АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 85

УДК 519.1

О РЕКУРСИВНОМ РАЗБОРЕ ГРАФОВ

Ю.Е.Бессонов, В.А.Скоробогатов

Под рекурсивным разбором графа будем понимать следующую последовательность операций: исходному графу по некоторому правилу ставится в соответствие некоторый набор его подграфов, каждому из полученных подграфов по этому же правилу ставится в соответствие набор его подграфов и т.д. Процесс разбора продолжается до тех пор, пока не будет выполнено некоторое правило остановки.

Понятие разбора, по-видимому, впервые ввел А.А.Зыков [1]. Многими авторами (см., например, [2-4]) использован рекурсивный разбор графа при построении алгоритмов поиска клик, однако систематического исследования схемы рекурсивного разбора как самостоятельного объекта при этом не проводилось. Известна работа [5], в которой объектом исследования являются свойства операций последовательного разбиения графа на полные подграфы.

Интерес к изучению свойств рекурсивного разбора графа обусловлен следующим.

1. Меняя правила разбиения графа и правила остановки, можно строить различные алгоритмы отыскания "особых" множеств в графе (например, клик, независимых множеств и т.п.) или алгоритмы вычисления характеристик графов (например, плотности, числа раскраски вершин графа определенным количеством цветов и т.п.), а также получать оценки трудоемкости этих алгоритмов.

2. Можно вводить новые характеристики графа, которые выражают его сложность по отношению к операции разбора. Тогда способы оценки этих характеристик через известные параметры графа позволяют классифицировать графы по их сложности. Данная классификация может быть использована, например, при построении алгоритмов, способных адаптироваться к конкретным особенностям задачи, поскольку

такие алгоритмы можно представить как набор процедур, каждая из которых эффективно выполняется на некотором классе объектов, и как процедуру, способную распознавать принадлежность объекта к тому или иному классу.

3. Схема рекурсивного разбора может служить моделью некоторых физических явлений, например процесса распада сложных органических соединений.

В настоящей работе формально определены общая схема рекурсивного разбора и функция сложности графа как мера неэффективности разбора данного графа. Основная цель состояла в нахождении априорных оценок функции сложности графа через его параметры для схем рекурсивного разбора, предназначенных для построения алгоритмов поиска клик в графе.

§I. Общая схема рекурсивного разбора. Деревья разбора. Функция сложности графа

Рассматриваются конечные графы $G=(V,E)$ без петель и кратных ребер. Все термины и обозначения, используемые в дальнейшем и не определенные явно, можно найти в [8].

Обозначим через 2^G множество всех подграфов графа G и через $(2^G)^k$ – декартово произведение $\underbrace{2^G\times 2^G\times\ldots\times 2^G}_{k\ \text{раз}}$. Пусть $\Phi \equiv \{\Phi(H)\,|\,H\in 2^G\}$ – совокупность классов отображений: $\Phi(H) = \{\varphi\,|\,\varphi:\{H\}\to(2^H)^k\}$. Введем многомерные индексы: $s = i_1 i_2\ldots i_t$, где $0\le i_j\le k_j$, $1\le j\le t$. Для $s = i_1 i_2\ldots i_t$ и $s' = i'_1 i'_2\ldots i'_{t'}$, установим отношение порядка "$\le$" следующим образом. Пусть j_{min} – наименьший номер, при котором $i_{j_{min}}\ne i'_{j_{min}}$. Если $i_{j_{min}} < i'_{j_{min}}$, то $s\le s'$; если $i_{j_{min}} > i'_{j_{min}}$, то $s'\le s$. Если для всех $1\le j\le \min(t,t')$ имеет место $i_j = i_{j'}$, то $s\le s'$ при $t\le t'$ и $s'\le s$ при $t'\le t$.

Пусть B – булева функция, определенная на подмножествах из 2^G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Пусть выполнены следующие условия:

I) $G\equiv G_0\in\mathcal{Y}(G,B,\Phi)$;

2) если $\mathcal{Y}'\equiv\{G_s\,|\,s\le i_1 i_2\ldots i_{l-1}\}\subset\mathcal{Y}(G,B,\Phi)$ и значение $B(\mathcal{Y}')$ истинно, то существуют графы $G_{i_1 i_2\ldots i_{l-1}1}, G_{i_1 i_2\ldots i_{l-1}2},\ldots$ $\ldots, G_{i_1 i_2\ldots i_{l-1}k}\subset\mathcal{Y}(G,B,\Phi)$ и отображение φ из класса

$\Phi(G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}})$ такие, что $\varphi(G_{i_1 \dots i_{l-1}}) = (G_{i_1 \dots i_{l-1}1}, \dots$
$\dots, G_{i_1 \dots i_{l-1}k})$, причем $G_{i_1 \dots i_{l-1} i_l} \subset G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}$;

3) $\mathcal{G}(G, B, \Phi)$ содержит только те графы, которые указаны в пп. I) и 2).

Тогда будем говорить, что совокупность графов $\mathcal{G}(G, B, \Phi)$ получается в результате рекурсивного разбора графа G.

Будем говорить также, что булева функция B и множество классов отображений Φ определяют схему рекурсивного разбора (B, Φ) графа G.

Для записи компонентов отображения φ примем обозначения

$$\varphi_{i_l}(G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}) \equiv G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1} i_l} .$$

Пусть $T = (W, X, w_0)$ - корневое дерево с множеством вершин W, множеством ребер X и корневой вершиной w_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дерево $T = T(G)$ называется деревом разбора графа G по отношению к схеме (B, Φ), если определено отображение $h: W \to 2^G$, удовлетворяющее следующим условиям:

I) $h(w_0) = G_0 \equiv G$.

2) Пусть $w \in W$ и $h(w) = G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}$.

Если значение $B(\{G_s \mid s \leq i_1 i_2 \dots i_{l-1}\})$ ложно, то w - висячая вершина; в противном случае существуют $w_1, w_2, \dots, w_k \in W$ и $\varphi \in \Phi(h(w))$ такие, что $(w, w_j) \in X$ и $h(w_j) = \varphi_j(G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}}) =$
$= G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1} j}$.

