АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В МИКРОЭЛЕКТРОНИКЕ.
ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ
(Вычислительные системы)

1978 год Выпуск 77

УДК 519.I

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДУЛЬНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРАФОВ

А.А. Тимофеев

Операция модульного произведения была введена в связи со сведением задачи изоморфизма к задаче нахождения неплотности графа. В данной работе изучается хроматическое число, хроматический класс и неплотность модульного произведения графов. Рассматриваются только обыкновенные графы [I].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Полумодульным произведением $L \Delta K$ графа $L(X,U)$ на $K(Y,V)$ называется граф, вершинами которого служат упорядоченные пары (xy), где $x \in X$, $y \in Y$, причем вершины (xy) и $(x'y')$ смежны тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий: а) $x = x'$ и $y \neq y'$; б) $x \neq x'$ и $y = y'$; в) $(x,x') \in U$ и $(y,y') \notin V$.

Добавив еще одну возможность: г) $(x,x') \in U$ и $(y,y') \in V$, получим определение модульного произведения [2].

В дальнейшем везде будем предполагать, что графы-сомножители $L(X,U)$ и $K(Y,V)$ имеют одинаковое число вершин, т.е. $|X|=|Y| = n$, и будем пользоваться следующими обозначениями: $L(X,U)$ и $K(Y,V)$ – обыкновенные графы с $|X| = |Y| = n$ вершинами; $\bar{L}(X,\bar{U})$ и $\bar{K}(Y,\bar{V})$ – дополнения $L(X,U)$ и $K(Y,V)$ соответственно; $L \square K$ – модульное произведение графов $L(X,U)$ и $K(Y,V)$.

Сформулируем и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathfrak{j}(L)$ и $\mathfrak{j}(K)$ – соответственно хроматические числа графов $L(X,U)$ и $K(Y,V)$, $\mathfrak{j}(L \square K)$ – хроматическое число $L \square K$, $\mathcal{E}_L$ – множество ребер в $\bar{L}(X,\bar{U})$, которые соединяют вершины $L(X,U)$, окрашенные в один и тот же цвет, g_K -множество ребер $\bar{K}(Y,\bar{V})$, которые соединяют вершины $K(Y,V)$, окрашенные в один и тот же цвет. Тогда

$$n \leq j(L \boxminus K) \leq \min\{n_j(L) + 2|g_L|,\ n_j(K) + 2|g_K|\}. \qquad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условиям "а" и "б" определения I в $L \boxminus K$ существует полный n-вершинный подграф, отсюда и следует нижняя оценка в (I). Покажем справедливость верхней оценки. Пусть $X = \bigcup_{i=1}^{j(L)} X_i$ - раскраска графа $L(X, U)$. В силу условия "в", $X \times Y$ разобьется на подмножества $X_1 \times Y$, $X_2 \times Y, \ldots, X_{j(L)} \times Y$, каждое из которых может быть окрашено в n цветов. Следовательно, все $X \times Y$ вершин с учетом того, что вершины произвольных подмножеств $X_l \times Y$ и $X_m \times Y$ будут смежны, можно будет окрасить не более чем в $j(L)n$ цветов. Для сохранения правильности раскраски после выполнения условия "г" может быть прибавлено не более чем на $2|g_L|$ цветов, так как каждое ребро, принадлежащее множеству g_L, может увеличивать существующую правильную раскраску не более чем на 2 цвета. Откуда получаем оценку

$$j(L \boxminus K) \leq j(L)n + 2|g_L|.$$

Аналогичным образом можно получить оценку

$$j(L \boxminus K) \leq j(K)n + 2|g_K|,$$

откуда следует

$$j(L \boxminus K) \leq \min\{j(L)n + 2|g_L|, j(K)n + 2|g_K|\}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\chi(L)$ и $\chi(K)$ - соответственно хроматические классы графов $L(X,U)$ и $K(Y,V)$; $\chi(\bar{L})$ и $\chi(\bar{K})$ - соответственно хроматические классы $\bar{L}(X,\bar{U})$ и $\bar{K}(Y,\bar{V})$, $\chi(L \boxminus K)$ и $\chi(L_n)$ - хроматические классы $L \boxminus K$ и L_n, где L_n - полный n-вершинный граф. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\chi(L\square K) = 2\chi(L_n) + \chi(L)\cdot\chi(\bar{K}) + \chi(\bar{L})\ \chi(K), \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия "а" и "б" определения I обеспечивают в $L\square K$ существование двух семейств полных n-вершинных подграфов, причем подграфы каждого из этих семейств не пересекаются. Отсюда следует первое слагаемое в (2). В силу условия "в" каждый цвет в реберной раскраске $L(X,U)$ даст $\chi(\bar{K})$ цветов в $L\square K$, и тогда $\chi(L)$ цветов дадут $\chi(L)\ \chi(\bar{K})$ различных цветов в реберной раскраске. Откуда следует второе слагаемое в (2). Аналогично "г" обеспечивает третье слагаемое в (2), что может быть показано подобными рассуждениями. Теорема доказана.

