

УДК 681.323

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ДИОФАНТОВЫХ СТРУКТУР

Э.А. Монахова

Дан обзор по теории D_n -графов [1] и доказан ряд их свойств, приведены алгоритм синтеза предельных D_n -графов и полученный по нему каталог оптимальных D_n -графов ($n = 2, 3, 4, 5$), позволяющий оперативно выбирать структуру однородной вычислительной системы при заданном числе процессоров.

Данная работа продолжает исследование оптимальных диофантовых КАИС-структур, начатое работами [1-3]. Полученные автором результаты частично опубликованы в монографии [4].

1. Конечной Абелевой Изотропией Симметричной (КАИС) структурой называется граф, полученный из групп-графа конечной абелевой группы заменой дуг ребрами без отметок [2]. Такая структура удобна как модель графа межмашинных связей однородной вычислительной системы, так как однородна в строгом смысле, позволяет легко организовать адресацию элементов и путевые процедуры, обеспечивает полную свободу коммутаций.

Вариантом КАИС-структуры, допускающим простое параметрическое описание, является диофантова структура, или D_n -граф, определяемый следующим образом.

Пусть N вершин графа перекумерованы числами $0, 1, \dots, N-1$ и пусть $0 < s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < N$ — множество n целых чисел. Связь между вершинами i и j графа имеет место, если и только если

$$j - i \equiv s_k \pmod{N}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

где N — порядок D_n -графа, n — его размерность, $S = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ — множество образующих. За направление образующей S_k на структуре возьмем направление движения от i к j . Параметрически D_n -граф задается описанием вида $\{N; S\} = \{N; s_0, s_1, \dots, s_{n-1}\}$.

2. Приведем основные понятия и свойства КАИС-структур, которые позволяют корректно поставить задачу выбора оптимальной структуры в частном случае D_n -графов.

Диаметром d структуры называется максимально необходимое расстояние между парами вершин структуры. Число вершин структуры, находящихся на расстоянии 1 от любой выделенной, обозначим через $L_{n,1}$, а число вершин, находящихся на расстоянии не более 1 от любой выделенной, — через $K_{n,1}$. Средним диаметром структуры называется величина $\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^d 1L_{n,i}$. Для КАИС-структур [3] и D_n -графов [5,6] введены функции $L_{n,1}^*$ и $K_{n,1}^*$, которые являются верхними оценками для $L_{n,1}$ и $K_{n,1}$ и подчиняются соотношениям

$$L_{n,1}^* = L_{n-1,1}^* + 2 \sum_{i=0}^{1-1} L_{n-1,i}^*, \quad K_{n,1}^* = \sum_{i=0}^1 L_{n,i}^*.$$

Несложные преобразования этих соотношений дают:

$$L_{n,1}^* = L_{n-1,1}^* + L_{n,1-1}^* + L_{n-1,1-1}^*,$$

$$K_{n,1}^* = K_{n-1,1}^* + K_{n,1-1}^* + K_{n-1,1-1}^*.$$

Отсюда, используя тот очевидный факт, что $L_{n,0}^* = K_{n,0}^* = 1$, $L_{1,1}^* = 2$ при $1 > 0$ и $K_{1,1}^* = 2 \cdot 1 + 1$, легко вычислить значения $L_{n,1}^*$ и $K_{n,1}^*$ для данных n и 1 (см. табл. I и 2 соответственно).

Т а б л и ц а I

Расстояние 1	Размерность n				
	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
1	2	4	6	8	10
2	2	8	18	32	50
3	2	12	38	88	170
4	2	16	66	192	450

Т а б л и ц а 2

Расстояние 1	Размерность n				
	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
1	3	5	7	9	11
2	5	13	25	41	61
3	7	25	63	129	231
4	9	41	129	321	681

Число d такое, что $K_{n,d-1}^* < N \leq K_{n,d}^*$, является [3] минимальным из возможных диаметров n -мерной КАИС-структуры порядка N .

Назовем предельной такую структуру, что $L_{n,1}^* = L_{n,1}^*$ при $1 < d$ и $L_{n,1}^* = N - K_{n,1-1}^*$ при $1 = d$.

Легко доказываются следующие свойства таких структур.*)

*) Доказательство теорем I и 2 принадлежит В.А.Воробьеву [4].

ТЕОРЕМА 1. Предельная КАИС-структура порядка N и размерности n имеет минимальный средний диаметр

$$\bar{d} = \frac{1}{N} [d(N - K_{n,d-1}^*) + \sum_{i=0}^{d-1} iL_{n,i}^*].$$

ТЕОРЕМА 2. Длина всех слов, равных нулю (за исключением соотношений, задающих коммутативность), в группе автоморфизмов предельной КАИС-структуры строго больше величины $2(d-1)$.

