УДК 518.12

О ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Б.М. Шумилов

В работе автора [1] построено приближение сплайном первой степени $S_1(x)$, которое в случае равномерной сетки узлов сплайна $\{x_i\}$ для квадратного монома x^2 совпадает с наилучшим равномерным приближением. Для функций $f(x)\in C^2[a,b]$ при $h_i=x_{i+1}-x_i\to 0$ остаточный член аппроксимации $f(x)-S_1(x)$ на промежутках $[x_i, x_{i+1}]$ асимптотически подобен моносплайну $x^2-S_1(x)$ минимального уклонения от нуля. Это позволяет выбрать шаги h_i, так что приближение функции $f(x)$ отличается от наилучшего равномерного приближения со свободными узлами, порядок которого $O(h^2)$, на малые более высокого порядка. Такие приближения Ю.С. Завьялов предложил называть квазинаилучшими равномерными приближениями. Следуя развитой им методике, в этой статье мы строим параболические сплайны $S_2(x)\in C^1$ квазинаилучшего равномерного приближения.

Введем сетку $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{N+1}=b$. Добавим к ней узлы $x_{-2}<x_{-1}<a$, $x_{N+3}>x_{N+2}>b$ и образуем базисные B-сплайны [2]:

$$B_i(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-x_i)^2}{(h_i+h_{i+1})h_i}, & x\in[x_i, x_{i+1}];\\[2mm] \dfrac{x-x_i}{h_i+h_{i+1}}\,\dfrac{x_{i+2}-x}{h_{i+1}}+\dfrac{x_{i+3}-x}{h_{i+1}+h_{i+2}}\,\dfrac{x-x_{i+1}}{h_{i+1}}, & x\in[x_{i+1}, x_{i+2}];\\[2mm] \dfrac{(x_{i+3}-x)^2}{(h_{i+1}+h_{i+2})h_{i+2}}, & x\in[x_{i+2}, x_{i+3}];\\[2mm] 0, & x\notin[x_i, x_{i+3}].\end{cases}$$

Любой параболический сплайн представляется через B -сплайны в виде:

$$S_2(x)=\sum_{i=-2}^{N} b_i B_i(x).$$

В частности, при $b_i = 1$ имеем $S_2(x) = 1$, при $b_i=(x_{i+1}+x_{i+2})/2$ верно $S_2(x)=x$ и, если $b_i=x_{i+1}x_{i+2}$, то $S_2(x)=x^2$.

В работе [3] изучалась аппроксимация функций $f(x)\in C^3$ параболическими сплайнами, точная на квадратных многочленах:

$$S_2(f;x)=\sum_{i=-2}^{N}\Big[f(\xi_i)-\frac{1}{8}h^2_{i+1}f''(\xi_i)\Big]B_i(x),\quad \xi_i=\frac{1}{2}(x_{i+1}+x_{i+2}). \tag{I}$$

Было показано, что погрешность приближения по формуле (I) имеет порядок H^3 , где $H=\max_i h_i$, и что этот порядок не может быть повышен.

Получим точное выражение для остаточного члена аппроксимации $E(x)=f(x)-S_2(f;x)$. Для этого разложим функцию $f(x)$ в окрестности произвольной точки $x'\in[a,b]$ по формуле Тейлора $f(x)=P_2(x)+ + R(x)$, где

$$P_2(x)=f(x')+f'(x')(x-x')+\frac{1}{2}f''(x')(x-x')^2;$$

$$R(x)=\frac{1}{2}\int_{x'}^{x}(x-y)^3 f'''(y)\,dy. \tag{2}$$

Поскольку формула аппроксимации (I) точна для квадратных многочленов, то справедливо равенство

$$E(x)=P_2(x)-S_2(P_2;x)+R(x)-S_2(R;x)=R(x)-S_2(R;x).$$

Подставляя (2) в (I) и учитывая, что $R(x')=0$, получаем

$$E(x')=-\frac{1}{2}\sum_{i=-2}^{N}\int_{x'}^{\xi_i}\Big[(\xi_i-y)^2-\frac{1}{4}h^2_{i+1}\Big]f'''(y)\,dy\cdot B_i(x'). \tag{3}$$

В дальнейшем штрихи x опускаются.

