

УДК 517.927:519.62

ОБ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПРИТЯЖЕНИИ
ПЛЕНОЧНОЙ МЕТАЛЛИЗИРОВАННОЙ ЛЕНТЫ

С.И. Фадеев

Работа посвящена решению задачи об электростатическом притяжении пленочной металлизированной ленты (плоский изгиб). Физическая модель рассматриваемого явления приведена на рис. I. Здесь линия $B = 0$ - граница неподвижного электрода; $B = D$ - граница диэлектрика толщиной D , диэлектрическая постоянная которого равна ϵ ; B_0 и C_0 - координаты шарнирного закрепления подвижного электрода - металлизированной ленты; $B(C)$ - функция, описывающая форму оси подвижного электрода, $0 \leq C \leq C_0$.

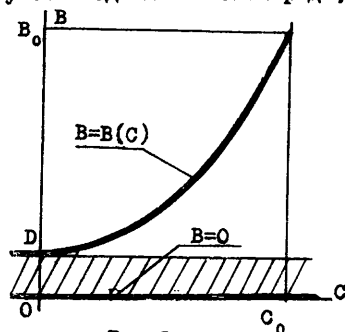


Рис. I

на изгиб пренебрежимо мало, то имеют место только первые два условия (I). Отметим, что система координат на рис. I связана с правой границей области распластывания ленты. Действительное положение границы находится из решения самой задачи.

Обозначим через q длину дуги линии $B(C)$, причем $C = 0$ соответствует $q = 0$ и $q = q_0$ при $C = C_0$. Пусть далее N - натяжение ленты в точке ее закрепления. Одной из особенностей рассмат-

Представляет интерес случай, когда под действием электростатической нагрузки часть ленты оказывается распластанной по поверхности диэлектрика. На рис. I область распластывания - линия $B = D$, $C < 0$. При $C = 0$ выполняются следующие условия [1]:

$B = D$, $B'(C) = 0$, $K = 0$, (I)
где K - кривизна оси подвижного электрода. Если сопротивление ленты

риваемой задачи является то, что значения параметров Q_0 и N заранее не известны. Поэтому решение единственным образом определяется заданием следующей совокупности параметров: U - разности потенциалов между электродами, G - жесткость ленты, а также B_0 , D и ε .

I. Обратимся к уравнениям равновесия упругой линии $B(s)$, к которой приложена распределенная внешняя нагрузка P , нормальная к упругой линии [2]:

$$\begin{aligned} F_n'(q) - K(q)F_\tau(q) &= -P(q), \\ F_\tau'(q) + K(q)F_n(q) &= 0, \\ M'(q) &= F_n(q), \quad M(q) = GK(q), \\ G &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь M - изгибающий момент в сечении q ; F_n - перерезывающая сила; F_τ - растягивающая сила. Предполагается, что энергия первоначальной деформации пренебрежимо мала.

Из уравнения для момента M следуют два равенства:

$$\begin{aligned} GK''(q) &= F_n'(q) = F_\tau(q)K(q) - P(q), \\ GK(q)K'(q) &= K(q)F_n(q) = -F_\tau'(q), \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2} GK^2(q) + F_\tau(q) = N = \text{const}.$$

В результате получим следующее дифференциальное уравнение для кривизны:

$$GK''(q) = (N - \frac{1}{2} GK^2(q))K(q) - P(q). \quad (3)$$

Пусть A - угол между касательной к упругой линии в точке q и линией $B=0$. Имеем:

$$A'(q) = K(q), \quad B'(q) = \sin(A), \quad C'(q) = \cos(A). \quad (4)$$

Здесь через $B(q)$ обозначена функция, отличная от $B(s)$. В дальнейшем это не вызовет недоразумений. Система уравнений (3)-(4) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} A &= 0, \quad B = D, \quad C = 0, \quad K = 0 \quad \text{при } q = 0; \\ B &= B_0, \quad K = 0 \quad \text{при } q = Q_0 \end{aligned} \quad (5)$$

дает полное описание равновесия упругой линии, если P - заданная функция. Число граничных условий (5) соответствует числу неизвестных задачи, к которым, в частности, относятся Q_0 и N .