ТЕОРЕМА 3. Порядок π_k любой k -й образующей предельной КАИС-структуры удовлетворяет неравенству $\pi_k > 2(d-1)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $S = (1, s_1, \dots, s_{n-1})$ — множество образующих предельного D_n -графа, тогда для всех $i = \overline{1, n-1}$ выполняется $s_i \geq 2(d-1)$.

Следующее свойство позволяет для некоторых значений N сразу получать предельные описания.

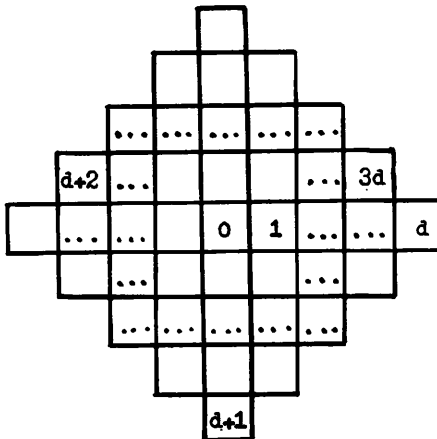
ТЕОРЕМА 5. Для любого натурального $d > 1$ и $N = 2d^2 + 2d + 1, 2d^2 + 2d, 2d^2 + 2d - 1$ предельные D_2 -графы существуют и имеют описания вида:

$$1) \{ 2d^2 + 2d + 1; 1, 2d + 1 \},$$

$$2) \{ 2d^2 + 2d; d, d + 1 \},$$

$$3) \{ 2d^2 + 2d - 1; 1, 2d - 1 \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай 1. Пусть $N = 2d^2 + 2d + 1$ и $n = 2$, тогда $N = K_{2,d}^*$. В этом случае у предельной структуры на i -м ярусе, т.е. на расстоянии i от любой вершины, должно находиться $L_{2,i}^* = 4i$ вершин для всех $i \in \overline{1, d}$. Этому требованию удовлетворяет модель структуры в двумерном евклидовом пространстве, изображенная на рисунке (см. стр. 21). Общее число клеток модели равно $2d^2 + 2d + 1$. Клетки модели соответствуют вершинам структуры. Вершины i -го яруса имеют с вершинами $(i-1)$ -го яруса хотя бы одно общее ребро. Геометрически данная модель представляет собой предельную двумерную структуру. Найдем теперь такую нумерацию всех вершин числами $0, 1, \dots, N-1$, которая задавала бы D_2 -



граф на данной модели. Клетки строк последовательно нумеруем слева направо. Дойдя до конца строки, спускаемся вниз на d строк, или, если это невозможно, поднимаемся на $d + 1$ строку вверх. Нумерацию начинаем с центральной клетки, заканчиваем на клетке, расположенной слева от центральной. Очевидно, что при такой нумерации вершина, получившая номер 1, связана с вершинами $(i+1) \bmod N$, $(i-1) \bmod N$, $(i+2d+1) \bmod N$

и $(i-2d-1) \bmod N$ для всех i от 0 до $N-1$. Таким образом, данная нумерация задает D_d -граф с образующими $a_0 = 1$ и $a_1 = 2d + 1$. Случай 1 доказан. Случаи 2 и 3 доказываются аналогично построением соответствующих моделей.

В [3] доказано, что КАИС-структуры, имеющие минимальный средний диаметр для заданных порядка и размерности, являются оптимальными, так как максимизируют показатели живучести и коммутруемости структуры и быстродействие транзитных передач. Таким образом, задача синтеза оптимального D_d -графа сводится к поиску предельного D_d -графа, а если он не существует, то - к поиску D_d -графа с $\min d$ и $\min \bar{d}$ в классе D_d -графов порядка N . Более точная формулировка решаемой здесь задачи, использующая понятие эквивалентности D_d -графов, будет дана в п.4.

3. Известен ряд работ, в которых авторы рассматривали методы синтеза предельных (или близких к ним) структур.

Оптимальные КАИС-структуры размерности $n = 2$ и порядка $N < 100$ были получены с помощью программы, написанной для ЭВМ "Минск-22" [3,7]. По заданному числу вершин и размерности определялись группа и список связанных вершин оптимальной структуры. Дополнительные вычисления [7] позволили найти соответствующие оптимальные D_d -графы. Низкое быстродействие общего метода и не совсем удобный вид выходных данных стимулировали развитие работ, ориентированных на синтез D_d -графов.

