "Lect. Notes Math.", 1971, N 186, p.63-67.

2. СКОРОБОГАТОВ В.А. Относительные разбиения и слои графов. -В кн.: Вопросы обработки информации при проектировании систем. (Вычислительные системы, вып. 69) Новосибирск, I977, с. 3-I0.

3. ХАРАРИ Ф. Теория графов. М., "Мир", I973.

Поступила в ред.-изд.отд.
I3 марта I978 года