В случае, если сетка Δ равномерная с шагом h , оценки остаточного члена и его производных порядка $r=1,2$ на промежутках $[x_i, x_{i+1}]$ имеют вид:

$$\| f^{(r)}(x) - S_2^{(r)}(f;x)\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le$$

$$\le \left[K_r \| f'''(x)\|_{C[x_i-\frac{1}{2}h,\, x_i+\frac{1}{2}h]} + K_r'\,\omega_i(f''', \gamma_r h)\right] h^{3-r}, \tag{4}$$

где

$$K_0 = \frac{\sqrt{3}}{216},\ K_1 = \frac{1}{12},\ K_2 = \frac{1}{2},\ K_0' = \frac{1}{48}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{9}\right),$$

$$K_1' = \frac{139}{600},\ K_2' = \frac{1}{6},\ \gamma_0 = 1,\ \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2},$$

$$\| g(x)\|_{C[\alpha,\beta]} = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |g(x)|,$$

$$\omega_i(g,\delta) = \max_{\substack{x_i-\frac{h}{2}\le x,y\le x_{i+1}+\frac{h}{2}\\ |x-y|\le\delta}} |g(x)-g(y)|.$$

Докажем неравенство (4) в случае $r=0$. Пусть $x\in[x_i, x_i+\frac{1}{2}h]$. Введем переменную $t=(x-x_i)/h$. Тогда (3) можно переписать в виде:

$$4h^{-3}E(x) = (1-t)^2\int_{-1/2}^{t}(\tau+\tau^2)f'''(x_i+\tau h)\,d\tau - \int_{t}^{1/2}\left[(1+2t-2t^2)(\tau^2-\tau)+\right.$$

$$\left. + t^2(2-3\tau+\tau^2)\right]f'''(x_i+\tau h)\,d\tau - t^2\int_{1/2}^{3/2}(2-3\tau+\tau^2)f'''(x_i+\tau h)\,d\tau. \tag{5}$$

Подынтегральные функции знакопостоянны на промежутках $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ и $[1, \frac{3}{2}]$. Используя теорему о среднем значении интеграла, находим

$$48h^{-3}E(x) = 4t(1-3t+2t^2)f'''(\eta_0) - (1-t)^2\left[f'''(\eta_{-1}) - f'''(\eta_0)\right] -$$

$$- t^2\left[2f'''(\eta_1) - f'''(\eta_0) - f'''(\eta_2)\right],$$

где

$$\eta_0\in[x_i, x_i+\frac{h}{2}],\quad \eta_{-1}\in[x_i-\frac{h}{2}, x_i],$$

$$\eta_1\in[x_i+\frac{h}{2}, x_{i+1}],\quad \eta_2\in[x_{i+1}, x_{i+1}+\frac{h}{2}].$$

Отсюда следует, что

$$48h^{-3}|E(x)|\le 4t(1-3t+2t^2)\|f'''(x)\|_{C[x_i,\,x_i+\frac{h}{2}]}+$$

$$+(1-2t+3t^2)\omega_i(f''';h). \qquad (6)$$

Добавим и вычтем из (6) положительную величину

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{9}-2t(1-3t+2t^2)\right]\omega_i(f''';h).$$

Используя неравенство

$$\omega_i(f''';h)\le 2\|f'''(x)\|_{C[x_i-\frac{h}{2},\,x_i+\frac{h}{2}]},$$

из (6) находим

$$48h^{-3}|E(x)|\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\|f'''(x)\|_{C[x_i-\frac{h}{2},\,x_{i+1}+\frac{h}{2}]}+$$

$$+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{9}-3t^2+4t^3\right)\omega_i(f''';h).$$

Максимум второго коэффициента справа равен $1-\frac{\sqrt{3}}{9}$. Таким образом выводится оценка (4) при $z=0$. Оценки при $z=1,2$ получаются дифференцированием (5) по x и использованием снова теоремы о среднем.

