МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1979 год Выпуск 81

УДК 517.5

ЛАКУНАРНЫЕ СПЛАЙНЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ

И.А. Пахнутов

1. В статье предлагается простое обобщение результатов, полученных в [1-2]. Рассмотрим разбиение $\Delta_N = \{x_p^{(N)}: a = x_0^{(N)} < x_1^{(N)} < \ldots < x_N^{(N)} = b\}$ конечного отрезка $K = [a,b] \subset R$. Пусть заданы целые числа $n, \gamma, r, k \geq 0$ и множество целых чисел $s = \{s_i\}_{i=1}^r$ такие, что $r = k + \gamma + 1 \leq n$ и $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_r < n$. Выберем $k+2$ неотрицательных числа $\{\tau_i,\ i = 0,\ldots,k+1,\ 0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{k+1} = 1\} = \tau$ и по ним построим множества $\delta_{pN} = \{x_{pi}^{(N)} = x_p^{(N)} + (x_{p+1}^{(N)} - x_p^{(N)})\tau_i : x_p^{(N)}, x_{p+1}^{(N)} \in \Delta_N,\ i = 0,\ldots,k+1\}, p = 0,\ldots,N-1$. Множества $\delta_N = \bigcup_{p=0}^{N-1} \delta_{pN} \supset \Delta_N$ будем называть сетками. Обозначим $h_{pN} = x_{p+1}^{(N)} - x_p^{(N)}, p = 0,1,\ldots,N-1, H_N = \max_p h_{pN}, h_N = \min_p h_{pN}$. Для каждого $\beta \geq 1$ через $\Delta(\beta)$ будем обозначать множество всевозможных сеток $\delta_N \subset K$ таких, что $H_N / h_N \leq \beta, \forall N$, а через $\delta(\beta)$ – множество таких сеток из $\Delta(\beta)$, для которых $\tau_i = 1 - \tau_{k+1-i},\ i = 0,1,\ldots,k+1$. Через $C^\ell(K)$ будем обозначать пространство $\ell (\ell \geq 0)$ раз непрерывно дифференцируемых на K функций f с нормой $\|f\|_{C^\ell(K)} = \max\{\sup_{x \in K}|f|, \sup_{x\in K}|f^{(\ell)}|\}, C(K) = C^0(K), \varphi(x)_+ = \max\{0, \varphi(x)\}, \omega(f,t) = \sup_{|x-y|\leq t, x,y\in K} |f(x) - f(y)|$, а также $J = \{s_1, s_1+1, \ldots, n-1\}$. Для $x = \{x_1,\ldots,x_\ell\}^T$ (T – знак транспонирования) через $\|x\|$ обозначим норму $\|x\| = \max_{1\leq i\leq \ell} |x_i|$. Через $\|\cdot\|$ обозначим также соответствующую норму в пространстве $(\ell \times \ell)$ – матриц. Если не оговорено противное, ниже будем считать, что числа n, γ, r, k, β, а также множества s и τ – одни и те же для всех рассматриваемых сеток δ_N,

поэтому в приводимых ниже оценках зависимость констант от этих параметров специально отмечаться не будет.

Для каждой $f \in C^{\mu}(K)$, $\mu = n+\gamma$, определим сплайн $S_N = S(f, \delta_N)$ степени μ дефекта $\gamma+1$ (сплайн с дополнительными узлами – в дальнейшем просто сплайн) условиями [I]:

а) $S_N \in C^{n-1}(K)$;

б) на каждом отрезке $[x_p^{(N)}, x_{p+1}^{(N)}]$, $p=0,1,\ldots, N-1$, разбиения Δ_N сплайн $S_N \in C^{\mu-1}([x_p^{(N)}, x_{p+1}^{(N)}])$;

в) на каждом отрезке $[x_{pj}^{(N)}, x_{p,j+1}^{(N)}]$, $0 \le p < N$, $0 \le j \le k$, $S_N \subset P_\mu$, т.е. является полиномом степени не выше μ;

г) $S_N^{(i)}(x_p^{(N)}) = f^{(i)}(x_p^{(N)})$ для всех $i = 0,1,\ldots, n-1$, если $p=0$ и i пробегает s при $p>0$.