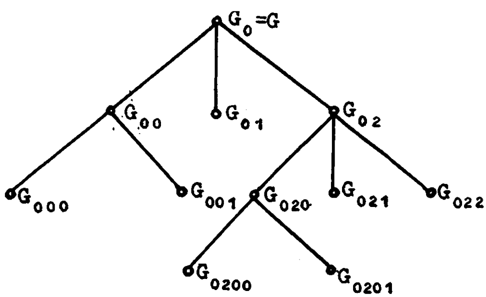

Рис. I

Таким образом, каждой схеме рекурсивного разбора можно поставить в соответствие определенное множество корневых деревьев по указанному выше правилу.

Деревья разбора удобно представлять диаграммами на плоскости, разделяя по ярусам вершины, находящиеся на одинаковом расстоянии от корневой, и располагая последователи каждой вершины w дерева в порядке, обусловленном вектором $\Phi(h(w))$ (см. рис.I).

Высотой дерева $T(G)$ будем называть расстояние (в метрике T) между корневой вершиной и самой удаленной от нее висячей вершиной.

Нетрудно показать, что высота любого дерева $T(G)$ не превосходит $p(G)+1$, где $p(G) \equiv |V(G)|$ - число вершин графа G.

Охарактеризуем рекурсивный разбор графа с точки зрения алгоритмической сложности. Пусть $G_s \in \mathcal{Y}(G, B, \Phi)$. Введем функционалы $\sigma_{G_s}(B) \equiv \sigma(B(\{G_{s'} \mid s' \le s\}))$ и $\theta_{G_s}(\varphi) \equiv \theta(\varphi(G_s))$, которые выражают соответственно алгоритмическую сложность[ж)] определения истинности функции В и алгоритмическую сложность построения отображения φ.

Пусть $\mathcal{T}(G,B,\Phi)$ обозначает множество всех деревьев разбора по отношению к схеме (B,Φ).

Через $\xi(G,B,\Phi)$ обозначим максимум числа вершин дерева разбора среди всех деревьев из $\mathcal{T}(G,B,\Phi)$, а через $|T|$ - алгоритмическую сложность реализации схемы (B,Φ): $|T| \equiv \sum\limits_{w \in W} (\sigma_{h(w)}(B) + \theta_{h(w)}(\varphi))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем функцией сложности $\mathrm{com}(G,B,\Phi)$ графа G по отношению к схеме (B,Φ) наибольшее значение величины $|T|$ по множеству $\mathcal{T}(G,B,\Phi)$.

§2. Примеры схем рекурсивного разбора

Рассмотрим конкретные примеры схем рекурсивного разбора, которые нам представляются интересными как с теоретической, так и с практической точек зрения.

I. Схема (B_1, Φ_1).

Пусть $H \in 2^G$ и $v \in V(H)$. Через $\Gamma_H(v)$ обозначим множество $\{u \in V(H) \mid \{u,v\} \in E(H)\}$. Положим $\Phi_1(H) = \{\varphi_v \mid v \in V(H)\}$, где

ж) В данном случае под алгоритмической сложностью мы будем понимать число операций при выполнении соответствующего алгоритма.

$$\varphi_v(H) = \begin{cases} \langle\langle \Gamma_H(v)\rangle, H-v\rangle, \text{ если } \Gamma_H(v) \neq V(H)\setminus \{v\}, \\ \langle \Gamma_H(v)\rangle \text{ - в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $G_0 = G$ и выберем некоторую вершину $v_{00} \in V(G_0)$. Положим $G_{00} = \varphi_{v_{00},1}(G_0) = \langle \Gamma_{G_0}(v_{00})\rangle$ и $G_{01} = \varphi_{v_{00},2}(G_0) = G_0 - v_{00}$, если $\Gamma_{G_0}(v_{00}) \neq V(G_0)\setminus\{v_{00}\}$. Далее, по индукции, пусть $G_{i_1 i_2 \dots i_l}$ - некоторый граф, полученный указанным выше способом $(l \geq 2)$, т.е. $G_{i_1 i_2 \dots i_l} = G_s = \varphi_{v_s,1}(G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}})$ либо $G_s = \varphi_{v_s,2}(G_{i_1 i_2 \dots i_{l-1}})$. Индексу $s = i_1 i_2 \dots i_l$ поставим в соответствие два множества индексов $I_1(s)$ и $I_2(s)$ следующим образом: $I_1(s) = \{s' \mid s' = i_1 i_2 \dots i_{t-1}\, 0$, если $i_t = 1;\ 1 \leq t \leq l\}$, $I_2(s) = \{s'' \mid s'' = i_1 i_2 \dots i_{t-1}\, i_t,\ i_t = 0,\ 2 \leq t \leq l\}$.

Например, для s = 0II00II0 мы будем иметь:

$$I_1(s) = \{0II00I0,\ 0II000,\ 0I0,\ 00\},$$

$$I_2(s) = \{0II00II0,\ 0II00,\ 0II0\}.$$

Пусть $\mathcal{G}'_s = \{G_{s'} \mid s' \in I_1(s)\}$, $V^*_s = \{v_{s''} \mid s'' \in I_2(s)\}$. Положим, по определению, $B_1(\{G_{s'} \mid s' \leq s\}) = B_{11}(\{G_{s'} \mid s' \leq s\}) \vee B_{12}(\{G_{s'} \mid s' \leq s\})$, где функция B_{11} истинна в том и только в том случае, когда $G_s \neq \emptyset$. Значение B_{12} будем считать истинным при $s=0$ либо при $s = i_1 i_2 \dots i_l \neq 0$, если только $V(G_s) \cup V^*_s \not\subseteq V^*_{s'} \cup V(G_{s'})$ для всех $G_{s'} \in \mathcal{G}'_s$. В остальных случаях значение B_{12} будем считать ложным.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Множество V^*_s, определенное выше, всегда образует полный подграф в G. Действительно, для всех $s_1 \leq s$ вершина $v_{s_1} \in V^*_s$ входит в $\Gamma_G(v_{s_2})$ для всех $s_2 \leq s_1$.

