МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1979 год Выпуск 81

УДК 518.61

# МЕТОД СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА (СХЕМА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ)

В.П. Роменский

Рассматривается решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом сплайн-коллокации. Приближенное решение строится в виде бикубического сплайна, как и в работе [1].

В данной статье строится схема порядка аппроксимации $O(h^4)$. Алгоритм решения получаемой системы уравнений реализуется пятиточечными прогонками на основе метода расщепления.

Доказательство сходимости приближенного решения к точному, ввиду громоздкости, здесь не проводится и будет опубликовано позже.

Рассмотрим на прямоугольнике $R=[0,a]\times[0,b]$ с границей $\Gamma$, $\bar{R}=R\cup\Gamma$, задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$Lu\equiv(L_1+L_2)u=-f(x,y),(x,y)\in R, \quad (1)$$

$$u/_{\Gamma}=0, \quad (2)$$

где $L_1=D^{(2,0)}$, $L_2=D^{(0,2)}$ - операции взятия второй частной производной по аргументам $x$ и $y$ соответственно.

Пусть $f(x,y)\in C^{4+\lambda}(\bar{R})$. Для того чтобы решение $u(x,y)\in C^{6+\lambda}(\bar{R})$, должны выполняться условия согласования [2] (см.также [1]): $f=0$, $D^{(2,0)}f=D^{(0,2)}f$ в вершинах прямоугольника.

Введем на прямоугольнике $R$ последовательность равномерных сеток $\Delta_{nm}=\Delta_{1n}\times\Delta_{2m}$, где $\Delta_{1n}: x_i=ih_{1n}$, $i=0,1,\dots,n$; $\Delta_{2m}=y_j=jh_{2m}, j=0,1,\dots,m$ и $h_{1n}=a/n$, $h_{2m}=b/m$ шаги сеток $\Delta_{m}$, $\Delta_{2m}$ соответственно. В частности, при $n=N$, $m=M$ условимся писать $\Delta=\Delta_1\times\Delta_2$ и $h_1=h_{1N}$, $h_2=h_{2M}$.

Пусть $S=S(u,x,y)$-бикубический сплайн, интерполирующий точное решение задачи (1), (2). Конкретный вид сплайна зависит от краевых условий [1,3]. Однако здесь важно лишь то, что существуют интерполяционные сплайны, дающие приближение функции с порядком

$O(h_1^4+h_2^4)$, а ее вторых частных производных $D^{(2,0)}u$, $D^{(0,2)}u$ с порядками $O(h_1^2)$ и $O(h_2^2)$ соответственно. При этом в узлах равномерной сетки $\Delta$ имеют место соотношения [4]:

$$L_i S = L_i u - \frac{h_i^2}{12} L_i^2 u + O(h_i^4), \quad i=1,2. \tag{3}$$

Пусть $\Lambda_i$ - оператор взятия второй разделенной разности по переменным $x$ и $y$ соответственно, действующий на сетке $\Delta$,

$$\Lambda_i = \frac{1}{h_i^2}\left(T_{i+} - 2E + T_{i-}\right), \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad i=1,2,$$

где $E$ - единичный оператор и $T_{i\pm}$ - оператор сдвига по переменной $x$, $i=1$, и переменной $y$, $i=2$. Используя формулу Тейлора, в узлах сетки $\Delta$ получаем

$$\Lambda_i u = L_i u + \frac{h_i^2}{12} L_i^2 u + O(h_i^4). \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) следует, что

$$L_i u = \frac{1}{2}\left(L_i S + \Lambda_i u\right) + O(h_i^4). \tag{5}$$

Приступим теперь к приближенному решению задачи (I), (2). В методе коллокации добиваются, чтобы невязка $L\tilde{u}-f$ на приближенном решении $\tilde{u}$ обращалась в нуль в узлах сетки $\Delta$. Заменяя в (I) $L_i u$ по формуле (5) и учитывая, что функции $u$ и $S$ на $\Delta$ совпадают, приходим к уравнениям для внутренних узлов сетки

$$\frac{1}{2}(L+\Lambda)S_u\,(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j), \; (x_i, y_j)\in \Delta / \Delta \cap \Gamma, \tag{6}$$

погрешность аппроксимации которых будет $O(h_1^4+h_2^4)$.