Такие сплайны удобно применять для приближенного решения различных задач с начальными условиями (например, задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, восстановления функций на отрезке, где на левом конце может быть задано больше информации о функции, чем в других точках отрезка, и т.д). В [I] изучены условия сходимости сплайнов "а" - "г" к интерполируемым функциям на произвольных сетках $\delta_N \in \Delta(\beta)$ при $N \to \infty$ в том случае, когда множество s имеет вид $s = \{s_i = s_1 + i - 1,\ i = 1,\ldots, r\}$. Здесь результаты работы [I] будут распространены на случай произвольных множеств s вида

$$s = \{ s_i : 0 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_r < n \}. \tag{I}$$

Заметим, что в доказательствах соответствующих утверждений можно без ограничения полагать $s_1 = 0$. Действительно, если $s_1 > 0$, то $\widetilde{S} = S_N^{(s_1)}$ также будет сплайном с параметрами $\widetilde{n} = n - s_1$, $\widetilde{k} = k$, $\widetilde{r} = r$, $\widetilde{\gamma} = \gamma$, $\widetilde{s} = \{\widetilde{s}_i = s_i - s_1,\ i = 1,\ldots, r\}$. Кроме того, в этом случае имеем

$$\| S^{(\ell)}(f, \delta_N) - f^{(\ell)} \|_{C(K)} = \begin{cases} \| \widetilde{S}^{(\ell - s_1)}(f, \delta_N) - f^{(\ell)} \|_{C(K)}, & \ell \ge s_1, \\ \left\| \int_a^x \frac{(x-t)^{s_1 - \ell - 1}}{(s_1 - \ell - 1)!} (\widetilde{S}_N(t) - f^{(s_1)}(t)) dt \right\|_{C(K)}, & 0 \le \ell < s_1. \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда легко следует сходимость (или расходимость) сплайнов при $s_1 > 0$, если таковая имеет место при $s_1 = 0$.

2. Пусть при $\gamma>0$ наряду с τ фиксированы произвольные числа $\tau_\xi<\tau_{\xi+1}<\ldots<\tau_{-1}<0$, где $\xi=-\mu$, если $\gamma>0$, и $\xi=0$ при $\gamma=0$. Тогда всякий сплайн S_N на каждом отрезке $[x_p^{(N)}, x_{p+1}^{(N)}]$, $x_p^{(N)}, x_{p+1}^{(N)}\in\Delta_N$, можно представить в виде [I]:

$$S_N(x)=\sum_{i=0}^{n-1} S_N^{(i)}(x_p^{(N)})\frac{(x-x_p^{(N)})^i}{i!}+\frac{1}{\mu!}\sum_{j=\xi}^{k}\alpha_{pj}(x-x_{pj}^{(N)})_+^{\mu}, \tag{3}$$

где $x_{pj}^{(N)}=x_p^{(N)}+h_{pN}\tau_j$ $(\xi\le j\le k)$, и коэффициенты α_{pj}, $j=\xi,\ldots,k$, удовлетворяют следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=\xi}^{k}\alpha_{pj}(1-\tau_j)^{\mu-\ell}=(\mu-\ell)!\,h_{pN}^{\ell-\mu}\left\{S_N^{(\ell)}(x_{p+1}^{(N)})-\sum_{i=\ell}^{n-1}S_N^{(i)}(x_p^{(N)})\frac{h_{pN}^{i-\ell}}{(i-\ell)!}\right\},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \ell\in\mathcal{S},\\ &\sum_{j=\xi}^{-1}\alpha_{pj}\tau_j^{\mu-i}=0,\quad i=0,\ldots,n-1,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

с матрицей $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{k-\xi+1}$. При $\xi\ne0$ нетрудно показать, что матрицу A в (4) можно представить в виде $A=A^{(1)}A^{(2)}A^{(3)}$, где матрицы $A^{(\ell)}=(a_{ij}^{(\ell)})_{i,j=1}^{n+r}$, $\ell=1,2,3$, определяются соотношениями:

$$a_{ij}^{(1)}=\begin{cases}(\mu-s_i)!\,h_{pN}^{s_i-\mu}, & i=j\le r,\\ 1, & r<i=j\le n+r,\\ 0, & i\ne j;\end{cases}$$

$$A^{(2)}=\begin{pmatrix}B^{(1)} & B^{(2)}\\ B^{(3)} & 0\end{pmatrix};$$

$$a_{ij}^{(3)}=\begin{cases}(-\tau_{\xi+j-1}h_{pN})^{\mu-i+1}/(\mu-i+1)!, & i\le\mu+1,\ j\le\mu;\\ 1, & i=j\ge\mu+1;\\ 0 & \text{— в остальных случаях.}\end{cases}$$