Представляют интерес работы, в которых предложены эвристические методы синтеза. В [5] авторы рассмотрели частный случай D_n -графа $\{N; 1, s_1, \dots, s_{n-1}\}$, когда $s_0 = 1$. Ими получены нижние границы для диаметра и среднего диаметра D_n -графов порядка N :

$$d \geq d_{\min} \geq \frac{1}{2}(n!N)^{1/n} - \frac{1}{2}(n+1) \approx \frac{1}{2}(n!)^{1/n} N^{1/n},$$

$$\bar{d} \geq \bar{d}_{\min} \geq \left[\frac{1}{2} n / (n+1) : N \right] [(n!N)^{1/n} - (3n+1)]^{n+1} \approx \frac{1}{2} [n / (n+1)] (n!)^{1/n} N^{1/n},$$

где $d_{\min}$, $\bar{d}_{\min}$ — минимальные значения диаметра и среднего диаметра для D_n -графов порядка N . В качестве описания, достаточно близкого к предельному, авторы предложили описание $\{N; 1, N^{1/n}, \dots, N^{(n-1)/n}\}$, а степень приближения оценили максимальным отклонением d и $\bar{d}$ данного описания от нижних границ. Эффективность предложенной эвристики рассмотрим на примере, взятом из каталога оптимальных D_n -графов (см. приложение к данной статье). Для $n = 2$ и $N = 144$ предельное описание $\{144; 8, 9\}$, $d = d_{\min} = 8$, $\bar{d} = \bar{d}_{\min} = 5,6$. Полученный по эвристике D_2 -граф $\{144; 1, 12\}$ имеет $d = 12$, $\bar{d} = 6$. Его диаметр и средний диаметр отличаются от минимальных соответственно на 50% и 7%. Видно, что значительно отличается диаметр и совсем незначительно средний диаметр (максимальные отклонения при $n = 2$ по тем же параметрам от нижних границ, приведенные в [5], равны 15% и 6%).

Имеется еще один эвристический алгоритм синтеза D_2 -графов минимального диаметра [1], дающий в большинстве случаев оптимальную структуру. В [1] предложен также метод полного перебора классов изоморфизма на связанных D_2 -графах. Следующие четыре теоремы из [1] потребуются нам для построения регулярного алгоритма поиска предельных D_n -графов в общем случае.

ТЕОРЕМА 6. Компоненты связности D_n -графа $\{N; S\}$ имеют порядок $\pi = N / \text{н.о.д.}^*(S)$ ($N, s_0, \dots, s_{n-1}$).

ТЕОРЕМА 7. Порядок образующей s_k D_n -графа $\{N; S\}$ равен $\pi_k = N / \text{н.о.д.}(N, s_k)$.

Все образующие одного порядка составляют класс порядка образующих. Классы порядков образующих имеют наименьшую образующую, которая является делителем N . Поскольку все элементы класса имеют с

*) Наибольший общий делитель.

N один и тот же н.о.д., то классы порядков образующих можно рассматривать и как классы делителей N .

ТЕОРЕМА 8. D_n -графы $\{N; s_0, \dots, s_k, \dots, s_{n-1}\}$ и $\{N; s_0, \dots, (N-s_k), \dots, s_{n-1}\}$ изоморфны.

Приведенное утверждение позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением D_n -графов с образующими, не превосходящими $N/2$.

ТЕОРЕМА 9. Если N и t взаимно-просты, то D_n -графы $\{N; s_0, \dots, s_{n-1}\}$ и $\{N; ts_0, \dots, ts_{n-1}\}$ изоморфны.

4. Пусть теперь дано описание D_n -графа $\{N; S\}$. Умножим все $s_k \in S$ на элемент t приведенной системы вычетов по модулю N . В качестве новых образующих s'_k возьмем остатки от деления ts_k на N , если они меньше $N/2$, или дополнения этих остатков до N , если они больше $N/2$. Назовем данное преобразование, переводящее S в S' , эквивалентным преобразованием, а отношение между множествами S и S' , а также описаниями $\{N; S\}$ и $\{N; S'\}$ — отношением эквивалентности. Действительно, оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если теперь t пробегает приведенную систему вычетов по модулю N , то все D_n -графы вида $\{N; S'\}$, получающиеся из $\{N; S\}$, образуют класс эквивалентности. Из эквивалентности D_n -графов $\{N; S\}$ и $\{N; S'\}$ следует их изоморфизм [8], обратное в общем случае неверно. Например, D_3 -графы $\{16; 1, 2, 7\}$ и $\{16; 2, 3, 5\}$ изоморфны, но не эквивалентны. Для D_n -графов с простым числом вершин понятия эквивалентности и изоморфизма совпадают [9]. В общем же случае для решения проблемы изоморфизма D_n -графов в настоящее время не существует эффективного алгоритма. Поэтому в данной работе при поиске предельных D_n -графов описания D_n -графов различаются с точностью до эквивалентности.

Задача синтеза оптимальных D_n -графов, решаемая в данной работе, ставится так. Для заданных порядка N и размерности n найти все неэквивалентные сочетания чисел $(s_0, \dots, s_k, \dots, s_{n-1})$, $s_k \leq N/2$, описывающие предельные D_n -графы, а в случае, если их нет, найти все неэквивалентные оптимальные описания.