В узлах $\Delta\cap\Gamma$ уравнения строим следующим образом. Дифференцируя (I) дважды по $x$ и аналогично по $y$ и вычитая из первого соотношения второе, находим

$$L_1^2 u - L_2^2 u = L_2 f - L_1 f.$$

Учитывая, что $L_2^2 u = L_2 u$ при $x=x_0, x_N$ и $L_1^2 u = L_1^2 u = 0$ при $y=y_0, y_M$, отсюда с помощью (I), (3) получаем

$$\begin{aligned} &L_1 S_u(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j) + \frac{h_1^2}{12}(L_1 - L_2)f(x_i, y_j), \; i=0,N;\; j=0,\dots,M, \\ &L_2 S_u\,(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j) - \frac{h_2^2}{12}(L_1 - L_2)f(x_i, y_j), \; i=0,\dots,N;\; j=0,\dots,M. \end{aligned} \tag{7}$$

Граничное условие (2) дает равенства

$$S_u(x_i, y_j)=0, \quad (x_i, y_j)\in\Delta\cap\Gamma. \tag{8}$$

Уравнения (6)-(8) образуют систему $(N+3)(M+3)-4$ уравнений. Размерность же пространства сплайнов $S(\Delta)$ равна $(N+3)(M+3)$. Поэтому для замыкания системы необходимо еще четыре уравнения, в качестве которых естественно взять соотношения $D^{(2,2)}u=q_{ij}$ в вершинах прямоугольника. Отсюда в силу равенств (3)

$$D^{(2,2)}S(x_i, y_j)=q_{ij}, \quad i=0,N; \; j=0,M. \tag{9}$$

Из уравнения (I) $q_{ij}=D^{(2,0)}f_{ij}=D^{(0,2)}f_{ij}$. Однако значения $q_{ij}$ не влияют на порядок аппроксимации, ибо в оценки погрешности интерполяции они входят с множителем $h_1^4 h_2^4$ [3]. Поэтому при желании их можно считать равными нулю.

Для построения алгоритма, как и в работе [I], введем в пространстве $S(\Delta)$ базис из $B$-сплайнов $\sigma_i(x), \tilde{\sigma}_j(y)$, точнее, из всевозможных произведений $\sigma_i(x)\tilde{\sigma}_j(y)$, $i=-1,0,\dots,N+1$; $j=-1,0,\dots,M+1$. (Для этого сетка $\Delta$ должна быть расширена на три слоя.)

Сплайн $S_u(x,y)=S(x,y)$ тогда представим в одной из форм

$$S(x,y)=\sum_{i=-1}^{N+1}\sum_{j=-1}^{M+1} v_{ij}\,\sigma_i(x)\tilde{\sigma}_j(y), \tag{Iоа}$$

$$S(x,y)=\sum_{i=-1}^{N+1} v_i^1(y)\,\sigma_i(x), \tag{Iоб}$$

$$S(x,y)=\sum_{j=-1}^{M+1} v_j^2(x)\,\tilde{\sigma}_j(y), \tag{Iов}$$

где $v_i^1(y), v_j^2(x)$ - кубические сплайны, а именно:

$$\begin{aligned} v_i^1(y)&=\sum_{j=-1}^{M+1} v_{ij}\,\tilde{\sigma}_j(y), \quad v_i^1(y_j)=v_{ij}^1, \\ v_j^2(x)&=\sum_{i=-1}^{N+1} v_{ij}\,\sigma_i(x), \quad v_j^2(x_i)=v_{ij}^2. \end{aligned} \tag{II}$$

Так как на равномерной сетке

$$\sigma_i(x_{i\pm1})=\frac{1}{6}, \; \sigma_i(x_i)=\frac{2}{3}, \; \sigma_i''(x_{i\pm1})=\frac{1}{h_1^2}, \; \sigma_i''(x_i)=-\frac{2}{h_1^2},$$

а в остальных узлах сетки эти значения равны нулю [5] и аналогично для $\widetilde{\sigma}_j(y)$, то из формул представления сплайнов на сетке $\Delta$ имеем соотношения

$$
\begin{gathered}
L_1 S = \Lambda_1 v^1, \quad L_2 S = \Lambda_2 v^2, \\
S = \widetilde{\Lambda}_1 v^1 = \widetilde{\Lambda}_2 v^2,
\end{gathered} \tag{12}
$$

$$
v^2 = \widetilde{\Lambda}_2 v, \quad v^1 = \widetilde{\Lambda}_1 v,
$$

где $\widetilde{\Lambda}_i = \frac{1}{6} T_{i+} + \frac{2}{3} E + \frac{1}{6} T_{i-} = E + \frac{h_i^2}{6} \Lambda_i, \quad i = 1,2$