Здесь матрицы $B^{(\ell)}=(b_{ij}^{(\ell)})$, $1\le\ell\le3$, имеют соответственно размеры $(r\times n)$, $(r\times r)$ и $(n\times n)$, причем

$$b_{ij}^{(1)}=\begin{cases}h_{pN}^{j-s_i-1}/(j-s_i-1)! & n\ge j>s_i,\ i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,n;\\ 0, & j\le s_i;\end{cases}$$

$$b_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{\overset{\circ}{h}{}_{pN}^{\,n+j-s_i-1}}{(n+j-s_i-1)!}, & 1 \le j \le \gamma+1; \\ (1-\tau_{i-\gamma-1})^{\mu-s_i} h_{pN}^{\mu-s_i} / (\mu-s_i)!, & \gamma+2 \le j \le r; \end{cases}$$

$$b_{ij}^{(3)} = \begin{cases} (\mu-i+1)!(-h_{pN})^{i-1-\mu}, & 1 \le i = j \le n; \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

Так же (см. в [3]) нетрудно показать, что матрица $B^{(2)}$ удовлетворяет условию строгой положительности [4] при всех τ_i, $i=1,2,\ldots,k$, указанного выше вида, и поэтому $det(B^{(2)})$ и $det(A^{(2)})$ отличны от нуля. Но так как $A^{(3)}$ - матрица типа Вандермонда, то и $det(A) \ne 0$. Если $\xi = 0$, то вторая строка в (4) отсутствует и матрица A - матрица типа Вандермонда, и, следовательно, в этом случае также $det(A) \ne 0$. Это, в свою очередь, определяет единственный сплайн, удовлетворяющий условиям "а" - "г". Кроме того, справедливы тождества (5) из [I]:

$$S_N^{(l)}(x) h_{pN}^{l} / l! = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{li}(t) S_N^{(i)}(x_p^{(N)}) \frac{h_{pN}^{i}}{i!} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \rho_{lj}(t) S_N^{(s_j)}(x_{p+1}^{(N)}) \frac{h_{pN}^{s_j}}{s_j!}, \quad l=0,\ldots,\mu, \qquad (5)$$

$$x \in [x_p^{(N)}; x_{p+1}^{(N)}], \; t = (x - x_p^{(N)}) h_{pN}^{-1}, \quad p = 0,\ldots,N-1,$$

где

$$\eta_{li}(t) = \binom{i}{l} t^{i-l} - \sum_{j=1}^{r} \binom{i}{s_j} \rho_{lj}(t),$$

$$\rho_{lj}(t) = \binom{\mu}{l} \binom{\mu}{s_j}^{-1} \nu_{lj}(t), \qquad (6)$$

$$\nu_{lj}(t) = \sum_{q=\xi}^{k} g_{q-\xi+1,j} (t-\tau_q)_+^{\mu-l},$$

$$\ell=0,\dots,\mu,\quad i=0,\dots,n-1,\quad j=1,\dots,r.$$

Здесь $g_{ij}\ (i,j=1,\dots,k-\xi+1)$ – элементы матрицы $G=A^{-1}$.