Следующая лемма используется при доказательствах теорем I0 и II, значительно сокращающих перебор сочетаний.

ЛЕММА. Пусть N — натуральное число, d/N , a — любое число из класса делителя d . Тогда найдется элемент x приведенной системы вычетов по мо-

д у л ю N т а к о й , ч т о в ы п о л н я е т с я с р а в -
н е н и е

$$sx \equiv d \pmod{N} . \quad (I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения класса делителя следует, что $\text{н.о.д.}(s, N) = d$. Сравнение (I) в этом случае имеет d решений вида $x = x_1 + i \frac{N}{d}$, $0 \leq i \leq d-1$, где x_1 - наименьший неотрицательный вычет решения сравнения

$$\frac{s}{d}x \equiv 1 \pmod{\frac{N}{d}} . \quad (2)$$

Так как $\text{н.о.д.}(\frac{s}{d}, \frac{N}{d}) = 1$, то решение сравнения (2) существует и, кроме того, обладает свойством: $\text{н.о.д.}(x_1, \frac{N}{d}) = 1$. Так как d/N , то для N существуют два представления:

1) $N = dp$, где $\text{н.о.д.}(d, p) = 1$;

2) $N = d^j p$, где $\text{н.о.д.}(d, p) = 1$ и $j = 2, 3, \dots$.

В первом случае $\text{н.о.д.}(x_1, p) = 1$ и решение сравнения (I) представится в виде: $x = x_1 + ip$. Во втором случае $\text{н.о.д.}(x_1, p) = \text{н.о.д.}(x_1, d) = 1$ и решение сравнения (I) представится в виде: $x = x_1 + id^{j-1}p$. Заметим, что если сумма x и слагаемое $id^{j-1}p$ делятся на d , то и слагаемое x_1 должно делиться на d , но $\text{н.о.д.}(x_1, d) = 1$, значит, $\text{н.о.д.}(x, N) = 1$, что и требовалось доказать.

Фактически данная лемма утверждает, что с помощью эквивалентного преобразования можно перевести любое число из класса делителя в сам делитель.

ТЕОРЕМА IО. П р и $s_k \leq]N/2[$ D_n -г р а ф п о р я д к а N и м е е т н е б о д е е ч е м $1/2\phi(N)$ э к в и в а - л е н т н ы х о п и с а н и й в и д а $\{N; S\}$, г д е $\phi(N)$ - ф у н к ц и я Э й л е р а .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы получить все эквивалентные описания D_n -графа порядка N , достаточно в качестве множителя t брать только те элементы приведенной системы вычетов по модулю N , которые не превосходят $]N/2[$, так как из $\text{н.о.д.}(t, N) = 1$ следует $\text{н.о.д.}(N - t, N) = 1$, а $s(t-N) \equiv st \pmod{N}$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА II. (О полноте множества классов эквивалентности.)

П р и з а д а н н ы х N и n п о л н о т а м н о ж е с т - в а к л а с с о в э к в и в а л е н т н о с т и D_n -г р а - ф о в п о р я д к а N с $s_k \leq]N/2[$ д о с т и г а е т с я н а м н о ж е с т в е с о ч е т а н и й $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$, о п р е -

деляемом следующими условиями:

1) s_0 пробегает множество всех делителей N , меньших N ;

2) порядки s_i ($i = \overline{1, n-1}$) при этом не больше порядка s_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что, по определению D_n -графа, мы рассматриваем только такие сочетания $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$, у которых $s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1}$. Итак, покажем, что те сочетания, для которых не выполнены условия теоремы II, не дают новых классов эквивалентности.

Разобьем множество $\overline{1, [N/2]}$ на классы делителей N . Возьмем произвольное сочетание $S = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$, у которого s_0 принадлежит к классу делителя s'_0 , но не равно s'_0 , т.е. не выполнено условие I. По лемме, существует такой элемент t приведенной системы вычетов по модулю N , что при эквивалентном преобразовании S с помощью данного t число s_0 перейдет в s'_0 . Таким образом, S эквивалентно S' , для которого выполнено условие I.

Пусть теперь для сочетания $S = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ выполнено условие I, но не выполнено условие 2, т.е. s_0 — делитель N , а порядок хотя бы одного s_j ($j \in \overline{1, n-1}$) больше порядка s_0 . Таким образом, s_j принадлежит к классу делителя s'_j , порядок которого больше порядка s_0 . Ясно, что s_j не равен s'_j , иначе в сочетании S он стоял бы раньше s_0 , так как $s'_j < s_0$. Применяя к S эквивалентное преобразование и упорядочивая элементы сочетания S' по возрастанию, получим, что s_j перейдет в делитель s'_j , который стоит теперь на первом месте в сочетании S' , т.е. для S' справедливо также условие 2. Сочетание S оказалось эквивалентно сочетанию S' , удовлетворяющему условиям теоремы II. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Среди сочетаний вида $(1, s_1, \dots, s_{n-1})$, где $s_1, \dots, s_{n-1}$ не содержат элементов приведенной системы вычетов по модулю N , нет эквивалентных.