На рис.2 изображено дерево разбора графа G, определенное схемой (B_1, Φ_1). Вершина w_{0111} - висячая, так как $B_{12}(\{G_{s'} \mid s' \leq 0111\})$ имеет значение "ложь", поскольку $G_{0111} \subseteq G_{00}$.

Схема (B_1, Φ_1) в явной или неявной форме использована рядом авторов для построения алгоритмов поиска клик в графе (см., например, [2,3]).

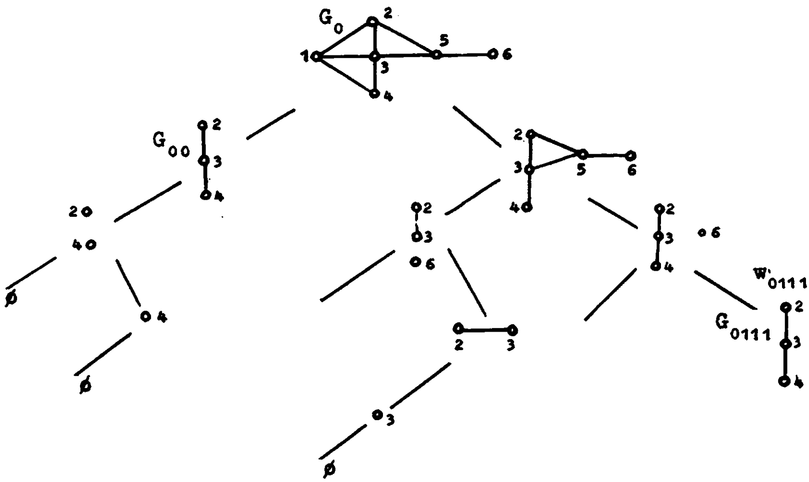

Рис. 2

2. С х е м а (B_2, Φ_2). Пусть для $H \in 2^G$ класс

$$\Phi_2(H) = \{\varphi_v \mid \varphi_v(H) = (\hat{H}_1(v), \hat{H}_2(v), \dots, \hat{H}_k(v))\},$$

где $\hat{H}_i(v)$ есть i-й пояс (т.е. подграф $\langle V_{i-1} \cup V_i \rangle$) в разбиении графа H относительно вершины v (см. [6]) с минимальной степенью в H, $V_0 \equiv \{v\}$, $i=1,2,\dots,k$. Пусть $V_{i-1} \equiv L(\hat{H}_i(v))$. Функцию $B_2(\{G_{s'} \mid s' \le s\})$ определим как $B_2 = B_{21} \vee B_{22}$, где $B_{21}(\{G_{s'} \mid s' \le s\})$ истинна тогда и только тогда, когда G_s есть полный подграф в G. Функция B_{22} принимает истинные значения при $s=0$ либо при $s=i_1 i_2 \dots i_l \ne 0$, если только $G_s \subseteq L(G_{i_1 i_2 \dots i_j})$ для всех $j \in [1,l]$. На рис.3

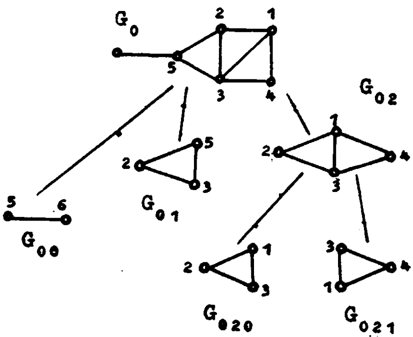

Рис.3

изображено дерево $T(G)$, соответствующее схеме (B_2, Φ_2). Схема (B_2, Φ_2) с точностью до терминологии является алгоритмом поиска клик в графе, рассмотренном в [4].

3. Схема (B_3, Φ_3). Пусть

$$\Phi_2(H) = \{\varphi_{V_1,V_2} \mid \varphi_{V_1,V_2}(H) = (H_1, H_{12}, H_2)\},$$

где H_1, H_{12} и H_2 – подграфы в H, порожденные множествами $V_1, V_1 \cap V_2, V_2$ соответственно при условии, что $V(H) = V_1 \cup V_2$. Функция B_3 совпадает с B_{21} из 2. Схема (B_3, Φ_3), названная последовательным разбиением графа на полные подграфы, определена и исследована в работе [5].

§3. Свойства схем, определяемых множеством отображений Φ_1

Обозначим через $\mathcal{M}(G)$ множество всех клик графа G. Пусть V^*_s – подмножество вершин графа G, определенное в §2.

ТЕОРЕМА I. Пусть $K = \{\langle V^*_s \rangle \mid G_s = \emptyset$ и $B_{12}(\{G_{s'} \mid s' \leq s\})$ истинно$\}$. Тогда $K = \mathcal{M}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle V^*_s \rangle \in K$. В §2 (замечание I) показано, что $\langle V^*_s \rangle$ – полный подграф в G. Так как функция $B_{12}(\{G_{s'} \mid s' \leq s\})$ истинна, то не существует вершины $v \in V \setminus V^*_s$ такой, что $V^*_s \subset \Gamma_G(v)$. Поэтому $\langle V^*_s \rangle \in \mathcal{M}(G)$. Пусть теперь $\langle M \rangle \in \mathcal{M}(G)$. Поскольку для каждой вершины v_1 графа G справедливо утверждение: $v_1 \in M$ или $v_1 \notin M$, то M целиком содержится либо в $\{v_1\} \cup \Gamma_G(v_1)$, либо в $V(G) \setminus \{v_1\}$. Продолжая разбиение, получим, что M целиком содержится в некотором множестве $\{v_1, v_2, \ldots, v_l\} \cup V(G_{i_1 i_2 \ldots i_l})$. При этом значение $B_1(\{G_{s'} \mid s' \leq s = i_1 i_2 \ldots i_l\})$ истинно тогда и только тогда, когда $G_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \emptyset$. Поэтому, когда $G_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \emptyset$, значение B_{12} истинно. Следовательно, $\langle M \rangle = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_l\} \rangle \in K$. Теорема доказана.

Теорема I устанавливает свойство схемы (B_1, Φ_1), которое может быть использовано для построения алгоритмов отыскания клик графа.