Равенства (5) представляют собой одношаговые разностные формулы, в которых использованы производные. Оценки остаточных членов этих разностных формул приведены в [I, (6)]. В итоге справедлива

ТЕОРЕМА I. Пусть целые числа $n, r, z, k \geq 0$, таковы, что $z=k+r+1\leq n$. Если множество $\tau=\{0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_{k+1}=1\}$, а множество S удовлетворяет условию (I), то на любой сетке $\delta_N\in K$ для произвольной $f\in C^q(K)$, $n-1\leq q\leq \mu=n+r$, сплайн $S_n=S(f,\delta_N)$ условиями "а" – "г" определяется однозначно и выполняются равенства:

$$f^{(\ell)}(x)h^{\ell}_{pN}/\ell!=\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{\ell i}(t)f^{(i)}(x_p^{(N)})h^{i}_{pN}/i!+$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\rho_{\ell j}(t)f^{(s_j)}(x_{p+1}^{(N)})h^{s_j}_{pN}/s_j!+R_{\ell p}(x),\quad 0\leq\ell\leq q,\tag{7}$$

где $x\in[x_p^{(N)},x_{p+1}^{(N)}]$, $p=0,\dots,N-1$, $t=(x-x_p^{(N)})h^{-1}_{pN}$,

$$|R_{\ell p}(x)|\leq Ch^{q}_{pN}\,\omega(f^{(q)},h_{pN}),$$

и константа C не зависит от f и h_{pN}, $p=0,\dots,N-1$, $\forall N$.

Всюду ниже для краткости будем употреблять обозначения

$$\eta_{\ell i}=\eta_{\ell i}(1),\ \rho_{\ell j}=\rho_{\ell j}(1),\ \nu_{\ell j}=\nu_{\ell j}(1),\tag{8}$$
$$\ell=0,\dots,\mu,\quad i=0,\dots,n-1,\quad j=1,\dots,r.$$

3. В [I,2] отмечалось, что сходимость сплайнов к интерполируемой функции может существенно зависеть от выбора множества $\tau=\{\tau_i: i=0,1,\dots,k+1\}\subset[0,I]$. Так же, как и в [I,2], будем рассматривать некоторое однопараметрическое семейство множеств τ, определяемое следующим образом. При $k\geq1$ фиксируем k чисел из отрезка [0,I] $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_k<1$ так, что $\alpha_i=1-\alpha_{k+1-i}$, $i=$ I, ..., k, и положим для $\lambda\subset(0,\mathrm{I})$

$$\tau_i=\lambda\alpha_i,\quad i=1,\dots,k,\quad \tau_0=0,\ \tau_{k+1}=1\tag{9}$$

(числа τ_j, $\xi\leq j<0$, остаются фиксированными).

ЛЕММА I. Пусть τ_i, $i=1,\dots,k$, выбираются при каждом $\lambda\in(0,1]$, как указано в (9). Тогда $\nu_{\ell i}$ $\forall\ell\in J\setminus s$, $i=1,\dots,r$, как функции от λ, можно продолжить до непрерывных функций на всем отрезке $[0,1]$.

Для доказательства этой леммы нам потребуются следующие простые утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть a - произвольное действительное число и P_m - полином степени $m\geqslant 0$, имеющий действительные корни x_i, $i=1,\dots,m$ (не обязательно различные), причем все x_i лежат на прямой по одну сторону от a. Пусть также $\ell_1<\ell_2<\dots<\ell_n$ $(n>0,\ \ell_n<m+n)$ - неотрицательные целые числа. Тогда определитель матрицы $D=(d_{ij})_{i,j=1}^{n}$ с элементами

$$d_{ij}=\binom{\ell_i}{j-1}P_m^{(\ell_i-j+1)}(a),\qquad i,j=1,\dots,n,$$

отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольные n чисел b_i, $i=1,\dots,n$, и определим полином R_{n-1} степени $n-1$ условиями

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell_i}\left[P_m(x)R_{n-1}(x)\right]_{x=a}=b_i\qquad(i=1,\dots,n)\tag{10}$$

(число условий совпадает с числом коэффициентов полинома R_{n-1}).

Если все b_i $(i=1,\dots,n)$ равны нулю, то из (10), пользуясь теоремой Ролля, легко получаем $R_{n-1}(x)\equiv 0$. Отсюда следует однозначная разрешимость (10) при любых указанных b_j, x_i, $j=1,\dots,n$, $i=1,\dots,m$, что и доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Условие леммы 2 можно несколько ослабить. Действительно, легко заметить, что лемма 2 остается справедливой, если условие $x_i>a$ (или $x_i<a$), $i=1,\dots,m$, заменить следующим: $P_m^{(\ell)}(a)\neq 0$, $\ell=0,1,\dots,m-1$.

