МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
1979 год (Вычислительные системы) Выпуск 81

УДК 517.5

О ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ БИЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Б.М. Шумилов

Идея метода локальной сплайн-аппроксимации восходит к работе Шенберга [1], в которой предлагалось определять значение аппроксимационного сплайна в произвольной точке области в виде линейной комбинации значений аппроксимируемой функции из некоторой окрестности этой точки. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах ряда авторов,из которых следует отметить статью Лайка и Шумейкера [2], где был построен широкий класс локальных методов сплайн-аппроксимации, позволяющих приблизить гладкие функции с порядком точности, равным порядку наилучшего приближения. В работах автора [3, 4] для случаев линейных сплайнов одной и двух переменных была предложена модификация метода, гарантирующая приближение с погрешностью аппроксимации, асимптотически равной погрешности наилучшего приближения.

Здесь мы рассматриваем аналогичные вопросы для приближения билинейными сплайнами в прямоугольной области на плоскости. Получен способ уменьшения погрешности аппроксимации билинейными сплайнами по сравнению с интерполяционным случаем.

Пусть в прямоугольнике $R:[a\le x\le b,\ c\le y\le d]$ задана сетка $\Delta=\Delta_x\times\Delta_y$, где

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b,$$

$$\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_N = d .$$

Билинейным сплайном называется непрерывная функция $S_{11}(x,y)$, которая в каждой из ячеек $R_{kl}:[x_k\le x\le x_{k+1},\ y_l\le y\le y_{l+1}]$ $(0\le k\le N-1,$ $0\le l\le M-1)$ является билинейной функцией вида $a_1+a_2x+a_3y+$ $+a_4xy$. Пространство билинейных сплайнов является тензорным произведением двух пространств сплайнов одной переменной $S_1(x)$ и

$\widetilde{S}_1(y)$, связанных соответственно с сетками Δ_x и Δ_y . Интерполяционный билинейный сплайн, удовлетворяющий условиям $S_{11}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) = f_{ij}$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, M$, имеет вид

$$S_{11}(f; x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} f_{ij} \, B_i(x) \, \widetilde{B}_j(y), \qquad (1)$$

где $B_i(x)$, $\widetilde{B}_j(y)$ - базисные функции пространств $S_1(x)$ и $\widetilde{S}_1(y)$. Напомним, что

$$B_i(x) = \begin{cases} (x - x_i)/h_{i-1}, & x \in [x_{i-1}, x_i]; \\ (x_{i+1} - x)/h_i, & x \in [x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$ и точки $x_{-1} < x_0$, $x_{N+1} > x_N$ произвольны.

Выражения для $\widetilde{B}_j(y)$ записываются аналогичным образом.

В предположении, что $f(x,y) \in C^2[R]$, известна оценка

$$\| f(x,y) - S_{11}(f; x, y) \|_{k,\ell} \leq \frac{1}{8} \left(h_k^2 \| f_x''(x,y) \|_{k,\ell} + \widetilde{h}_\ell^2 \| f_y''(x,y) \|_{k,\ell} \right), \qquad (2)$$

где $\widetilde{h}_\ell = y_{\ell+1} - y_\ell$, $\| g(x,y) \|_{k,\ell} = \max\limits_{x,y \in R_{k\ell}} | g(x,y) |$.

Мы будем рассматривать вопрос о приближении функции $f(x,y)$ сплайнами вида

$$S(x,y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} (f_{ij} + b_{ij} + \widetilde{b}_{ij}) B_i(x) \widetilde{B}_j(y), \qquad (3)$$

где

$$b_{0j} = -\frac{1}{16} h_0^2 f_x''(x_0, y_j);$$

$$b_{Nj} = -\frac{1}{16} h_{N-1}^2 f_x''(x_N, y_j);$$

$$b_{ij} = -\frac{1}{16} \max(h_{i-1}^2, h_i^2) f_x''(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = 0, 1, \ldots, M;$$

$$b_{i0} = -\frac{1}{16} \widetilde{h}_0^2 f_y''(x_i, y_0);$$

$$b_{iM} = -\frac{1}{16} \widetilde{h}_{M-1}^2 f_y''(x_i, y_M);$$

$$\tilde{b}_{ij} = -\frac{1}{16}\, max\,(\tilde{h}_{j-1}^2, \tilde{h}_j^2) f''_y(x_i, y_j),\ j = 1,2,\dots, M-1,$$
$$i = 0,1,\dots, N .$$