СЛЕДСТВИЕ 2. Среди сочетаний вида $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$, где s_0 — делитель N , мощность класса которого равна мощности приведенной системы вычетов, а порядки s_i ($i = \overline{1, n-1}$) не больше порядка s_0 , нет эквивалентных.

Порядок, в котором перебираются сочетания из теоремы II, можно организовать по-разному. Например, перебирать сочетания по классам делителей, не упорядочивая дополнительно сами сочетания. При таком переборе можно использовать следствия 1 и 2. В алгоритме выбрано другое упорядочивание по следующим причинам: проще проверяется эквивалентность сочетаний, сама процедура упорядочивания очень проста, легко выполняется требование теоремы 4.

5. Опишем алгоритм синтеза предельных D_n^* -графов, который использует все вышеприведенные теоремы.

1. Вычисляем таблицу $K_{n,1}^*$ до n -го столбца и такой строки l , что $K_{n,1}^* \geq N$. Ожидаемый диаметр d предельной структуры равен 1, а минимальный допустимый порядок для образующей предельной структуры $\pi_{\min} = 2(d-1) + 1$.

2. Вычисляем таблицу $L_{n,1}^*$ до n -го столбца и найденного l . В дальнейшем потребуются только величины $l, \pi_{\min}$ и n -е столбцы вычисленных таблиц. Для вычисления n -х столбцов $L_{n,1}^*$ и $K_{n,1}^*$ на ЭМ достаточно иметь в памяти только две строки с номерами i и $i-1$.

3. По формуле $\pi = N / \text{н.о.д.}(N, a)$ вычисляем порядки всех чисел a из множества $1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$. Отбрасываем те числа, у которых порядок меньше $\pi_{\min}$. Оставшиеся числа образуют таблицу для делителя N , равного 1, а их порядки — соответственно таблицу порядков. Среди этого множества оставшихся чисел находим делители N и последовательно вписываем их порядки (кроме порядков наименьшего и наибольшего делителей) в таблицу.

4. Берем из таблицы порядков делителей очередной порядок π , если он есть, и переходим на 5, иначе — на 6.

5. Из таблицы для предыдущего делителя N , пользуясь его таблицей порядков, получаем таблицу для очередного делителя N с теми числами, у которых порядки $\leq \pi$. Соответственно получаем и его таблицу порядков. Переход на 4.

6. Полученные таблицы для делителей перебираем последовательно в порядке построения. Перебор сочетаний на каждой таблице организован следующим образом. Значение первого элемента таблицы присваивается первому элементу n -сочетания. Из оставшихся элементов таблицы лексикографически перебираются все $(n-1)$ -сочетания. Так перебираем все таблицы, кроме таблицы для делителя 1, у которой перебор $(n-1)$ -сочетаний начинается с элемента, не меньшего $2(d-1)$.

7. Если перебор сочетаний не окончен, то берем очередное сочетание и выполняем переход на 8, иначе - на II.

8. Для очередного сочетания строим табл.3 вида:

Т а б л и ц а 3

i	0	I	2	3	4	5	...	N-3	N-2	N-1
$l_{n,i}$	0	I	I	2	2	3	...	2	I	I

Здесь i - диофантов номер вершины D_n -графа, $l_{n,i}$ - минимальная длина пути из вершины 0 в вершину i . В примере дана таблица для сочетания (I,2). Если число вершин, находящихся на расстоянии $l < d$ от нулевой, в точности совпадает с $L_{n,i}^*$, то найдена предельная структура и следует переход на 9, иначе (сюда относятся и несвязные сочетания, у которых $\text{н.о.д.}(N, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \neq 1$, т.е. данная процедура служит эффективным средством для определения взаимной простоты чисел $N, s_0, \dots, s_{n-1}$) - на 7.

9. Данное сочетание проверяем на эквивалентность ранее рассмотренным. Если среди его эквивалентных описаний есть сочетание, предшествующее ему по величине, то сочетание отбрасываем и следует переход на 7, иначе - на 10.

10. Запоминаем представителя нового класса эквивалентности предельных структур. Переход на 7.

II. Для всех найденных неэквивалентных предельных структур строим их эквивалентные описания и подсчитываем общее число предельных структур. Конец.

Приведем пример поиска предельных D_n -графов порядка $N = 36$, размерности $n = 2$.

1. Столбец $K_{2,1}^* = I, 5, 13, 25, 41$; $d = 4$, $\kappa_{n,1n} = 7$.