ЛЕММА 3. Пусть P_m, a, ℓ_i $(i=1,\dots,n)$ такие же как в лемме 2, а полином R_{n-1} удовлетворяет условиям (10) для некоторых b_i, $i=1,\dots,n$. Тогда коэффициенты полинома $R_{n-1}(x)$ определяются условиями (10) как непрерывные функции от $x_1,\dots,x_m$ для всех x_i из $(a,+\infty)$ (либо из $(-\infty,a)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается тривиально из однозначной разрешимости (I0) при любых $x_i \in (a,+\infty)$, $i=1,\ldots,$ (либо $x_i \in (-\infty, a)$, $\forall i$, см. лемму 2), и непрерывности обратной матрицы D^{-1} как функции элементов матрицы D.

Теперь вернемся к доказательству леммы I.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как в [I,2], можно показать, что для каждого $\lambda \in (0,1]$ из (6) и (8) следует, что $\nu_{\ell i}$ определяются однозначно как коэффициенты полинома

$$Q_{\mu,\ell}(x) \overset{def}{=} \nu_{\ell 1} x^{\mu - s_1} + \ldots + \nu_{\ell r} x^{\mu - s_r} \tag{II}$$

условиями

$$Q_{\mu,\ell}(x_i) = x_i^{\mu-\ell}, \quad x_i = 1-\tau_i, \quad i=1,\ldots,k, \tag{I2}$$

и

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^i \left(Q_{\mu,\ell}(x) - x^{\mu-\ell}\right)\Big|_{x=1} = 0, \quad i=0,\ldots,\gamma, \tag{I3}$$

или, что то же самое, из линейной системы уравнений $\mathcal{U}\nu_\ell = v_\ell$, где $\nu_\ell = \{\nu_{\ell 1},\ldots,\nu_{\ell r}\}^T$, $v_\ell = \{\binom{\mu-\ell}{0},\ldots,\binom{\mu-\ell}{\gamma},(1-\tau_1)^{\mu-\ell},\ldots,(1-\tau_k)^{\mu-\ell}\}^T$, а матрица $\mathcal{U}$ имеет вид:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \binom{\mu-s_1}{0} & \binom{\mu-s_2}{0} & \ldots & \binom{\mu-s_r}{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{\mu-s_1}{\gamma} & \binom{\mu-s_2}{\gamma} & \ldots & \binom{\mu-s_r}{\gamma} \\ (1-\tau_1)^{\mu-s_1} & (1-\tau_1)^{\mu-s_2} & \ldots & (1-\tau_1)^{\mu-s_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (1-\tau_k)^{\mu-s_1} & (1-\tau_k)^{\mu-s_2} & \ldots & (1-\tau_k)^{\mu-s_r} \end{pmatrix}$$

В силу теоремы I (о единственности сплайнов), $\det(\mathcal{U}) \neq 0$ при всех τ, определяемых условием (9) и $\lambda \neq 0$. Отсюда следует, что $\nu_{\ell i}$, $\forall \ell \in J \setminus s$, непрерывно зависят от λ на (0,I]. Пусть для простоты $s_1 = 0$. Заметим, что, в силу (II) - (I3), полином $Q_{\mu,\ell}$ можно записать в виде

$$Q_{\mu,\ell}(x) = x^{\mu-\ell} + x^{\mu-q}(x-1)^{\gamma+1}\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)R_{q-r}(x), \tag{I4}$$

где $q=max(\ell,s)$ и полином $R_{q-r}\in P_{q-r}$ удовлетворяет условиям

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu-i}\left[x^{\mu-q}(x-1)^{r+1}\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)R_{q-s}(x)\right]_{x=0}=\begin{cases}-(\mu-\ell)!\,, & i=\ell,\\ 0\,, & i\neq\ell,\ \forall i\leq q,\ i\notin s.\end{cases}\qquad (15)$$