В этих обозначениях уравнения (6) можно представить в виде:

$$
\frac{1}{2} \Lambda_1 (E + \widetilde{\Lambda}_1) v^1 + \frac{1}{2} \Lambda_2 (E + \widetilde{\Lambda}_2) v^2 = -f, \ (x_i, y_j) \in \Delta / \Delta \cap \Gamma, \tag{13}
$$

а (7) как

$$
\begin{gathered}
\Lambda_1 v^1 = -f + \frac{h_1^2}{12} (L_1 - L_2) f = -\widetilde{f}, \ i = 0, N; \ j = 0, 1, \ldots, M, \\
\Lambda_2 v^2 = -f - \frac{h_2^2}{12} (L_1 - L_2) f = -\widetilde{f}, \ j = 0, M; \ i = 0, 1, \ldots, N.
\end{gathered} \tag{14}
$$

Граничные условия (8) запишутся в виде

$$
\widetilde{\Lambda}_1 v^1 = 0, \quad \widetilde{\Lambda}_2 v^2 = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Delta \cap \Gamma. \tag{15}
$$

Из (14) и (15) находим

$$
\begin{gathered}
v^2_{-1,j} = -v^2_{1j} - \frac{2}{3} h_2^2 \widetilde{f}_{0j}, \ v^2_{0j} = \frac{h_2^2}{6} \widetilde{f}_{0j}, \ v^2_{N+1,j} = -v^2_{N-1,j} - \frac{2h_2^2}{3} \widetilde{f}_{Nj}, \ v^2_{Nj} = \frac{h_2^2}{6} \widetilde{f}_{Nj}, \\
v^1_{i,-1} = -v^1_{i,1} - \frac{2}{3} h_1^2 \widetilde{f}_{i,0}, \ v^1_{i0} = \frac{h_1^2}{6} \widetilde{f}_{i0}, \ v^1_{i,M+1} = -v^1_{i,M-1} - \frac{2}{3} h_1^2 \widetilde{f}_{iM}, \ v^1_{iM} = \frac{h_1^2}{6} \widetilde{f}_{iM}.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Подставляя формулы (16) в (12) и упорядочивая компоненты сеточных функций $v^1$ и $v^2$

$$
v^1 = \{ v^1_1, v^1_2, \ldots, v^1_{M-1} \}^T, \quad v^1_j = \{ v^1_{1j}, v^1_{2j}, \ldots, v^1_{N-1,j} \}^T,
$$

$$
v^2 = \{ v^2_1, v^2_2, \ldots, v^2_{N-1} \}^T, \quad v^2_i = \{ v^2_{i1}, v^2_{i2}, \ldots, v^2_{i,M-1} \}^T,
$$

можем рассматривать операторы $\widetilde{\Lambda}_i$, $\Lambda_i$ и $A_i=\frac{1}{2}\Lambda_i(E+\widetilde{\Lambda}_i)$ как матрицы, которые обозначим теми же символами. При принятом способе упорядочения компонент, все они клеточно-диагональные. Причем каждая клетка матриц $\widetilde{\Lambda}_i$, $\Lambda_i$ является трехдиагональной, а матриц $A_i$ – пятидиагональной матрицей.

Выпишем для удобства пользования клетки матриц $\widetilde{\Lambda}_1$, $\Lambda_1$ и $A_1$ соответственно

$$\widetilde{\Lambda}_1^j=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}4 & I & & 0\\ I & 4 & I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & I & 4\end{bmatrix},\qquad \Lambda_1^j=\frac{1}{h_1^2}\begin{bmatrix}-2 & I & & 0\\ I & -2 & I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & I & -2\end{bmatrix},$$

$$A_1^j=\frac{1}{12h_1^2}\begin{bmatrix}-I9 & 8 & I & & 0\\ 8 & -I8 & 8 & I & \\ I & 8 & -I8 & 8 & I\\ & & \ddots & \ddots & \ddots\\ 0 & & & I8 & -I9\end{bmatrix}. \tag{I7}$$

Размерность каждой клетки $N-1$ и всего их $M+1$. Матрицы $\widetilde{\Lambda}_2, \Lambda_2, A_2$ получаются из (I7) заменой $h_1$ на $h_2$ и имеют размерность $(M-1)\times(N+1)$.