2. Столбец $L_{2,1}^* = I, 4, 8, 12$.

3. Получаем таблицу чисел для делителя I (табл.4), таблицу порядков для делителя I (табл.5), таблицу порядков делителей 2 и 3 (табл.6).

Т а б л и ц а 4

I	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	15	16	17
---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

Т а б л и ц а 5

36	18	12	9	36	9	18	36	36	18	12	9	36
----	----	----	---	----	---	----	----	----	----	----	---	----

Т а б л и ц а 6

I8	I2
----	----

4. $\pi := I8$.

5. Получаем таблицу чисел для делителя 2 (табл.7) и таблицу порядков для делителя 2 (табл.8).

Т а б л и ц а 7

2	3	4	8	I0	I4	I5	I6
---	---	---	---	----	----	----	----

Т а б л и ц а 8

I8	I2	9	9	I8	I8	I2	9
----	----	---	---	----	----	----	---

4. $\pi := I2$.

5. Получаем таблицу чисел для делителя 3 (табл.9) и таблицу порядков для делителя 3 (табл.10).

Т а б л и ц а 9

3	4	8	I5	I6
---	---	---	----	----

Т а б л и ц а I0

I2	9	9	I2	9
----	---	---	----	---

6.7. Перебираем 2-сочетания:

(1, s_1), s_1 пробегает табл.4, начиная с числа 7;

(2, s_1), s_1 пробегает табл.7, начиная с числа 3;

(3, s_1), s_1 пробегает табл.9, начиная с числа 4.

8.9.I0. Не предельные и не связанные сочетания отбрасываем; (I,8) - предельное сочетание - запоминаем; (I,I0) - предельное сочетание, не эквивалентное ранее просмотренным, запоминаем.

II. Для (I,8) и (I,I0) строим их эквивалентные описания и подсчитываем общее число предельных структур. Оно равно I2. Конец.

На данном примере видно, что по предлагаемому алгоритму пришлось перебрать всего I4 сочетаний вместо $C_{18}^2 = I53$ сочетания.

Описанный алгоритм был использован для создания программы синтеза оптимальных D_n -графов, реализованной на ЭМ БЭСМ-6. Реализованная программа выдает для заданных N и n предельные неэквивалентные описания, число классов эквивалентности предельных структур, общее число предельных структур, вероятность предельных

описаний, а в случае, когда предельной структуры не существует, выдает оптимальное описание, лучшее по d и $\bar{d}$ среди всех возможных описаний. Программа была использована для синтеза оптимальных D_n -графов размерностей $n = 2, 3, 4, 5$ и соответствующих порядков $N = 10-256, 10-212, 10-70, 10-67$. Время синтеза для некоторых интервалов значений N приводится ниже:

$n = 2,$	$N = 201-256,$	$t = 21',$
$n = 3,$	$N = 162-177,$	$t = 16'45'',$
$n = 5,$	$N = 51-57,$	$t = 1 \text{ час.}$

Накопленный статистический материал по оценке частоты появления описаний предельных диофантовых структур позволяет сделать некоторые предварительные выводы.

1. Для некоторых порядков и размерностей предельные диофантовые структуры не существуют (для $n = 2$ вопрос о существовании предельных D_n -графов остается пока открытым).

2. Вероятность появления предельных диофантовых структур p в целом быстро падает с ростом порядка.

3. Области минимальной вероятности p для $n = 2$ и нулевой вероятности для $n = 3, 4, 5$ наблюдаются при приближении N к моменту перехода от одного диаметра к другому.

4. При росте диаметра для $n > 2$ области существования предельных D_n -графов быстро сокращаются.

Фрагменты каталога оптимальных D_n -графов приведены в приложении.

В заключение автор выражает благодарность В.А.Воробьеву за руководство данной работой.

Л и т е р а т у р а

1. ВОРОБЬЕВ В.А. Простейшие структуры однородных вычислительных систем. - В кн.: Вычислительные системы. Вып.60. Вопросы теории и построения вычислительных систем. Новосибирск, 1974, с.35-49.

2. ВОРОБЬЕВ В.А., КОРНЕЕВ В.В. Некоторые вопросы теории структур однородных вычислительных систем. - Там же, с.3-16.

3. КОРНЕЕВ В.В. О макроструктуре однородных вычислительных систем. - Там же, с.17-34.

4. ЕВРЕЙНОВ Э.В., ХОРОШЕВСКИЙ В.Г. Однородные вычислительные системы. - Новосибирск: Наука, 1978.

5. WONG C.K., Don COPPERSMITH. A Combinatorial Problem Related to Multimodule Memory Organization. - J.Assoc.Comput.Machinery, 1974, v.21, N 3, p.390-402.