По лемме 3, коэффициенты полинома R_{q-r} условиями (15) определяются однозначно как непрерывные функции x_i, $i=1,\dots,k$, при всех $x_i>0$ (т.е. при любых $\lambda\leq 1$) и, следовательно, из (11), (14), (15) $\nu_{\ell i}$, $\forall\ell\in J\setminus s$, $i=1,\dots,r$, определяются как непрерывные функции λ для всех $\lambda\leq 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $k>0$ и τ_i, $i=1,\dots,k$, определяются условием (9). Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $\lambda_0\in(0,1]$ такое, что при всех $\lambda\in(0,\lambda_0]$

$$|\eta_{\ell i}|\leq\varepsilon,\quad \forall\ell\in J\setminus s,\quad i=n-k,\dots,n-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (6) и (11) непосредственно следует, что

$$\eta_{\ell i}=\frac{i!}{\ell!(\mu-\ell)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{\mu-i}\left[x^{\mu-\ell}-Q_{\mu,\ell}(x)\right]_{x=1}\ \forall\ell\in J\setminus s,\ i=0,\dots,n-1.\quad (16)$$

Полагая теперь в (14) $\lambda=0$ (т.е. $x_i=1$, $i=1,\dots,k$), получаем

$$Q_{\mu,\ell}(x)=x^{\mu-\ell}+x^{\mu-q}(x-1)^{r}R_{q-r}(x).$$

Тогда отсюда и из (16) следует, что при $\lambda=0$ можно положить $\eta_{\ell i}=0$ для всех $\ell\in J\setminus s$, $\mu-i<r$, т.е. при $n-k\leq i<n$, откуда, в силу леммы 1 и (6), получим требуемое.

Рассмотрим множество (множество лакун)

$$\nu=\{\nu_i: s_1<\nu_1<\nu_2<\dots<\nu_{n-r-s_1}\}=J\setminus s.\qquad (17)$$

В [1-2] получены условия сходимости сплайнов к интерполируемой функции для случаев $n-r-s_1=1$ и $\nu_1>s_r$ (теоремы 2 и 4 из [1]). Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть задана последовательность разбиений $\Delta_N\subset K$, $N\to\infty$, таких, что $H_N/h_N\leq\beta$ для некоторого $\beta\geq 1$, и соответствующая последовательность функций $\tilde f_N\in C^{n-1}(K)$. Пусть также множества s и ν имеют соответственно вид (1) и (17). Если $\nu_1\geq n-k$ либо $n-r-s_1=1$, то числа $\tau_1,\dots,\tau_k$ из (0,1) (при $k>0$) можно выбрать так, что для любой f из $C^q(K)$, $n-1\leq q\leq\mu$, удовлетворяющей условию

$$\left|\tilde f_N^{(i)}(x_\rho^{(N)})-f^{(i)}(x_\rho^{(N)})\right|\leq\theta_1+\theta_2(h_{\rho N})h_{\rho N}^i \tag{I8}$$

($\rho=0,1,\dots,N$, $i=0,\dots,n-1$ при $\rho=0$ и $i=s_1,s_2,\dots,s_z$, при $\rho>0$, $\theta_1\geq0$; $\theta_2(x)\geq0$ – некоторая неубывающая на $[0,+\infty)$ функция), выполняются оценки

$$\|S^{(\ell)}(\tilde f_N,\delta_N)-f^{(\ell)}\|_{C(K)}\leq$$
$$\leq C(\theta_1H_N^{s_1}+\theta_2(H_N)+H_N^q\,\omega(f^{(q)},H_N))H_N^{-\max(\ell,s_1)},$$

$\ell=0,1,\dots,q$, и константа C не зависит от f и H_N. Здесь производные сплайнов в точках разрыва принимаются равными соответствующим левым производным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $v_1\geq n-k$. Обозначим через Ξ матрицу (η_{ij}) для всех $i,j\in v$; $E_{\rho\ell}=\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell(S(\tilde f_N,\delta_N)-f)(x_\rho^{(N)})\right|H_N^\ell/\ell!$, $\ell=0,\dots,q$, $\rho=0,\dots,N$; $E_\rho=\{E_{\rho,v_1},E_{\rho,v_2},\dots,E_{\rho,v_{n-r-s_1}}\}^T$; $D_{\rho,\ell}=\sum_{i=1}^{r}(\eta_{\ell,s_i}E_{\rho,s_i}+\beta_{\ell i}E_{\rho+1,s_i})+|R_{\ell\rho}(x_{\rho+1}^{(N)})|$, для всех $\ell\in v$, $\rho=0,1,\dots,N-1$; $R_{\ell\rho}$ – остаточный член в (7); $D_\rho=\{D_{\rho,v_1},D_{\rho,v_2},\dots,D_{\rho,v_{n-r-s_1}}\}^T$. Из (I8) и (7) следует, что

$$|D_\rho|\leq C_1(\theta_1H_N^{s_1}+\theta_2(H_N)+C_2H_N^q\,\omega(f^{(q)},H_N)),\quad\forall\rho,N, \tag{I9}$$