2. Воспользуемся простейшим приближением электростатической нагрузки [3]:

$$E(Q) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2(Q) \quad E_0(Q) = U/(B(Q) - (1 - 1/\epsilon)D), \quad (6)$$

где ϵ_0 - диэлектрическая постоянная для пустоты, E_0 - напряженность электростатического поля на поверхности подвижного электрода. Пусть $G = 0$. Тогда уравнения равновесия совместно с граничными условиями запишутся в виде:

$$A'(Q) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2(Q)/N,$$

$$B'(Q) = \sin(A), \quad C'(Q) = \cos(A); \quad (7)$$

$$A = 0, B = D, C = 0 \text{ при } Q = 0; \quad (8)$$

$$B = B_0 \text{ при } Q = Q_0.$$

Здесь и далее удобно перейти к безразмерным переменным, определяемым по формулам:

$$x = Q/Q_0, \quad y_1 = A, \quad y_2 = B/D, \quad y_3 = C/Q_0. \quad (9)$$

В новых переменных задача (7)-(8) примет вид:

$$y_1'(x) = k_4/(y_2 - k_2)^2, \quad y_2'(x) = k_3 \sin(y_1), \quad (10)$$

$$y_3'(x) = \cos(y_1);$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0 \text{ при } x = 0; \quad (11)$$

$$y_2 = y_0 \text{ при } x = 1,$$

где

$$k_2 = 1 - 1/\epsilon, \quad k_3 = Q_0/D, \quad y_0 = B_0/D, \quad (12)$$

$$k_4 = \frac{\epsilon_0 U^2 Q_0}{2D^2 N}.$$

Следствием первых двух уравнений (10) и условий (11) является задача Коши для y_1 как функции y_2 :

$$y_1'(y_2) = \frac{k_3}{(y_2 - k_2)^2 \sin(y_1)}, \quad k_3 = \frac{\epsilon_0 U^2}{2\Delta H}, \quad (13)$$

$$y_1 = 0 \text{ при } y_2 = 1.$$

Точное решение задачи (13) представим в виде:

$$1 - \cos(y_1) = k_3(\epsilon - 1/(y_2 - k_2)).$$

Обозначим через $y_1^* = \Lambda^*$ угол наклона касательной к упругой линии в точке Q_0 . Параметры k_3 , Λ^* , y_0 и ϵ взаимосвязаны по формуле:

$$k_3 = (1 - \cos(\Lambda^*)) / (\epsilon - 1/(y_0 - k_2)). \quad (14)$$

При $y_0 \rightarrow \infty$ формула (14) принимает наиболее простое выражение:

$$\epsilon k_3 = \frac{\epsilon_0 \epsilon U^2}{2\Delta H} = 1 - \cos(\Lambda^*). \quad (15)$$

В дальнейшем формула (15) будет сопоставляться с аналогичной зависимостью, найденной из численного решения задач (3)-(5) и (7)-(8).

3. Для уточнения формулы (6) предположим, что силовые линии электростатического поля близки к окружностям, которые пересекают линии $B(C)$ и $B=0$ (см. рис. I) под прямыми углами. Пусть в точке пересечения окружности и упругой линии длина дуги равна Q , так что радиус окружности R определяется заданием функций $B(Q)$ и $A(Q)$: $R(Q) = B/\sin(\Lambda)$. При этом кривизна $T(1, Q)$ эквипотенциальной линии в точке пересечения ее с окружностью равна:

$$T(1; Q) = [\ln(1 + f(1; Q))]_1', \quad T(0; Q) = K(Q), \quad (16)$$

где l - длина дуги окружности, отсчитываемая в направлении к линии $B=0$ до точки пересечения;

$$f(1; Q) = K(Q)R(Q) \frac{\cos(\varphi) - \cos(\Lambda)}{\sin(\Lambda)}, \quad \varphi = A(Q) - 1/R(Q).$$

Воспользуемся теперь дифференциальным уравнением, устанавливающим связь между напряженностью электростатического поля $E(1; Q)$ и кривизной эквипотенциальной линии $T(1; Q)$:

$$E_1'(1; Q) = -T(1; Q)E(1; Q), \quad E(0; Q) = E_0(Q). \quad (17)$$

Уравнение (17) является прямым следствием условий Даламбера-Эйлера, которым удовлетворяют действительная и мнимая части комплексного потенциала и его производных [3].