ТЕОРЕМА I. Если $f(x,y) \in C^2[R]$, то

$$\| f(x,y) - S(x,y) \|_{k,\ell} \le \frac{1}{16} \left(H_k^2 \| f''_x(x,y) \|_{k\ell} + \tilde{H}_\ell^2 \| f''_y(x,y) \|_{k,\ell} \right) + O(\tilde{H}_k^2) + O(\tilde{H}_\ell^2), \tag{4}$$

где $H_0 = max\,(h_0, h_1)$;

$H_{N-1} = max\,(h_{N-2}, h_{N-1})$;

$H_k = \max\limits_{i=k-1,k,k+1} h_i^2, \quad k \ne 0, N-1;$

$\tilde{H}_0 = max\,(\tilde{h}_0, \tilde{h}_1)$;

$\tilde{H}_{M-1} = max\,(\tilde{h}_{M-2}, \tilde{h}_{M-1})$;

$\tilde{H}_\ell = \max\limits_{j=\ell-1,\ell,\ell+1} \tilde{h}_\ell^2, \quad \ell \ne 0, M-1.$

Коэффициент I/I6 в оценке (4) уменьшить нельзя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем остаточный член аппроксимации по формуле (3) в виде

$$f(x,y) - S(x,y) = \sum_{j=0}^{M} \left[f(x,y_j) - \sum_{i=0}^{N} (f(x_i, y_j) + b_{ij}) B_i(x) \right] \tilde{B}_j(y) +$$
$$+ f(x,y) - \sum_{j=0}^{M} \left(f(x,y_j) + \sum_{i=0}^{N} \tilde{b}_{ij}\, B_i(x) \right) \tilde{B}_j(y) .$$

Рассмотрим выражение в квадратных скобках. Для $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, N-1$, разлагая значения $f(x_i, y_j)\,(i = k, k+1)$ в окрестности точки x в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и используя соотношения $\sum\limits_i B_i(x) = 1, \sum\limits_i x_i B_i(x) = x$, получаем

$$E_j(x) = f(x,y_j) - \sum_{i=k}^{k+1} (f(x_i, y_j) + b_{ij})\, B_i(x) =$$

$$= -\frac{1}{2} f_x''(\xi_{kj}(x), y_j)(x-x_k)(x_{k+1}-x) - \sum_{i=k}^{k+1} b_{ij} B_i(x),$$

$$x_k \le \xi_{kj}(x) \le x_{k+1}$$

Так как величины $f_x''(\xi_{kj}, y_j), f_x''(x_k, y_j), f_x''(x_{k+1}, y_j)$ отличаются на o (I), то

$$\max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |E_j(x)| \le \frac{1}{2} \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |f_x''(x, y_j)| \, |(x-x_k)(x_{k+1}-x) -$$

$$-\frac{1}{8} \sum_{i=k}^{k+1} \max(h_{i-1}^2, h_i^2) \, B_i(x)| + o(H_k^2) \le$$

$$\le \frac{1}{16} H_k^2 \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |f_x''(x, y_j)| + o(H_k^2).$$

Зафиксируем $x \in [x_k, x_{k+1}]$, тогда для $y \in [y_l, y_{l+1}]$, $l \ne 0, M-1$,

$$E(x,y) = f(x,y) - \sum_{j=l}^{l+1} \Big(f(x, y_j) + \sum_{i=k}^{k+1} \tilde{b}_{ij} B_i(x)\Big) \tilde{B}_j(y) =$$

$$= -\frac{1}{2} f_y''(x, \eta_j(y(x)))(y-y_l)(y_{l+1}-y) -$$

$$-\sum_{j=l}^{l+1} \sum_{i=k}^{k+1} \tilde{b}_{ij} B_i(x) \tilde{B}_j(y), \quad y_l \le \eta_j(y(x)) \le y_{l+1}.$$