для некоторых $C_1,C_2\geq0$ и

$$|E_0|\leq C_3\,\theta_1H_N^{s_1}+\theta_2(H_N), \tag{20}$$

где $C_3=\max\limits_{\ell\in v,N}\{H_N^{\ell-s_1}/\ell!\}$. Выберем в соответствии с леммой 4 числа $\tau_1,\dots,\tau_k$ $(k>0)$ так, чтобы $|\Xi|\leq\rho^{1-n}\varkappa$ для некоторого $\varkappa<1$. Вычитая (7) из (I8) для $\ell\in v$ и учитывая неравенства (I9)-(20) и оценку для $\|\Xi\|$, получаем

$$|E_{\rho+1}|\leq\rho^{n-1}\|\Xi\|\cdot\|E_\rho\|+\|D_\rho\|\leq\varkappa\|E_\rho\|+\|D_\rho\|\leq$$
$$\leq\varkappa^{\rho+1}\|E_0\|+\frac{1}{1-\varkappa}\max_\rho\|D_\rho\|\leq$$
$$\leq C_4(\theta_1H_N^{s_1}+\theta_2(H_N))+C_5H_N^q\,\omega(f^{(q)},H_N), \tag{2I}$$

$$\rho = 0,1,\ldots,N-1.$$

Теперь из (5), (7), (I8), используя (2I), легко получаем требуемое для случая $v_1 \geq n-k$.

Если $n-r-s_1=1$, т.е. $v=\{v_1\}$, то $\tau_1,\ldots,\tau_k$ $(k>0)$ можно выбрать так, что $|\eta_{v_1,v_2}| = \varkappa <$I[I, (22)]. Повторяя предыдущую часть доказательства, получаем требуемое и в этом случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства теоремы 2 видно, что если величина $\|\Xi\|$ отделена от нуля при всех τ, то можно построить последовательность $\Delta_N \subset K$, на которой указанная в теореме сходимость не имеет места. В этом смысле условия теоремы можно считать окончательными. Например, параметры $\mu = n = 5$, $\gamma = 0$, $k=2$, $r=3$, $s=\{0,1,2\}$ удовлетворяют условиям теоремы, и здесь можно получить сходимость соответствующих сплайнов к интерполируемой функции с указанными в теореме оценками. Если в этом случае $s=\{0,2,4\}$, то условия теоремы не выполняются и непосредственные вычисления показывают, что для любых τ имеет место $\|\Xi\|>1$. Для $\mu=6$, $n=6$, $\gamma=0$, $k=3$, $r=4$, $s=\{0,1,2,5\}$ условия теоремы 2 выполнены, и соответствующее τ можно выбрать, тогда как для $\mu=7$, $n=6$, $\gamma=1$, $k=2$, $r=4$, $s=\{0,2,4,5\}$ условия теоремы не выполняются и также непосредственные вычисления показывают, что $\|\Xi\|>1$ при любых τ_i : $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_k<\tau_{k+1}=1$.

Литература

I. ПАХНУТОВ И.А. Сходимость сплайнов с дополнительными узлами. - Деп. ВИНИТИ № 33-78 Деп.

2. ПАХНУТОВ И.А. Сходимость сплайнов с дополнительными узлами. - В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы, вып. 72.) Новосибирск, 1977, с. 30-43.

3. ПАХНУТОВ И.А. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью сплайнов. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 65.) Новосибирск, 1975, с. 96-129.

4. KARLIN S. Total positivity, Interpolation by Splines, and Green functions of differential operators.- J.Approximat.Theory, 1972, v.6, N 1, p.6-49.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 октября 1979 года