С учетом равенства (16) получим $E = E_0/(1+f)$. Искомое значение E_0 определяется из условия:

$$U = E_0 \left(\int_0^{l_0} \frac{dl}{1+f} - k_2 \int_{l_*}^{l_0} \frac{dl}{1+f} \right), \quad (18)$$

где $l_0 = RA$, $l_* = R(A - \arcsin(D/R))$.

После вычисления интегралов, входящих в правую часть (18), выражение функции P можно представить в виде:

$$P(q) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2(q) = \frac{1}{2} \epsilon_0 (UF/D)^2. \quad (19)$$

Здесь

$$F = \frac{1+a}{2y_2(\omega(u_1) - b k_2 \omega(u_2))},$$

$$a = \cos(y_1) + y_2 y_1'(x)/k_2, \quad b = \frac{(1 + \cos(y_1)) \sin(t)}{(1 + \cos(t)) \sin(y_1)},$$

$$t = \arcsin(\sin(y_1)/y_2), \quad u_1 = \left[\frac{|1-a|}{1+a} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad u_2 = b u_1,$$

$$\omega(u) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(u)/u, & a \leq 1; \\ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) / u, & a > 1. \end{cases}$$

Очевидно, найденное приближение электростатической нагрузки тем точнее, чем меньше изменяется кривизна подвижного электрода. Кроме того, равенство (18) может быть использовано при формулировке задачи Дирихле для уравнения Лапласа в конечной области, если появится необходимость в численном определении функции P .

4. Воспользуемся безразмерными переменными (9) и комбинациями (12) для преобразования краевой задачи (3)-(5) к виду:

$$\left. \begin{aligned} 0 < x < 1, \\ y_1'(x) &= y_*(x), \quad y_2'(x) = k_3 \sin(y_1), \quad y_3'(x) = \cos(y_1), \\ y_4''(x) &= (k_0 - \frac{1}{2} y_4^2(x)) y_*(x) - k_1 F^2, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ y_2 &= y_0, \quad y = 0 \quad \text{при} \quad x = 1, \end{aligned} \right\}$$

где

$$y_4 = Q_0 K, \quad k_0 = (N Q_0^2)/G, \quad k_1 = \frac{\epsilon_0 U^2 Q_0^3}{2 D^2 G}. \quad (21)$$

Дадим без обоснования краткое описание итерационного способа решения задачи (20). Предварительно заметим, что дифференциальное уравнение с граничными условиями относительно $y_4(x)$ можно записать в интегральной форме: $0 < x < 1$,

$$y(x) \equiv y_4(x) = \int_0^1 V(x, \theta) \Phi(\theta) d\theta, \quad \Phi(\theta) \equiv F^2.$$

Здесь

$$V(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(c - c\theta)\operatorname{sh}(cx)}{\operatorname{csh}(c)}, & x \leq \theta; \\ \frac{\operatorname{sh}(c - cx)\operatorname{sh}(c\theta)}{\operatorname{csh}(c)}, & x > \theta; \end{cases}$$

$$c = k_0 - \frac{1}{2} y^2(\theta),$$

Отсюда $y(x) > 0$, поскольку V и Φ — положительные функции. В рассматриваемой задаче физический смысл имеют те решения, которые выполняются при условии отсутствия сжимающих усилий вдоль упругой линии

$$\lambda = \max_{0 < x < 1} y(x) < \sqrt{2k_0}.$$

С этим условием существенно связан предлагаемый способ решения задачи. В частности, к исходным данным задачи отнесены параметры y_0 , k_0 и λ , а значения параметров k_1 и k_2 отыскиваются в ходе численного решения.

