АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ.
ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ
(Вычислительные системы)
1978 год Выпуск 77

УДК 519.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НЕОГРАФОВ ЛИНЕЙНЫМИ ФОРМУЛАМИ

Ю.Е.Бессонов

Для ввода графа в ЭВМ его изображают чаще всего в виде матрицы смежностей или списковой структуры, которые составляют, обычно пользуясь диаграммой графа. Для больших графов такой способ представления оказывается громоздким. Представление с помощью покрытия графа цепями [3] значительно короче, однако во многих случаях к концу описания графа таким способом обнаруживается ряд несвязных между собой коротких цепей, и за счет разделителей неоправданно увеличивается объем информации. В худшем случае для графов K_{1p} (рис.I) число разделителей равно $\left[\frac{p-1}{2}\right]+1$ (число вершин графа равно $p+1$).

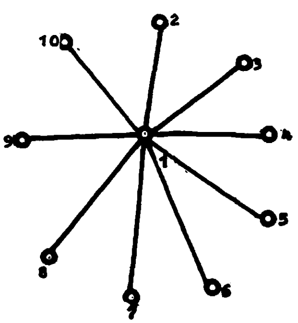

Рис.I

А.Т.Берзтисс [I] предложил способ линейной записи ориентированных графов - К-формульное представление, - которая является очень компактной, приблизительно в два раза короче записи графа в форме списка. К -формульная запись определяется следующим образом. Пусть x и y - символы вершин орграфа, тогда:

I) символ вершины x есть К-формула;

2) $\bullet xy$ есть К-формула тогда и только тогда, когда (x,y) - дуга;

3) самый левый символ вершины в К-формуле называется "ведущей вершиной" К-формулы;

4) если α и β есть К-формулы, то $*\alpha\beta$ есть К-формула тогда и только тогда, когда существует путь от ведущей вершины α до ведущей вершины β.

По определению, К-формула является К-формулой вершины x, если x - ведущая в этой К-формуле. К-формулы могут объединяться по следующему правилу подстановки: если имеется К-формула некоторой вершины и есть другая формула, в которую входит символ этой вершины, то вместо этого символа подставляем К-формулу его вершины. Существует алгоритм [I], который строит минимальное множество К-формул для каждого орграфа.

К-формульная запись может быть использована для представления неориентированных графов. Действительно, любой неограф можно произвольным образом ориентировать и записать в виде К-формул, а затем, в процессе восстановления, снять ориентацию.

Существует простое правило получения единственной К-формулы корневого дерева:

I. Для каждой невисячей вершины v корневого дерева записываем К-формулу в виде $\underbrace{**\ldots*}_{l} v\, v_1 v_2 \ldots v_l$, где $v_1, v_2, \ldots, v_l$ - последователи вершины v.

2. Пусть v_0 - корневая вершина. Подставляем в К-формулу для v_0 формулы ее невисячих последователей. Получаем некоторую формулу K_1. Подставляем в K_1 формулы невисячих вершин третьего уровня и т.д.

ПРИМЕР. Применение описанной процедуры к дереву, изображенному на рис.2, приводит к следующей К-формуле:

$$***a**be**fijc**dgh\ .$$

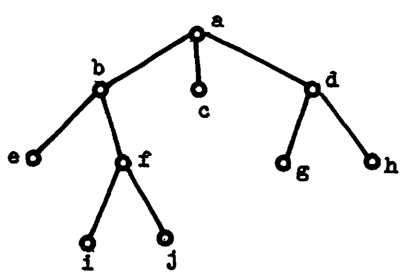

Рис. 2

Существование остовных деревьев у каждого связного неографа позволяет определить следующий способ построения минимального множества его К-формул, который более удобен для практических применений, чем алгоритм А.Т.Берзтисса [I].

Пусть $G = (V,E)$ - связный неограф и пусть для некоторого его остовного дерева мы получили К-формулу по правилам, определенным выше. Для каждого ребра (u,v) , не вошедшего в дерево, запишем его К-формулу $*uv$. Поскольку дерево остовное, то его К-формула содержит все вершины графа G , а значит, для любого ребра, не вошедшего в дерево, ведущая вершина его К-формулы содержится в К-формуле дерева. Поэтому последовательными подстановками К-формул ребер, не вошедших в дерево, получаем единственную К-формулу графа G . Если G несвязный, то указанным способом можно получить множество К-формул, соответствующих его компонентам.