Мы провели анализ при $x\in[x_i,x_i+\frac{h}{2}]$. Если $x\in[x_i+\frac{h}{2},x_{i+1}]$, то исследование сводится к предыдущему после замены x на x_i+ $+x_{i+1}-x$ и перенумерации узлов.

Рассмотрим следующую задачу наилучшего приближения: для функции $f(x)\in C[a,b]$ найти узлы $\{x_i\}$ и построить такой параболический сплайн $S_2^*(x)$, чтобы

$$\|E(x)\|=\|f(x)-S_2^*(x)\|=\min_{\{S_2(x)\}}\|f(x)-S_2(x)\|, \qquad (7)$$

где норма берется в пространстве $C[a,b]$, а минимум по всему множеству параболических сплайнов с нефиксированными узлами, но с заданным их числом $N+2$. Размерность этого множества равна $2N+3$. В работе [4] показано, что для того чтобы $S_2^*(x)$ было сплайном наилучшего приближения, достаточно, чтобы остаточный член аппроксимации имел $2N+4$ точки альтернанса, в которых уклонение $E(x)$

достигает равных по модулю экстремальных значений с чередованием знаков.

Рассмотрим эту задачу вначале для функции $f(x)=x^3$. Всякая функция вида $x^3-S_2(x)$ называется моносплайном третьей степени. Если $f(x)=x^3$, то остаточный член аппроксимации по формуле (I) есть некоторый моносплайн $M(x)$. Из (3) получаем его выражение

$$M(x)=-\sum_{i=-2}^{N}\left[(\xi_i-x)^3-\frac{3}{4}h_{i+1}^3(\xi_i-x)\right]B_i(x). \tag{8}$$

После подстановки сюда выражений B-сплайнов и замены переменной $t=(x-x_i)/h_i$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$

$$M_i(x(t))=\frac{h_i}{4}\left[4h_i^2t^3-c_it^2+2d_it+(h_i-h_{i-1})h_{i-1}\right], \tag{9}$$

где

$$c_i=6h_i^2+h_{i+1}(h_i-h_{i+1})+h_{i-1}(h_{i-1}-h_i),$$

$$d_i=h_i^2-h_ih_{i-1}+h_{i-1}^2, \qquad t\in[0,1].$$

Отсюда в случае равных шагов $h=\dfrac{b-a}{N+1}$ получаем

$$M^0(x(t))=\frac{1}{2}t(1-3t+2t^2)h^3.$$

Экстремальные значения функции $M^0(x)$ достигаются в точках $t_{1,2}=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{6}$ и равны $\pm\frac{\sqrt{3}}{36}h^3$. В точках $t=0,\ \frac{1}{2},\ 1$ значения моносплайна равны нулю, т.е. в них параболический сплайн $S_2(x^3;x)$ интерполирует функцию x^3. График функции $M^0(x)$ изображен на рис. I.

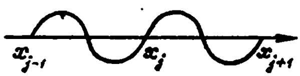

Рис. I

Продолжим многочлены на отрезках $[a, x_1]$ и $[x_N, b]$ на области $x<a$ и $x>b$ и найдем такие точки $a'<a,\ b'>b$, что $M^0(a')=-\frac{\sqrt{3}}{36}h^3$, $M^0(b')=\frac{\sqrt{3}}{36}h^3$. Это будут $a'=a-\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)h$, $b'=b+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)h$.

Рассматривая функцию $M^0(x)$ на отрезке $[a', b']$ имеем $2N+4$ точки, в которых $M^0(x)=\pm\frac{\sqrt{3}}{36}h^3$, причем знаки чередуются. Значит, сплайн $S_2(x^3;x)$ есть сплайн наилучшего приближения для функции x^3 на отрезке $[a', b']$.