Пусть известны функция $\Phi(x)$ и начальные приближения $y(x)$, $c(x)$ и k_1 , для которых мы не будем вводить новых обозначений. Следующее приближение $Y(x)$ строится при помощи численного решения краевой задачи:

$$Y''(x) = c^2(x)Y(x) - k_1 \Phi(x), \quad Y(0) = Y(1) = 0. \quad (22)$$

Таблица

k_0	k_1	k_3	λ	ϵk_5	k_0/k_3^2
0.50	51.61	357.9	0.8063	0.9302	$3.904 \cdot 10^{-6}$
1.00	55.04	355.2	0.8282	0.6819	$7.928 \cdot 10^{-6}$
2.00	62.01	350.2	0.8700	0.5154	$1.631 \cdot 10^{-6}$
4.50	80.01	339.4	0.9724	0.3964	$3.906 \cdot 10^{-6}$
8.00	106.1	327.7	1.1063	0.3485	$7.452 \cdot 10^{-5}$
12.0	136.9	317.4	1.2485	0.3284	$1.192 \cdot 10^{-4}$
18.0	183.8	306.2	1.4373	0.3163	$1.920 \cdot 10^{-4}$
50.0	437.6	279.4	2.1676	0.3065	$6.404 \cdot 10^{-4}$
100	829.7	266.3	2.9115	0.3057	$1.410 \cdot 10^{-3}$
∞	∞	234.6	80.292	0.3029	∞

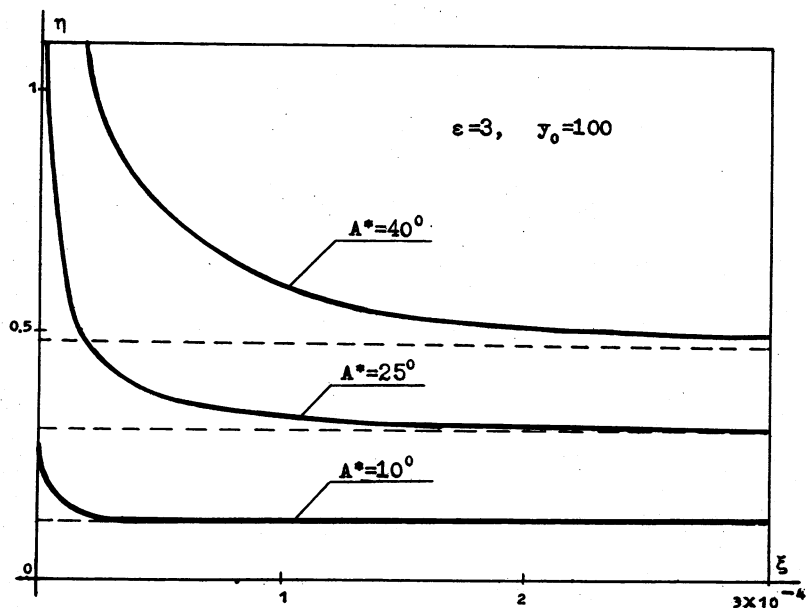


Рис. 2

Определив

$$\Lambda = \max_{0 < x < 1} Y(x),$$

возьмем в качестве следующих приближений $y(x)$, $c(x)$ и k_1 соответственно

$\lambda Y(x)/\Lambda$, $k_0 - (\lambda Y(x)/\Lambda)^2$ и $\lambda k_1/\Lambda$ и т.д. до тех пор, пока $|1 - \lambda/\Lambda|$ не станет меньше наперед заданного положительного числа.

Далее вычисляются приближения для $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$ (для которых также не будем вводить новых обозначений) из решения задачи Коши: $0 \leq x \leq 1$,

$$y_1'(x) = y(x), \quad v'(x) = \sin(y_1), \quad y_3'(x) = \cos(y_1), \quad (23)$$

$$y_1 = v = y_3 = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

После определения функции $v(x)$ приближения для $y_2(x)$ и k_3 берутся в виде:

$$y_2(x) = 1 + k_3 v(x), \quad k_3 = (y_0 - 1)/v(1).$$

Тем самым удовлетворяется граничное условие при $x = 1$: $y_2(1) = y_0$. Формулы (19) позволяют находить каждый раз новое приближение $\Phi(x)$ до тех пор, пока относительная разность между последующими приближениями k_3 по модулю не окажется меньше наперед заданного положительного числа.