Аналогично, поскольку величины $f_y''(x, \eta_j(y(x))), f_y''(x_i, y_j), i = k, k+1; j = l, l+1$ отличаются на o (I), то

$$\max_{y_l \le y \le y_{l+1}} |E(x,y)| \le \frac{1}{2} \|f_y''(x,y)\|_{k,l} \, |(y-y_l)(y_{l+1}-y) -$$

$$-\frac{1}{8} \sum_{j=l}^{l+1} \max(h_{j-1}^2, h_j^2) \, \tilde{B}_j(y)| + o(\tilde{H}_l^2) \le$$

$$\le \frac{1}{16} \tilde{H}_l^2 \|f_y''(x,y)\|_{k,l} + o(\tilde{H}_l^2).$$

Так как

$$\|f(x,y) - S(x,y)\|_{k,l} \le \Big\|\sum_{j=l}^{l+1} E_j(x) \tilde{B}_j(y)\Big\|_{k,l} + \|E(x,y)\|_{k,l},$$

то, используя полученные результаты, приходим к неравенству (4). Случаи, когда $k=0, N-1$, $l=0, M-1$, рассматриваются аналогично.

Для некоторых функций предложенный алгоритм аппроксимации реализует наилучшее равномерное приближение. Например, для функции x^2 существует ячейка R_{ij} с ребром длины $h_i = \max_i h_i$, в которой уклонение $x^2 - S(x,y)$ достигает экстремальных значений $\pm h_i^2/8$ четыре раза, меняя знак, и, следовательно [5,6], образует чебышевский альтернанс. То же самое справедливо для функции y^2. Это значит, что в неравенстве (4) постоянная 1/16 неулучшаема. Доказательство завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В практических вычислениях производные можно заменять разделенными разностями. При этом оценка (4) сохраняет силу.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для функций $f(x,y)$ с производными $f''_x(x,y)$, $f''_y(x,y)$ постоянного знака в оценке (4) можно избавиться от членов $o(H_c^2)$, $o(\tilde{H}_c^2)$. Для этого достаточно в (3) положить

$$b_{ij} = \operatorname{sgn}(-f''_x(x_i, y_j))\frac{1}{16} \max_{y_l \le y \le y_m} \max_{c=n,p} \max_{x_c \le x \le x_{c+1}} |f''_x(x,y)| h_c^2,$$

где для $i=0$; $n=p=0$; для $i=N$; $n=p=N-1$; для $i \ne 0, N$; $n=i-1, p=i$; для $j=0$; $l=0, m=1$; для $j=M$; $l=M-1$, $m=M$; для $j \ne 0, M$; $l=j-1$, $m=j+1$.

Формулы для коэффициентов $\tilde{b}_{ij}$ имеют аналогичный вид.

В заключение рассмотрим задачу аппроксимации с заданной абсолютной погрешностью ε. Пусть сетки Δ_x, Δ_y выбраны из условий

$$h_i^2 \le \frac{8\varepsilon}{\max\limits_{\substack{x_i \le x \le x_{i+1} \\ c \le y \le d}} |f''_{(x)}(x,y)|}, \quad \tilde{h}_j^2 \le \frac{8\varepsilon}{\max\limits_{\substack{y_j \le y \le y_{j+1} \\ a \le x \le b}} |f''_y(x,y)|},$$

тогда после вычисления сплайна $S(x,y)$ получим

$$\max_{x,y \in R} |f(x,y) - S(x,y)| \le \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Как следует из сопоставления с оценкой (2), общее число узлов сетки Δ будет в 2 раза меньше, чем если бы мы пользовались интерполяционным сплайном (1).

Литература

1. SCHOENBERG I.J. Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. - Quart. Appl.Math., 1946, v. 4., p. 45-99, 112-141.

2. LYCHE T., SCHUMAKER L.L. Local spline approximation methods.- J.Approximat.Theory,1975,v.15,N 4,p.292-325.

3. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации сплайнами первой степени. - В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы, вып. 75.) Новосибирск, 1978, с. 16-22.

4. ШУМИЛОВ Б.М. Локальные приближения линейными сплайнами двух переменных. Там же, с. 23-35.

5. ДАУГАВЕТ И.К. Введение в теорию приближения функций.- Л.: 1977. - 184 с. (Ленингр. ун-т).

6. BUCK R.C. Alternation theorems for functions of several variable.-J.Approximat.Theory,1968,v.1, N 3,p.325-334.

Поступила в ред.-изд.отд.
12 ноября 1979 года