Пусть $T(G) \in \mathcal{T}(G, B_1, \Phi_1)$ – произвольное дерево разбора. Оценим его сложность.

ТЕОРЕМА 2. Справедливо неравенство $|T| \le c_0 \cdot p^2(G) \cdot p(T)$, где c_0 – некоторая константа*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subseteq G$. Оценим $\theta_H(\varphi)$ – сложность построения разбиения $\varphi_v(H) = (\langle \Gamma_H(v) \rangle, H-v)$. Очевидно, $\Gamma_H(v) = \Gamma_G(v) \cap V(H)$. Известно [7], что сложность нахождения пересечения двух множеств A_1 и A_2 есть $O(\max\{|A_1|, |A_2|\})$. Поэтому $\theta_H(\varphi) \le c_1 \cdot p(G)$. Оценим сложность определения истинности функции $B_1 = B_{11} \vee B_{12}$. Сложность функции B_{11} есть, очевидно, $O(1)$. Сложность определения истинности B_{12} в худшем случае есть сложность нахождения k_1 пересечений k_2-элементарных множеств, где $k_1 = O(p(G))$ и $k_2 = O(p(G))$, и составляет поэтому $O(p^2(G))$. Значит,

$$|T| = \sum_{w \in W} (\sigma_{h(w)}(B_1) + \theta_{h(w)}(\varphi)) \le \sum_{w \in W} (c_1 + c_2 p^2(G) + c_3 \cdot p(G)) \le c_0 \cdot p^2(G) p(T).$$

СЛЕДСТВИЕ. Из теоремы 2 и определения 3 вытекает, что

$$\mathrm{com}\,(G, B_1, \Phi_1) \le c_0 \cdot p^2(G) \cdot \xi(G, B_1, \Phi_1).$$

Исследуем свойства функции $\xi(G, B_1, \Phi_1)$.

ЛЕММА I. Для любой $v \in V(G)$ справедливо неравенство $\xi(G-v, B_1, \Phi_1) \le \xi(G, B_1, \Phi_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T(G-v) \in \mathcal{T}(G-v, B_1, \Phi_1)$ – произвольное дерево разбора графа $G-v$. Докажем, что всегда существует дерево $T^*(G) = (W^*, X^*, w_0^*) \in \mathcal{T}(G, B_1, \Phi_1)$ такое, что $T(G-v) \subseteq T^*(G)$. Определим соответствие $\Psi: W(T(G-v)) \to W^*(T^*(G))$ по следующим правилам:

I. Корневой вершине $T(G-v)$ поставим в соответствие корневую вершину $T^*(G)$: $\Psi(w_0) = w_0^*$.

2. Пусть $w \in W(T(G-v))$ и предшественником w является w'. Из определения дерева T следует, что для некоторой $v' \in V(h(w'))$ имеет место либо $h(w) = \langle \Gamma_{h(w')}(v') \rangle$, либо $h(w) = h(w') - v'$. В первом случае вершине v поставим в соответствие $\Psi(w) = w^* \in W^*$, для которой $h(w^*) = \langle \Gamma_{h(\Psi(w'))}(v') \rangle$, во втором случае вер-

---

*) Числовые константы будем обозначать символами c_i, $i=0,1,2,\ldots$

шину w^* , для которой $h(w^*) = h(\Psi(w'))-v'$ (см. рис.4). При этом, очевидно, для каждой вершины $w \in W$ имеет место $h(w) = h(w^*) - v$.

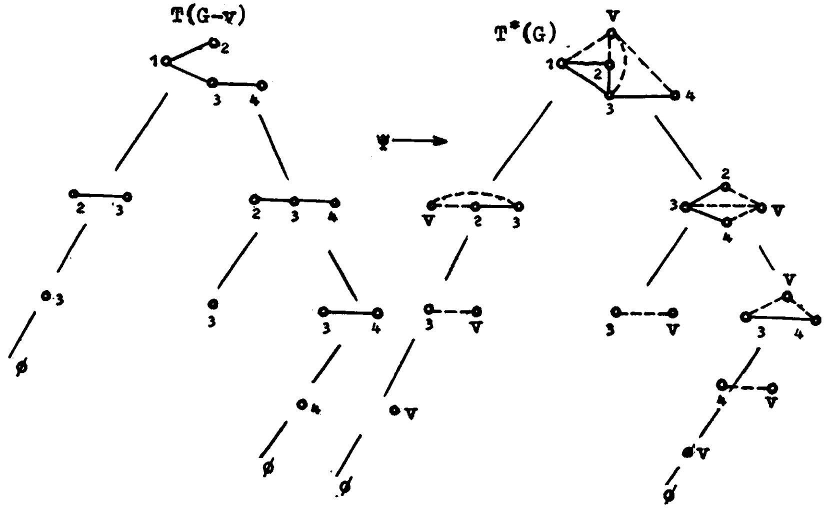

Рис. 4

Таким образом, Ψ есть изоморфное вложение дерева $T(G-v)$ в дерево $T^*(G)$. Поэтому $|W(T(G-v))| \le |W^*(T^*(G))|$, откуда и следует утверждение леммы I.

ТЕОРЕМА 3. Если $H \subseteq G$, то $\xi(H,B_1,\Phi_1) \le \xi(G,B_1,\Phi_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $H \subseteq G$, то существует последовательность вершин $v_1,v_2,\dots,v_l$ из $V(G)$ такая, что $H = (\dots(G-v_1) - v_2)\dots - v_{l-1})-v_l$. Применяя l раз лемму I, устанавливаем справедливость теоремы.

Теорема 3 позволяет установить нижние оценки для функции $\xi(G, B_1, \Phi_1)$, если известны подграфы, содержащиеся в G , и значения функции для этих подграфов.

ПРИМЕР I. Нетрудно установить (рис.5), что $\xi(\bar{K}_n, B_1, \Phi_1)=2n$, $\xi(K_n, B_1, \Phi_1) = n+1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\beta_0(G)$ и $m(G)$ - соответственно число внутренней устойчивости и плотность графа G. Из теоремы 3 и соотношений из примера I следует, что $\beta_0(G) \le \frac{1}{2}\xi(G, B_1, \Phi_1)$ и $m(G) \le \xi(G) - 1$.