Выбор начальных приближений $\Phi(x)$, $c(x)$ и k_1 , входящих в формулировку задачи (22), достаточно произволен. Например, начальные приближения можно взять в виде:

$$\Phi(x) = 1/(1 + (y_0 - 1)x - (1 - 1/\epsilon)D)^2,$$

$$c^2 = k_0, \quad k_1 = 1.$$

Численное решение краевой задачи (22) строилось при помощи универсального варианта метода дифференциальной прогонки [4], в которой прогоночные коэффициенты находились из решения задачи Коши с использованием формул метода Рунге-Кутты точности 3. Для решения другой задачи Коши (23) применялись формулы Симпсона [5].

5. Сделаем одно замечание относительно случая $G = 0$, который описывается системой (7), (8) с учетом (19). В переменных

$$t = Q/D, \quad y_1 = A, \quad y_2 = B/D, \quad r = C/D \quad (24)$$

система преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= w, \quad y_2'(t) = \sin(y_1), \quad r'(t) = \cos(y_1), \\ w &= k_5 F^2(y_1(t), y_2(t), w, y_2(t)); \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \quad y_2 = 1, \quad r = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \\ y_2 &= y_0 \quad \text{при} \quad t = k_3. \end{aligned} \quad (26)$$

По существу, мы имеем задачу Коши для системы (25) с начальными условиями (26), интегрирование которой продолжается до тех пор, пока y_2 не станет равным y_0 .

Оказалось, что функция $H(w) = w/F^2(0,1,w)$ возрастает от $H(0)$ до максимального значения в окрестности $w = 4.5$, а затем монотонно убывает, оставаясь положительной. Поэтому в качестве входного параметра задачи (25), (26) использовалось значение $w_0 = w(0)$, $0 \leq w_0 \leq 4.5$. Соответствующий этому значению параметр k_5 вычислялся по формуле:

$$k_5 = w_0 / F^2(0,1,w_0).$$

Правая часть уравнения для y_1 в системе (25) определена как корень трансцендентного относительно w уравнения. Для отыскания корня использовался метод простой итерации с начальным приближением $w = 0$, поскольку при этом всегда из двух существующих корней находится наименьший, имеющий физический смысл.

6. В таблице приведены результаты численного решения краевой задачи (20). Для каждого из задаваемых значений k_0 численно отыскивалось то λ , при котором $\Lambda^* = 25^\circ$, $y_0 = 100$. Найденные значения параметров k_1 и k_3 определяли комбинации (см. (13)): $\epsilon = 3$,

$$\xi = k_0/k_3^2 = D^2 N/G, \quad \eta = \sqrt{\epsilon k_5} = U \sqrt{\epsilon_0 \epsilon / (2DN)}.$$

Последняя строка таблицы соответствует $G = 0$.

На рис. 2 представлены зависимости η от ξ при $\Lambda^* = 10^\circ, 25^\circ$ и 40° , $y_0 = 100$. Положение пунктирной линии определялось из формулы (15), $\epsilon = 3$. Эти результаты, в частности, позволяют судить о границах практического использования формулы (15).

Л и т е р а т у р а

1. К расчету равновесия упругих конструкций, используемых в пленочной электромеханике/В.С.Киндалев, Р.Г.Лукиянова, С.И.Фадеев, А.Е.Шведов.-В кн.: Вычислительные системы. Вып. 66. Моделирование в пленочной электромеханике, Новосибирск, 1975, с. 33-60.

2. ПОПОВ Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. -М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. -170 с.
3. ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. -М.: Физматгиз, 1958. -200 с.
4. ФАДЕЕВ С.И. О численном решении линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения методом дифференциальной прогонки. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с. 80-95.
5. БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений. Т.2. -М.: Физматгиз, 1962.

Поступила в ред.-изд.отд.

8 августа 1980 года