6. WONG C.K., MADDOCK J.W. A generalized Pascal's triangle.- The Fibonacci Quarterly, 1975, v.13, p.134-136.

7. БОРОБЕВ В.А., КОРНЕЕВ В.В., ПЕТРОВА Э.А. (Монахова Э.А.) Элементы теории структур однородных вычислительных систем.- В кн.: Однородные вычислительные системы и среды. Ч.1. Киев, Наукова думка, 1975, с.33-35.

8. ELSPAS B., TURNER I. Graphs with circulant adjacency matrices.- J. Combinatorial Theory, 1970, v.9, p.297-307.

9. TURNER I, Point-symmetric graphs with a prime number of points.- J. Combinatorial Theory, 1967, v.3, p.136-145.

Поступила в ред.-изд.отд.

26 июня 1979 года

Оптимальные D_5 -графы

N	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	N	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	N	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4
11	1	2	3	4	5	29	1	2	3	4	10	47	1	2	9	15	20
12	1	2	3	4	5	30	1	2	3	4	11	48	1	4	8	10	23
13	1	2	3	4	5	31	1	2	3	4	11	49	1	2	9	15	22
14	1	2	3	4	5	32	1	2	3	4	12	50*	1	3	8	16	20
15	1	2	3	4	5	33	1	2	3	4	12	51	1	2	10	16	23
16	1	2	3	4	5	34	1	2	3	4	13	52*					
17	1	2	3	4	5	35	1	2	3	4	13	53*					
18	1	2	3	4	5	36	1	2	3	8	15	54*					
19	1	2	3	4	5	37	1	2	3	4	14	55*					
20	1	2	3	4	5	38	1	2	3	9	16	56*					
21	1	2	3	4	5	39	1	2	3	9	16	57*					
22	1	2	3	4	7	40	1	2	3	10	16	58*					
23	1	2	3	4	6	41	1	2	3	10	16	59*					
24	1	2	3	4	8	42	1	2	3	10	18	60*					
25	1	2	3	4	8	43	1	2	3	11	18	61*					
26	1	2	3	4	9	44	1	2	3	11	18	62*					
27	1	2	3	4	9	45	1	2	3	11	18	63*					
28	1	2	3	4	10	46	1	2	8	15	20	64*					

ж) Приведены фрагменты каталога оптимальных D -графов для следующих значений: $n = 2$, $N = 17-256$; $n = 3, 4, 5$, $N = 11-64$.

Описания выбраны из множеств неэквивалентных предельных сочетаний как лексикографически меньшие всех остальных. Для значений N , отмеченных "*", не существует предельных описаний и приведены оптимальные описания.

Оптимальные D_4 -графы

N	s_0	s_1	s_2	s_3	N	s_0	s_1	s_2	s_3	N	s_0	s_1	s_2	s_3
11	I	2	3	4	29	I	2	3	11	47*				
12	I	2	3	4	30	I	2	7	13	48	I	4	11	17
13	I	2	3	4	31	I	2	8	13	49	I	4	10	17
14	I	2	3	4	32	I	2	8	13	50	I	4	15	22
15	I	2	3	4	33	I	2	8	13	51	I	4	10	22
16	I	2	3	4	34*					52	I	6	19	22
17	I	2	3	4	35	I	6	7	10	53	I	4	10	17
18	I	2	3	6	36*	I	2	9	15	54	I	4	11	17
19	I	2	3	5	37*	I	3	10	15	55	I	4	13	20
20	I	2	3	7	38*	I	2	8	13	56	I	4	10	17
21	I	2	3	7	39*	I	2	10	16	57	I	4	10	17
22	I	2	3	8	40*	I	5	9	12	58	I	4	10	23
23	I	2	3	8	41*	I	4	11	17	59	I	4	10	17
24	I	2	3	9	42*	I	4	10	17	60	I	4	10	17
25	I	2	3	9	43*	I	2	8	13	61	I	4	10	22
26	I	2	3	10	44*	I	4	14	21	62	I	4	10	17
27	I	2	3	10	45*	I	3	11	18	63	I	4	10	17
28	I	2	7	11	46	I	4	10	17	64	I	4	10	23

Оптимальные D_3 -графы

N	s_0	s_1	s_2	N	s_0	s_1	s_2	N	s_0	s_1	s_2
11	I	2	3	29	I	5	I3	47	I	4	I8
12	I	2	3	30	I	5	8	48	I	7	I8
13	I	2	3	31	I	4	II	49	I	6	I7
14	I	2	5	32	I	4	I0	50	I	8	I2
15	I	2	4	33	I	4	I0	51*	I	4	I5
16	I	2	6	34	I	4	I4	52*			
17	I	2	6	35	I	4	I0	53*			
18	I	2	7	36	I	4	I0	54*			
19	I	2	7	37	I	4	I0	55	I	5	2I
20	I	5	8	38	I	4	I0	56*			
21	I	2	8	39	I	4	II	57*	I	5	22
22*	I	4	8	40	I	4	I5	58*			
23*	I	2	9	41	I	4	I0	59*	I	7	I8
24*	I	5	8	42	I	4	I6	60*			
25*	I	3	I0	43	I	4	II	61*	I	6	26
26*	I	3	8	44	I	4	I7	62*			
27	I	4	I0	45	I	4	I3	63*	I	24	28
28	I	4	II	46	I	4	I8	64*			