Более быстрый способ кодирования заключается в следующем. Выделяем остовное дерево графа G и записываем его К-формулу. Для каждой компоненты подграфа, образованного множеством непокрытых на предыдущем шаге ребер, строим остовное дерево и записываем их К -формулы. Подставляем их в К-формулу, полученную на предыдущем шаге. Процесс продолжаем до тех пор, пока все ребра графа не будут покрыты. Для большей краткости можно часть К-формулы, состоящую полностью из звездочек $\underbrace{**\ldots*}_{m}$, записать одним числом $-m$. Например, для графа, изображенного на рис.I, его К-формула в сокращенном виде будет: -9 I 2 3 4 5 6 7 8 9 I0.

В работе [2] предлагаются алгоритмы, восстанавливающие орграф по его К-формульному представлению. Процесс состоит из одного прохода справа налево по К-формуле. К концу прохода орграф оказывается построенным либо как множество упорядоченных пар вершин, которое строится в форме дерева, либо как списковая структура.

Алгоритмы, восстанавливающие по К-формульной записи неограф, предлагаются ниже. По своей структуре они являются незначительной модификацией алгоритмов из [2]. В предлагаемых алгоритмах К-формула просматривается один раз слева направо и граф $G=(V,E)$ строится либо в виде списка, в котором i-я строка содержит все вершины G , смежные с вершиной, имеющей номер i , либо в виде матрицы смежностей. Предполагается, что граф записан одной К-формулой $a_1a_2\ldots a_n$.(иначе алгоритм применяется в каждой формуле последовательно), где a_i - либо символ вершины, либо звездочка.

В алгоритмах используются следующие обозначения:

i - счетчик символов формулы;

n - число символов формулы;

k - счетчик звездочек подформул;

S - стек;

$top(S)$ - верхний элемент стека;

$S \Leftarrow x$ - величина x заносится в стек S ;

$x \Leftarrow S$ – x удаляется из S ;

$m(b)$ – текущее значение числа незанятых позиций b-й строки в списке;

$M(r,s)$ – (r, s)-й элемент матрицы смежностей.

<u>АЛГОРИТМ А.</u> (Получение списка неографа по его K-формуле.)

1^0. $i:=1$; $k:=0$; $S:=\emptyset$.

2^0. Если a_i – звездочка, то $k:=k+1$ и переходим к п.3^0, иначе – к п.4^0.

3^0. $i:=i+1$, если $i > n$, то переходим к п.8^0, иначе – к п.2^0

4^0. Если $k \neq 0$, то $m(a_i):=k$ и переходим к п.5^0, иначе – к п.6^0.

5^0. Если $S = \emptyset$, то $k:=0$; $S \Leftarrow a_i$ и переходим к п.3^0, иначе – к п.6^0.

6^0. $b:=top(S)$; $m(b):=m(b) - 1$, если $m(b)=0$, то $top(S) \Leftarrow S$ и переходим к п.7^0, иначе – к п.7^0.

7^0. В b-ю строку заносим a_i, в a_i-ю строку заносим b ; если $k \neq 0$, то $S \Leftarrow a_i$; $k:=0$ и переходим к п.3^0, иначе – к п.3^0.

8^0. Конец.

<u>АЛГОРИТМ В.</u> (Получение матрицы смежностей графа по его K-формуле.)

Этот алгоритм отличается от алгоритма А только записью пункта 7^0 (все элементы M предварительно обнуляются):

7^0. $M(a_i,b):=1$; $M(b,a_i):=1$, если $k \neq 0$, то $S \Leftarrow a_i$, $k:=0$ и переходим к п.3^0, иначе – к п.3^0.

В заключение отметим, что сравнение длины K-формульного представления с длиной записи графа при помощи цепей [3] показывает, что, как правило, первый способ не уступает второму по компактности, причем для графов, имеющих остовные деревья, которые содержат почти все ребра, K-формульная запись оказывается более короткой.

Литература

1. БЕРЗТИСС А.Т. Структуры данных. М., 1974.

2. BAYS C. A non-recursive technique for recreating a digraph from k-formula representation.– "Computer J.", 1976, v. 19, N 4, p.326–328.

3. БЕЛОГЛАЗОВ Г.Н., СКОРОБОГАТОВ В.А. Система автоматизации решения задач на графах. –В кн.: Вопросы обработки информации при проектировании систем. (Вычислительные системы, вып. 69.) Новосибирск, 1977, с. 24–39.

Поступила ред.-изд. отд.
18 сентября 1978 года