Пусть $\rho = (\rho_1, \rho_2,\dots,\rho_n)$ - некоторый набор числовых функций, определенных на графах, и $a = (a_1,a_2,\dots, a_n)$ - некоторый набор чи-

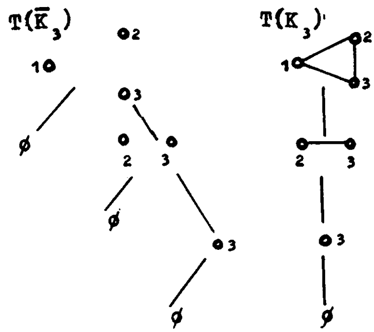

Рис. 5

сел. Обозначим через $\mathcal{G}_\rho(a)$ множество всех графов G таких, что $\rho_i(G) \le a_i$, $i \in [1,n]$.

Будем использовать следующие специальные обозначения для некоторых функций на графах: $p(G) \equiv |V(G)|$, $q(G) \equiv |E(G)|$, $r(G)$ – радиус графа; $m(G)$ – плотность графа; $l(G)$ – размер минимальной клики графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть для произвольной схемы разбора (B,Φ)

1) $\Upsilon_\rho(B,\Phi,a) = \max\limits_{G\in\mathcal{G}_\rho(a)} \xi(G, B,\Phi)$,

2) $\mathrm{Com}_\rho(B,\Phi,a) = \max\limits_{G\in\mathcal{G}_\rho(a)} \mathrm{com}(G, B,\Phi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из теоремы 2 и определений 3 и 4 вытекает, что $\mathrm{Com}_\rho(B_1,\Phi_1, a) \le c_0\cdot p^2(G)\cdot\Upsilon_\rho(B_1,\Phi_1,a)$.

Для каждого графа G набор функций ρ можно трактовать как набор параметров, или инвариантов. Если $H\in 2^G$, то, очевидно, в общем случае $\rho_i(H) \ne \rho_i(G)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $G \in \mathcal{G}_\rho(a)$. Введем наборы чисел

$$a_i' \equiv \max_{G\in\mathcal{G}_{\rho_i}(a_i)} \max_{v\in V_*(G)} \rho_i(\langle \Gamma_G(v) \rangle),$$

$$a_i'' \equiv \max_{G\in\mathcal{G}_{\rho_i}(a_i)} \max_{v\in V(G)} \rho_i(G-v),$$

где $V_*(G) = \{v\in V(G) \mid \Gamma_G(v) \ne V(G)\setminus\{v\}\}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

ЛЕММА 2. Справедливо неравенство $\Upsilon_\rho(B_1,\Phi_1, a) \le \Psi(a)$, где $\Psi(a)=\Psi(a_1, a_2,\ldots,a_n)$ – некоторая функция, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$\Psi(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \Psi(a_1',a_2',\ldots,a_n') + \Psi(a_1'',a_2'',\ldots,a_n'')+1. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – произвольный граф из $\mathcal{G}_\rho(a)$. В любом дереве разбора T(G) корневая вершина имеет степень 1 или 2. Поэтому

$$\max_{T\in\mathcal{T}(G,B_1,\Phi_1)} p(T(G)) \le \max\{1+\max_{v\in V(G)}\ \max_{T\in\mathcal{T}(G-v,B_1,\Phi_1)} p(T(G-v)),$$

$$1+\max_{v\in V_*(G)}\ \max_{T\in\mathcal{T}(\langle\Gamma_G(v)\rangle,B_1,\Phi_1)} p(T(\langle\Gamma_G(v)\rangle))\ +$$

$$+\max_{v\in V(G)}\ \max_{T\in\mathcal{T}(G-v,B_1,\Phi_1)} p(T(G-v))\}.$$

Из определения 5 следует, что для каждого $G\in\mathcal{G}_\rho(a)$ любой граф $\langle\Gamma_G(v)\rangle\in\mathcal{G}_\rho(a')$ и $G-v\in\mathcal{G}_\rho(a'')$. Поэтому можно записать

$$Y_\rho(B_1,\Phi_1,a) = \max_{G\in\mathcal{G}_\rho(a)}\ \max_{T\in\mathcal{T}(G,B_1,\Phi_1)} p(T(G)) \le$$

$$\le \max_{G'\in\mathcal{G}_\rho(a')}\ \max_{T\in\mathcal{T}(G',B_1,\Phi_1)} p(T(G'))\ +$$

$$+\max_{G''\in\mathcal{G}_\rho(a'')}\ \max_{T\in\mathcal{T}(G'',B_1,\Phi_1)} p(T(G''))+1 = Y_\rho(B_1,\Phi_1,a')+Y_\rho(B_2,\Phi_2,a'')+1,$$

откуда и следует справедливость леммы.

Опираясь на лемму 2, сформулируем следующую методику получения верхних оценок функции сложности графа, зависящих от параметров графа.

I. Выбираем некоторый конкретный набор $\rho=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ параметров графа; в соответствии с определением 5 находим функциональные зависимости $a_i'=a_i'(a_i)$, $a_i''=a_i''(a_i)$.

2. Оцениваем функцию $\Psi(a)$, удовлетворяющую соотношению (I).

(К сожалению,не существует общих методов решения рекуррентных уравнений даже для функций, зависящих от одной переменной.Однако на практике конкретный вид рекуррентного соотношения позволяет, не прибегая к рекурсивному разбору графа, за линейное время вычислить верхнюю оценку его функции сложности при любом наперед заданном наборе $\{a_i\}$, что является в данном случае более ценным, чем знание асимптотики.)

Приведем некоторые аналитические оценки для функции сложности графа, зависящие от определенных параметров.