Вернемся теперь к задаче аппроксимации произвольной функции $f(x)\in C^3$ по формуле (I). Остаточный член на каждом интервале

$[x_i, x_{i+1}]$ подобен моносплайну $M(x)$ (8) в том смысле,что согласно (3)

$$E(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi_{i-1})M_i(x)+O(H_i^3)\ , \tag{10}$$

где $H_i = max(h_{i-1}, h_i, h_{i+1})$.

Мы хотим получить такое приближение функции $f(x)$, которое в некотором смысле было бы подобным наилучшему приближению, а именно: главная часть остаточного члена на некотором расширении отрезка $[a, b]$ принимала бы $2N+4$ экстремальных значений, близких по абсолютной величине с чередованием знаков.

Этой цели можно достичь, если предположить,что функция $f'''(x)$ изменяется достаточно медленно, так, что величинами $|h_i-h_{i-1}|$ и $|h_i-h_{i+1}|$ можно пренебречь по сравнению с h_i . Тогда поведение моносплайна $M(x)$ на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ будет аналогичным поведению моносплайна $M^0(x)$ при равномерной сетке, т.е. на промежутке он будет иметь два экстремальных значения разных знаков. Чтобы уклонения $E(x)$ были при этом равны по абсолютной величине, потребуем выполнения равенств

$$\varphi_i(x_i, x_{i+1})=\frac{\sqrt{3}}{216}(x_{i+1}-x_i)^3\left|f'''\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right|=\varepsilon,\ i=0,\dots \tag{11}$$

Число узлов $N+2$ при этом зависит от величины ε .

Для численного решения уравнений (11) можно предложить следующий алгоритм. Пусть узлы x_{i-1}, x_i уже найдены. Делим h_{i-1} на n частей (n достаточно велико, например, 10) и добавляем последовательно величины h_{i-1}/n к значению x_i , каждый раз вычисляя знак выражения $\varphi(x_i, x_i+\frac{jh_{i-1}}{n})-\varepsilon$. Если на $(j+1)$ -м шаге знак сменился, то объявляем точку $x_i+\frac{jh_{i-1}}{n}$ узлом x_{i+1} и переходим к отысканию следующего узла. При этом уместно на каждом шаге проверять условие

$$\frac{H_i^3}{48}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)\omega_i(f''', H_i) \ll \varepsilon\ . \tag{12}$$

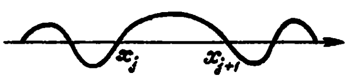

Рис. 2

Невыполнение неравенства (12) сигнализирует о том, что для заданного значения ε задача решена быть не может.

В случае, когда функция $f'''(x)$ в точке ξ_{j-1} меняет знак, график остаточного члена имеет вид, изображенный на рис. 2. Для его исследования надо привлечь не только главную часть остаточного члена, но и слагаемые более высокого порядка малости. Здесь этот вопрос не рассматривается.

В пределе при $\varepsilon \to 0$ $(h \to 0)$ сплайн $S_2(x)$ асимптотически стремится к сплайну наилучшего равномерного приближения с заданным уклонением ε.

Литература

I. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации сплайнами первой степени. - В кн.: Методы сплайн-функций. (Вычислительные системы, вып. 75) Новосибирск, 1978, с. 16-22.

2. De BOOR C. On calculation with B-splines.-J.Approximat. Theory,1972,v.6. N 1,p.5-62.

3. De BOOR C.,FIX G.J. Spline approximation by quasi-inter - polants.-J.Approximat.Theory,1973,v.8, N 1,p.19-45.

4. BRAESS D. Chebyshev approximation by spline functions with free knots.- Numer.Math.,1971,v.17, N 3,p.357-366.

Поступила в ред.-изд.изд.
26 ноября 1978 года