Рассмотрим экономичный способ решения системы уравнений $A_1 v^1+A_2 v^2=-\widetilde{f}$, $\widetilde{\Lambda}_1 v^1=\widetilde{\Lambda}_2 v^2$, полученной из (I3), (I4) и (I5). Структура этой системы позволяет использовать метод дробных шагов [6]. Ограничиваясь, например, простейшей двухслойной схемой, имеем

$$\frac{\widetilde{\Lambda}_1 v^{1,n+\frac{1}{2}}-\widetilde{\Lambda}_2 v^{2,n}}{\tau}=A_1 v^{1,n+\frac{1}{2}}+\widetilde{f},$$

$$\frac{\widetilde{\Lambda}_2 v^{2,n+1}-\widetilde{\Lambda}_1 v^{1,n+\frac{1}{2}}}{\tau}=A_2 v^{2,n+1}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Численная реализация здесь сводится к последовательному решению по строкам и столбцам систем уравнений с пятидиагональной матрицей прогонками. Непосредственно устанавливаем, что устойчивость и сходимость метода имеет место, если $6\tau\geq \max(h_1^2, h_2^2)$.

После того как в результате итерационного процесса $v^1$; $v^2$ вычислены с требуемой точностью по формулам (I6), находим исключенные ранее величины $v_{ij}^2$ (или $v_{ij}^1$). Этой информации достаточно для определения значений сплайна в узлах по формулам (10в). Проделанная работа и по вычислительным затратам равносильна выполняемой в разностных методах решения краевых задач при использовании такого же алгоритма, в данном случае метода расщепления. Кроме того, полученных данных достаточно для вычисления следов сплайна вдоль линий $x=x_i$, $i=0,1,\dots,N$ (или $y=y_j$, $j=0,1,\dots,M$).

В отличие от разностных методов, сплайн, как приближенное решение, может быть построен во всей области по формуле (10а) и (11), для чего достаточно найти коэффициенты $v_{ij}$ [см. 7]. С этой целью в первые уравнения (7) и в уравнения (9) подставим $L_1 S$ в соответствии с формулой (10в). В результате получаем две системы для определения компонент векторов $V_k^2=\{[v_1^2(x_k)]'',\dots,[v_{M-1}^2(x_k)]''\}$, $k=0,N$, $B_2 V_k^2=C_k$, где $B_2$ - матрица размера $M-1$ вида клетки $\Lambda_1^j$ из (17), а $C_k=-\{\tilde{f}_{k1},\tilde{f}_{k2},\dots,\tilde{f}_{k,M-1}\}^T$, $k=0,N$.

В заключени остается решить интерполяционную задачу по определению кубических сплайнов $v_j^2(x)$. Аналогичный результат получается в терминах $v^1$.

Автор благодарит Ю.С. Завьялова и В.Л.Мирошниченко за внимание к работе и полезные советы.

## Литература

1. ИМАМОВ А., РОМЕНСКИЙ В.П. Метод сплайн-коллокации для уравнения Пуассона в прямоугольной области. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75.) Новосибирск, 1978, с.56-67.

2. ВОЛКОВ Е.А. О дифференциальных свойствах решений краевых задач для уравнения Лапласа и Пуассона на прямоугольнике. - Тр. Мат.ин-та АН СССР, 1965, т. 127, с. 89-112.

3. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. Интерполирование бикубическими многозвенниками (сплайнами). - В кн.: Вычислительные системы, Вып. 38. Новосибирск, 1970, с. 74-101.

4. LUCAS T.R. Error bounds for interpolating cubic splines under verious end conditions.-J.Numer.Anal., 1974, v.11, N 3, p.569-584.

5. SCHOENBERG I.J. The perfect B-splines and time-optimal control problem.- J.Israel.Math., 1971, v.10, p.261-274.

6. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики.- М.: Наука, 1977. - 456 с.

7. РОМЕНСКИЙ В.П. К задаче интерполирования кубическими и бикубическими сплайн-функциями. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 68.) Новосибирск, 1976, с. 51-60.

Поступила в ред.-изд.отд.
30 октября 1979 года