ТЕОРЕМА 4. Для любого натурального p_0 справедливо неравенство

$$\mathrm{Com}_p(B_1,\Phi_1,p_0) \le c_0\cdot p_0^2\, 1{,}62^{p_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая замечание 3, достаточно показать $\Upsilon_p(B_1,\Phi_1,p_0) \le c_0\, 1{,}62^{p_0}$. Из леммы 2 следует, что $\Upsilon_p(B_1,\Phi_1,p_0) \le \Psi(p_0)$, где $\Psi(p_0) = \Psi(p_0') + \Psi(p_0'') + 1$, причем

$$p_0' = \max_{G\in\mathcal{G}_p(p_0)} \max_{v\in V_*(G)} p(\langle \Gamma_G(v)\rangle) = p_0 - 2$$

и

$$p_0'' = \max_{G\in\mathcal{G}_p(p_0)} \max_{v\in V(G)} p(G-v) = p_0 - 1 .$$

Поэтому $\Upsilon_p(B_1,\Phi_1,p_0) \le \Psi(p_0) = \Psi(p_0-1) + \Psi(p_0-2) + 1$, при этом граничными условиями являются $\Psi(1) = 2$, $\Psi(2) = 4$.

Нетрудно установить, что общим решением уравнения $\Psi(p_0) = \Psi(p_0-1) + \Psi(p_0-2)+1$ является функция $\Psi(p_0) = c_1\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{p_0} + c_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{p_0} - 1$, где c_1 и c_2 вычисляются из граничных условий. Таким образом, для некоторой константы c_0 справедливо неравенство $\Upsilon_p(B_1,\Phi_1,p_0) \le c_0\, 1{,}62^{p_0}$.

Рассмотрим теперь класс графов $\mathcal{G}_{p,m}(p_0,m_0)$.

ТЕОРЕМА 5. *Для всех графов с числом вершин и плотностью, не превосходящими соответственно p_0 и m_0, имеет место оценка*

$$\mathrm{Com}_{p,m}(B_1,\Phi_1,p_0,m_0) \le c_0\, p_0^{m_0+2} . \qquad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $\Upsilon_{p,m}(B_1,\Phi_1,p_0,m_0) \le c_0\, p_0^{m_0}$. Из леммы 2 имеем $\Upsilon_{p,m}(B_1,\Phi_1,p_0,m_0) \le \Psi(p_0,m_0) = \Psi(p_0-2,m_0-1) + \Psi(p_0-1,m_0)+1$. Докажем, что $\Psi(p_0,m_0)\le 2\cdot p_0^{m_0} + \sum_{i=0}^{m_0-1} p_0^i$. Для этого воспользуемся методом математической индукции. При $m_0=1$ и любом p_0 справедливо $\Psi(p_0,1) = 2\cdot p_0$ (см. пример I). Пусть неравенство выполняется при всех $\tilde m_0$ из интервала $[1, m_0]$. Тогда

$$\Psi(p_0, m_0+1) = \Psi(p_0-2, m_0) + \Psi(p_0-1, m_0+1) + 1 = \Psi(p_0-2, m_0) +$$

$$+ \Psi(p_0-3, m_0) + \Psi(p_0-2\ m_0+1) + 2 = \ldots =$$

$$= \sum_{i=2}^{p_0-m_0-2} \Psi(p_0-i, m_0) + \Psi(m_0+1, m_0+1) + p_0 - m_0 =$$

$$= \sum_{i=2}^{p_0-m_0-2} \Psi(p_0-i, m_0) + \Psi(m_0-1, m_0) + \Psi(m_0, m_0) + 1 + p_0 -$$

$$- m_0 \leq \sum_{j=2}^{p_0-1} [\Psi(p_0-j, m_0) + 1] \leq 2 \cdot p_0^{m_0+1} + \sum_{i=0}^{m_0} p_0^i .$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $m_0 \ll p_0$ оценка (2) является достаточно хорошо применимой. Однако если p_0 фиксировано, а m_0 растет, то эта оценка становится все более завышенной.

Для каждого $H \in 2^G$ определим подклассы $\Phi_{11}(H) \subseteq \Phi_1(H)$ следующим образом:

$$\Phi_{11}(H) = \{\varphi_{v^*} \mid \deg_H v^* = \min_{v \in V(H)} \deg_H v\},$$

где

$$\varphi_{v^*} = \begin{cases} \langle \Gamma_H(v^*) \rangle, \text{ если } H \text{ — полный подграф в } G, \\ (\langle \Gamma_H(v^*) \rangle, H - v^*) \text{ иначе}, \end{cases}$$

и $\deg_H v$ обозначает степень вершины v в H. Поскольку $\Phi_{11}(H)$ — подкласс в $\Phi_1(H)$, то все утверждения, доказанные в настоящем разделе автоматически переносятся на деревья из $\mathcal{T}(G, B_1, \Phi_{11})$ и на функции $\mathrm{com}(G, B_1, \Phi_{11})$, $\mathrm{Com}_\rho(B_1, \Phi_{11}, a)$, $\xi(G, B_1, \Phi_{11})$ и $\Upsilon_\rho(B_1, \Phi_{11}, a)$.

Установим теперь свойство схемы (B_1, Φ_{11}), которое, по-видимому, не распространяется на (B_1, Φ_1). Докажем предварительно две леммы.

ЛЕММА 3. *Пусть задано рекуррентное соотношение* $f(p) = f(p-k) + f(p-1) - 1$, *где* $1 < k < p$ *и при* $p \leq k$ *функция* $f(p)$ *некоторым образом определена. Тогда существует такая константа* c_0, *что для любого* $\varepsilon > 0$

$$f(p) \le c_0(x_0+\varepsilon)^p, \qquad (3)$$

где x_0 - корень уравнения

$$x^{-k}+x^{-1}-1=0 . \qquad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции. При $1 \le p \le k$, как бы ни была задана функция $f(p)$, всегда можно найти константу c_0 такую, что неравенство (3) будет выполняться. Пусть $p > k$ и для всех $\tilde{p}$ из интервала $[1,p-1]$ неравенство (3) выполняется. Тогда $f(p)=f(p-k)+f(p-1)+1\le c_0(x_0+\varepsilon)^{p-k}+$
$+c_0(x_0+\varepsilon)^{-1}+1=c_0(x_0+\varepsilon)^p[(x_0+\varepsilon)^{-k}+(x_0+\varepsilon)^{-1}+\frac{1}{c_0(x_0+\varepsilon)^p}]$.