Оптимальные D_2 -графы

N	s_0	s_1	N	s_0	s_1	N	s_0	s_1	N	s_0	s_1	N	s_0	s_1
17	I	4	41	I	9	65	I	10	89	I	16	113	I	15
18	I	4	42	I	16	66	I	10	90	I	12	114	I	50
19	I	4	43	I	12	67	I	12	91	I	12	115	I	34
20	I	8	44	I	8	68	I	26	92	I	14	116	I	32
21	I	6	45	I	8	69	I	15	93	I	39	117	I	43
22	I	6	46	I	10	70	2	25	94	I	26	118	I	18
23	I	5	47	I	13	71	I	11	95	I	17	119	I	14
24	3	4	48	I	20	72	I	11	96	I	42	120	I	14
25	I	7	49	I	9	73	I	11	97	I	13	121	I	16
26	I	10	50	I	9	74	I	22	98	I	13	122	I	36
27	I	6	51	I	9	75	I	10	99	I	13	123	I	34
28	I	6	52	I	8	76	I	10	100	I	18	124	I	52
29	I	8	53	I	8	77	I	14	101	I	30	125	I	19
30	2	9	54	I	12	78	I	12	102	I	12	126	2	49
31	I	7	55	I	10	79	I	12	103	I	12	127	I	15
32	I	7	56	I	10	80	I	22	104	I	16	128	I	15
33	I	6	57	I	24	81	I	24	105	I	14	129	I	15
34	I	6	58	I	22	82	I	36	106	I	14	130	I	28
35	I	10	59	I	9	83	I	11	107	I	41	131	I	20
36	I	8	60	5	6	84	6	7	108	I	32	132	3	32
37	I	8	61	I	11	85	I	13	109	I	30	133	I	14
38	I	16	62	I	26	86	I	36	110	I	46	134	I	14
39	I	7	63	I	24	87	I	24	111	I	13	135	I	18
40	4	5	64	I	14	88	I	26	112	7	8	136	I	16

Приложение (продолжение)

N	s ₀	s ₁	N	s ₀	s ₁	N	s ₀	s ₁	N	s ₀	s ₁	N	s ₀	s ₁
I37	I	16	I6I	I	I7	I85	I	40	209	I	22	233	I	7I
I38	2	15	I62	I	I7	I86	2	39	2I0	I	20	234	I	86
I39	I	30	I63	I	I7	I87	I	57	2II	I	20	235	I	65
I40	I	32	I64	I	50	I88	I	22	2I2	I	78	236	I	42
I4I	I	54	I65	3	40	I89	I	18	2I3	I	59	237	I	44
I42	I	64	I66	I	22	I90	I	18	2I4	I	38	238	I	64
I43	I	15	I67	I	36	I9I	I	20	2I5	I	40	239	I	25
I44	8	9	I68	I	I6	I92	2	2I	2I6	I	58	240	I	II0
I45	I	17	I69	I	I6	I93	I	44	2I7	I	64	24I	I	2I
I46	I	64	I70	I	20	I94	I	42	2I8	I	100	242	I	2I
I47	I	54	I7I	I	18	I95	I	54	2I9	I	19	243	I	2I
I48	I	32	I72	I	18	I96	I	86	220	10	II	244	I	72
I49	I	34	I73	I	5I	I97	I	23	22I	I	2I	245	I	88
I50	2	2I	I74	2	33	I98	2	8I	222	I	100	246	I	66
I5I	I	20	I75	I	40	I99	I	19	223	I	68	247	I	46
I52	I	16	I76	I	38	200	I	19	224	I	62	248	I	26
I53	I	16	I77	I	54	20I	I	19	225	I	40	249	I	69
I54	I	18	I78	I	78	202	I	56	226	I	42	250	I	20
I55	I	57	I79	I	17	203	I	36	227	I	6I	25I	I	20
I56	I	46	I80	9	10	204	I	38	228	I	82	252	I	24
I57	I	34	I8I	I	19	205	I	24	229	I	24	253	I	22
I58	I	36	I82	I	82	206	I	74	230	I	20	254	I	22
I59	I	2I	I83	I	54	207	I	18	23I	I	20	255	I	II7
I60	I	72	I84	I	42	208	I	18	232	I	22	256	I	92