Пусть $\alpha(L\square K)$ – неплотность модульного произведения. Из определения модульного произведения следует, что $1 \le \alpha\ (L\square K) \le n$. Интересным представляется следующий вопрос: каким условиям должны удовлетворять графы $L(X,U)$ и $K(Y,V)$, чтобы выполнялось соотношение $\alpha(L\square K) = n$?

Прежде чем перейти к решению этой задачи, проведем некоторые предварительные построения. Допустим, что известно разбиение ребер графов $L(X,U)$ и $K(Y,V)$ на наименьшее число паросочетаний, причем

$U_0, U_1, \dots, U_t$ – набор паросочетаний графа $L(X,U)$,

$V_0, V_1, \dots, V_t$ – набор паросочетаний графа $K(Y,V)$.

С каждым паросочетанием U_i можно связать суграф $L(X, U_t)$, множеством вершин которого служит множество X, а множеством ребер – все ребра U_i. Тогда $L(X,U)$ и $K(Y,V)$ естественным образом индуцируют семейства суграфов

$$L(X,U_0),\ L(X,U_1),\dots,\ L(X,U_t);$$

$$K(Y,V_0),\ K(Y,V_1),\dots,\ K(Y,V_t).$$

Запишем эти семейства в виде

$$\{\ L(X,U_i^j)\},\ i = 0,1,\dots,p,$$

$$\{\ K(Y,V_i^l)\},\ i = 0,1,\dots,p,$$

где j – число паросочетаний $L(X,U)$ мощности $|U_i|$, а l – число паросочетаний $K(Y,V)$ мощности $|V_i|$ и $|U_i| = |V_i|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если для любого $i \in I$, $\{I=(0,1,\dots,p)\}$, $j=l$, то семейства (3) и (4) назовем системой соотнесенных суграфов. Каждому i поставим в соответствие множество M_i^{jl}, элементами которого являются всевозможные изоморфизмы суграфов, порожденные равномощными паросочетаниями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система соотнесенных суграфов называется согласованной, если существует такой набор $f_i^{ji} \in M_i^{ji}$ при $i=0,1,\ldots,p$, что для любого $x \in X$ существует и притом единственный $y \in Y$, при котором $f_i^{ji}(x) = y$ при $i = 0,1,\ldots, p$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha(L \boxminus K)$ – неплотность графа $L \boxminus K$. Величина $\alpha(L \boxminus K) = n$ каждый раз, когда $L(X,U)$ и $K(Y,V)$ образуют соотнесенную систему согласованных суграфов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $i \in I$ будем образовывать

$$L(X,U_i^j) \boxminus K(Y, V_i^1).$$

Так как $L(X,U_i^j) \simeq K(Y,V_i^1)$, то $\alpha(L(X,U_i^j) \boxminus K(Y,V_i^1)) = n$. Вследствие того, что система соотнесенных суграфов согласована, имеем хотя бы одно пустое множество, содержащее n вершин и общее для всех произведений вида $L(X,U_i^j) \boxminus K(Y,V_i^1)$.

Так как $\bigcup_{i=0}^{p} L(X,U_i^j) \simeq L(X,U)$, а $\bigcup_{i=0}^{p} K(Y,V_i^1) \simeq K(Y,V)$, то $\bigcup_{i=0}^{p} L(X\,U_i^j) \boxminus \bigcup_{i=0}^{p} K(Y\,V_i^1) \simeq L \boxminus K$.

Следовательно, $\alpha(L \boxminus K) = n$.

Литература

1. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. Новосибирск, "Наука", 1969.

2. ВИЗИНГ В.Г. Сведение проблемы изоморфизма и изоморфного вхождения к задаче нахождения неплотности. –В кн.: Труды III Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. Новосибирск, 1974, с. 124.

Поступила в ред.-изд.отд.
19 октября 1978 года