Сумма первых двух членов в квадратных скобках всегда меньше единицы, так как $x^{-k}+x^{-1}=1$, а третий член благодаря выбору константы c_0 можно сделать сколь угодно малым. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть граф G имеет плотность $m(G)$ и минимальную степень $\delta(G)\equiv\min\limits_{v\in V}\deg_G v$. Тогда выполняется неравенство

$$\delta(G) \le \frac{m(G)-1}{m(G)}\cdot p(G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [8], что $\frac{p(\bar{G})}{\beta_0(\bar{G})} \le 1+\Delta(\bar{G})$, где $\bar{G}$ - дополнение графа G, $\Delta(\bar{G}) \equiv \max\limits_{v\in V}\deg_{\bar{G}} v$, $\beta_0(\bar{G})$ - число внутренней устойчивости графа $\bar{G}$.

Поскольку $p(G)=p(\bar{G})$, $m(G)=\beta_0(\bar{G})$, $1+\Delta(\bar{G})=p(G)-\delta(G)$, то $m(G) \ge \frac{p(G)}{p(G)-\delta(G)}$, откуда $\delta(G) \le (m(G)-1)p(G)/m(G)$.

Сформулированное ниже утверждение устанавливает оценку для функции сложности графа G из класса $\mathcal{G}_{p,m}(p_0,m_0)$, которая оказывается более точной, чем оценка (2).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $p_0=k\cdot m_0+n$, где k - натуральное число, а n - целое из интервала $[0,m_0-1]$. Тогда существует константа c_0 такая, что для любого $\varepsilon>0$ справедливо

$$Y_{p,m}(B_1,\Phi_{11},p_0,m_0) \le c_0(x_0+\varepsilon)^{p_0}\ , \qquad (5)$$

где x_0 - корень уравнения (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2, $Y_{p,m}(B_1,\Phi_{11},p_0,m_0) \le \Psi(p_0,m_0)$, где $\Psi(p_0,m_0) = \Psi(p_0',m_0') + \Psi(p_0'',m_0'') + 1$. Поскольку для каждого $\varphi_{v^*} \in \Phi_{11}(H)$ имеет место $\varphi_{v^*}(H) = \langle \Gamma_H(v^*) \rangle$, где v^* - вершина с минимальной степенью, то, по лемме 4, $p_0' = \left[\frac{m_0-1}{m_0}\cdot p_0\right]$. Кроме того, очевидно, $m_0' = m_0-1$, $p_0'' = p_0-1$, $m_0'' = m_0$.

Таким образом, имеем

$$\Psi(p_0,m_0) = \Psi\left(\left[\frac{m_0-1}{m_0}\, p_0\right],\ m_0-1\right) + \Psi(p_0-1,\ m_0) + 1$$

или, учитывая условие теоремы, $\Psi(p_0,m_0) = \Psi(p_0-k,m_0-1)+\Psi(p_0-1,m_0)+1$. Применяя лемму 3, получаем (5).

ТЕОРЕМА 7. Справедлива оценка

$$Y_{p,q,m,l}(B_1,\Phi_{11},p_0,q_0,m_0,l_0) \le \Psi(p_0,q_0,m_0,l_0),$$

где функция Ψ удовлетворяет соотношению

$$\Psi(p_0,q_0,m_0,l_0) = \Psi\left(\left[\frac{m_0-1}{m_0}\, p_0\right],\ q_0-2(l_0-1),\ m_0-1,\ l_0-1\right) +$$
$$+ \Psi(p_0-1,\ q_0-l_0+1,\ m_0,l_0) + 1\ .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая лемму 2, достаточно показать, что

$$p_0' \le \left[\frac{m_0-1}{m_0}\, p_0\right],\quad p_0'' = p_0-1, \qquad (6)$$

$$q_0' \le q_0-2(l_0-1),\quad q_0'' \le q_0-l_0+1\ , \qquad (7)$$

$$m_0' = m_0-1,\ m_0'' = m_0,\ \ l_0' = l_0-1\ ,\ l_0'' = l_0. \qquad (8)$$

Соотношения (6) были доказаны ранее, а равенства (8) очевидны. Докажем соотношения (7). Пусть $G \in \mathcal{G}_{p,q,m,l}(p_0,\ q_0,\ m_0,\ l_0)$ и v^* - такая вершина, для которой $q_0' = q(\langle \Gamma_G(v^*)\rangle)$ и $\Gamma_G(v^*) \ne$

$\neq V(G)\setminus\{v^*\}$. Тогда, очевидно, $V' = (V(G)\setminus\Gamma_G(v^*))\setminus\{v^*\} \neq \emptyset$. Ясно, что q_0' будет наибольшим, если множество V' состоит из одной вершины v'. Поэтому $q_0' \leq q_0 - \deg_G v^* - \deg_G v'$. Поскольку $\deg_G v^* = \delta(G) \geq l_0 - 1$ и $\deg_G v' \geq \delta(G) \geq l_0 - 1$, то $q_0' \leq q_0 - 2(l_0 - 1)$. Далее, наибольшее число ребер в графе $G - v$, очевидно, не превосходит $q_0 - \delta(G)$ и, следовательно, $q_0'' \leq q_0 - (l_0 - 1)$. Теорема доказана.

Введем схему рекурсивного разбора (B_1, Φ_5). Для каждого $H \in 2^G$ классы отображений $\Phi_5(H)$ определим посредством равенства

$$\Phi_5(H) = \begin{cases} \Phi_1(H), & \text{если } H \neq G, \\ \Phi_2(H), & \text{если } H = G. \end{cases}$$

Другими словами, разбор графа G в соответствии со схемой (B_1, Φ_5) осуществляется следующим образом:

1. Строится разбиение $\hat{G}(v)$ графа G относительно некоторой вершины v с минимальной степенью.

2. Осуществляется разбор каждого пояса $G_i(v)$ в данном разбиении в соответствии со схемой (B_1, Φ_{11}). На рис. 6 изображено дерево разбора графа G в соответствии со схемой (B_1, Φ_5).

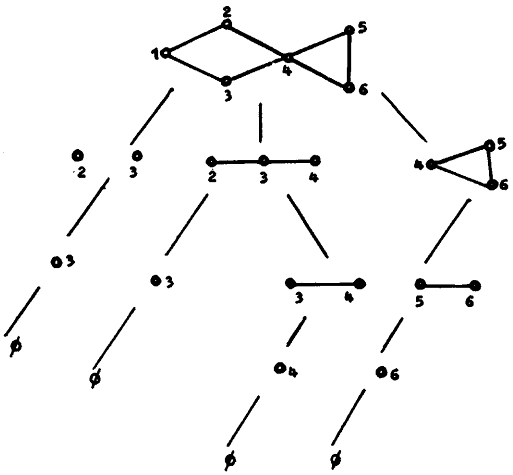

Рис. 6

Приведем без доказательства утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем.

ЛЕММА 5. Пусть $\Psi(p)$ - функция, определенная на множестве натуральных чисел такая, что для любого p выполняется неравенство $\Psi(p) - \Psi(p-1) \leq \Psi(p+1) - \Psi(p)$. Тогда для любых натуральных p_1, p_2, p_3 выполняется неравенство: $\Psi(p) - \Psi(p-1) \leq$
$\leq \tilde{\Psi}(p_1+p_2+p_3-1) + \tilde{\Psi}(p_2+1)$.

ТЕОРЕМА 8. П у с т ь $T(G)\in\mathcal{T}(G,B_1,\Phi_5)$ и k - с т е п е н ь к о р н е в о й в е р ш и н ы д е р е в а $T(G)$. Т о г д а в ы п о л н я е т с я н е р а в е н с т в о $p(T)\le c_0\cdot\Psi(p_0-k+2, a_2,\dots, a_n)+c_1\cdot p_0$, г д е $\Psi(p_0, a_2,\dots,a_n)$ - в е р х н я я о ц е н к а ф у н к ц и и $\Upsilon_{p,\rho_2,\dots,\rho_n}(B_1,\Phi_{11},p_0, a_2,\dots, a_n)$, о п р е д е л е н н а я и з (I).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для краткости $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) = \Psi(\widetilde{p}, a_2,\dots,a_n)$. Мощность i-го слоя V_i в относительном разбиении $\hat{G}(v) = (\{v\},V_1, V_2,\dots, V_k)$ обозначим через p_i $(i=1,2,\dots,k)$. Тогда $p(\hat{G}_i) = p_i + p_{i+1}$. Следовательно,

$$p(T)\le 1+\sum_{i=1}^{k-1}\widetilde{\Psi}(p_i+p_{i+1}).$$

Из леммы 2 следует, что $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-1)+\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-2)+1$, $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}+1) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) + \widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-1)+1$. Поскольку $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}+1)-\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{p}) -\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-1)+\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-1) - \widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-2)$ и $\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-1)\ge\widetilde{\Psi}(\widetilde{p}-2)$, то функция Ψ удовлетворяет условиям леммы 5. Поэтому из (8) следует

$$p(T)\le 1+\widetilde{\Psi}(p_0-k+2)+\sum_{i=2}^{k-1}\widetilde{\Psi}(p_i+1).$$

Возможны следующие случаи:

I. Пусть $p_i=1$ для всех $i\in[2, k-1]$. Тогда очевидно $\Psi(p_i+1) = 4$ и $p(T)\le 1+\widetilde{\Psi}(p_i-k+2)+4(k-2)$.

2. Пусть $p_{i_j}=1$, $j=1,2,\dots,g$; $p_t>1$, и $t\ne i_j$, $t\in[2,k-1]$. Тогда

$$\sum_{i=2}^{k-1}\Psi(p_i+1)=\sum_{p_i>1}[\Psi(p_i)+\Psi(p_i-1)+1]+\sum_{p_i=1}\widetilde{\Psi}(p_i+1)=2\sum_{p_i>1}\Psi(p_i)+k-g+4g.$$

По лемме 5

$$\sum_{p_i>1}\Psi(p_i)\le\widetilde{\Psi}\Big(\sum_{j=1}^{k-1}p_{i_j}-k+g+2\Big)=\widetilde{\Psi}\Big(\sum_{t=1}^{k}p_t-k+2\Big)=\widetilde{\Psi}(p_0-k+2).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Е с л и G и м е е т р а д и у с $r(G)$, т о д л я $T(G)\in\mathcal{T}(G,B_1,\Phi_5)$ с п р а в е д л и в о н е р а в е н с т в о:

$$p(T)\le c_0\cdot\Psi(p_0-r+2,a_2,\dots,a_n)+c_1\cdot p_0.$$

Литература

1. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. - Новосибирск: Наука, 1969. - 543 с.

2. DAS S.R., SHENG C.L., CHEN Z. An algorithm for finding all maximal complete subgraphs and an estimate of the order of computational complexity. - Comput. and Elec. Eng., 1978, v.5, N 4, p. 365-368.

3. BRON C., KERBOSCH J. Finding all clicues of an undirected graph.-Comm.ACM, 1973, v.16, N 9, p.575-577.

4. БЕССОНОВ Ю.Е., СКОРОБОГАТОВ В.А. Применение относительных разбиений для поиска клик. -В кн.: Автоматизация проектирования в микроэлектронике. Теория. Методы. Алгоритмы. (Вычислительные системы, вып. 77.) Новосибирск, 1978, с.24-33.

5. VOLDŘICH J. Gradual partition of a graph into complete graphs.-Čas.pěstov.mat., 1978, v.103, N 1, p.8-16.

6. СКОРОБОГАТОВ В.А. Относительные разбиения и слои графов.- В кн.: Вопросы обработки информации при проектировании систем.(Вычислительные системы, вып. 69.) Новосибирск, 1977, с.3-10.

7. АХО, ХОПКРОФТ, УЛЬМАН. Построение и анализ эффективных алгоритмов. - М.: Мир, 1979. - 536 с.

8. ХАРАРИ Ф. Теория графов. -М.: Мир, 1973. - 300 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
24 февраля 1981 года