АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ СТРУКТУРНОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 85

УДК 621.395.74:519.14

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

С.Б.Кауль, В.К.Попков, С.М.Майнагашев

Как правило, при исследовании случайных графов [3,6] рассматривается такая характеристика, как вероятность связности данного случайного графа. С максимизацией этой характеристики обычно связывают следующие структурные характеристики графов: число деревьев графа [6], число минимальных разрезов [3], однородность [4]. Таким образом, появляется возможность синтезировать графы с заданной структурой, в которых при ненадежных элементах (ребрах, вершинах) вероятность связности максимальна. Этот факт имеет большое значение для построения структурно надежных информационных сетей. Однако при исследовании надежности информационных сетей возникает необходимость в рассмотрении и других вероятностных характеристик, обычно называемых показателями структурной надежности. С последними связаны различные структурные характеристики графов.

В данной работе сделаны некоторые обобщения работ [3,4] и найдены некоторые свойства оптимальных графов для различных показателей структурной надежности двух классов случайных (p,q)-графов.

I. Уточнение модели

I.I. Рассматриваются неориентированные мультиграфы с равнонадежными ребрами, т.е. любое ребро графа G может быть удалено из G с вероятностью ε. Если $G=(X,U)$ - граф с p вершинами, $X(G)=\{x_1,x_2,\dots,x_p\}$, и q ребрами, $U(G)=\{u_1,u_2,\dots,u_q\}$, то через $G\backslash U'$ обозначим суграф графа G, $G\backslash U'=(X,U(G)\backslash U')$.

Пусть $G=(X,U)$ - (p,q)-граф и $0\le\varepsilon\le1$. Назовем случайным графом $\langle G,\varepsilon\rangle$ случайную величину, значениями которой являются суграфы графа G, причем вероятность того, что случайный граф $\langle G,\varepsilon\rangle$ принимает значение $G\setminus U'$, равна $\varepsilon^{|U'|}(1-\varepsilon)^{q-|U'|}$.

I.2. Вероятность связности $P(G)$ случайного графа $\langle G,\varepsilon\rangle$ можно вычислить по формуле:

$$P(G) = \sum_{U'\subset U(G)} \mu(G\setminus U')\,\varepsilon^{|U'|}(1-\varepsilon)^{q-|u'|}, \tag{1}$$

где $\mu(G\setminus U') = 1$, если суграф $G\setminus U'$ связный, и $\mu(G\setminus U')=0$ – в противном случае.

Формулу (I) можно положить в основу определения других показателей структурной надежности.

Пусть задано конечное множество вершин X. Обозначим через $\mathfrak{A}(X)$ множество графов, построенных на множестве вершин X, а через $\mathfrak{A}(X,q)$ – множество q-реберных графов из $\mathfrak{A}(X)$. Далее, пусть задано отображение $\mu:\mathfrak{A}(X)\to Z$ (Z – множество вещественных чисел). Тогда отображение μ порождает показатель структурной надежности $R_\mu(G,\varepsilon)$ случайного графа $\langle G,\varepsilon\rangle$, который определяется следующим равенством:

$$R_\mu(G,\varepsilon) = \sum_{U'\subset U(G)} \mu(G\setminus U')\,\varepsilon^{|U'|}(1-\varepsilon)^{q-|U'|}. \tag{2}$$

Например, чтобы получить показатель структурной надежности математическое ожидание числа пар вершин, соединимых в случайном графе $\langle G,\varepsilon\rangle$, в качестве отображения μ нужно выбрать следующее: если граф $H\in\mathfrak{A}(X)$ и $m_1,\dots,m_n$ – числа вершин в n компонентах связности графа H, то

$$\mu(H) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(m_i-1)}{2}.$$

В дальнейшем будут рассмотрены другие показатели структурной надежности, которые объединены в классы.

I.3. Граф $G^*\in\mathfrak{A}(X,q)$ называется R_μ-оптимальным при асимптотически надежных ребрах, если для любого графа $G\in\mathfrak{A}(X,q)$ при $\varepsilon\to 0$ имеет место $R_\mu(G^*,\varepsilon)\geq R_\mu(G,\varepsilon)$. Множество таких оптимальных графов обозначим через $\mathfrak{A}^0_\mu(X,q)$.

Аналогично граф $G^* \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}(X,q)$ называется R_μ-оптимальным при асимптотически ненадежных ребрах, если для любого $G \in \mathcal{O}\!\mathcal{L}(X,q)$ при $\varepsilon \to 1$ $R_\mu(G^*,\varepsilon) \geqslant R_\mu(G,\varepsilon)$. Множество таких графов обозначается $\mathcal{O}\!\mathcal{L}^1_\mu(X,q)$.

2. Структурные характеристики случайных графов

Рассмотрим структурные характеристики графов, которые тесно связаны с множеством R_μ-оптимальных графов при асимптотически надежных ребрах. Здесь в основном использовалась терминология работы [I].

2.I. Граф $G = (X,U)$ называется (k,λ)-тотально реберно-связным графом, если при удалении любых k $(k<\lambda)$ ребер $\{u_i = (x_i,y_i)\}$ в суграфе $G' = (X, U\setminus\cup\{u_i\})$ любые две вершины из $X\setminus\cup\{x_i,y_i\}$ λ-сплетаемы.

Для (k,λ)-тотальной реберной связности графа G имеет место следующий критерий, позволяющий установить λ-сплетаемость вершин в G' при удалении произвольного множества ребер $(u_1,\ldots,u_k)$.

ТЕОРЕМА I. *λ-реберно-связный граф $G = (X,U)$ является (k,λ)-тотально реберно-связным графом тогда и только тогда, когда для любого множества ребер $\{u_i = (x_i,y_i)\} = U' \subset U$, $|U'| = k$, в суграфе $G' = (X, U\setminus U')$ любая пара вершин из подмножества $G[\cup\{x_i,y_i\}]$, λ-сплетаема в G', где $G[X']$ – множество вершин графа G, смежных с вершинами X' и не принадлежащих X'.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф $G = (X,U)$ (k,λ)-тотально реберно-связный, тогда вершины из $G[\cup\{x_i,y_i\}]$ будут λ-сплетаемы, так как они принадлежат множеству $X\setminus\cup\{x_i,y_i\}$.

Пусть заданы λ-реберно-связный граф $G = (X,U)$ и множество ребер U'. Так как граф G λ-реберно-связный, то вершины y и z λ-сплетаемы в G. Между вершинами y и z в графе G найдем λ независимых по ребрам цепей $\theta_1,\ldots,\theta_\lambda$. Из графа G удалим k ребер $\{u_i = (x_i,y_i)\} = U'$. Вершины y и z, по условию теоремы, не принадлежат множеству $\cup\{x_i,y_i\}$. Если y и z принадлежат множеству $G[\cup\{x_i,y_i\}]$, то они, по условию, λ-сплетаемы.

Пусть некоторое подмножество ребер из U' лежит на цепях $\theta_1,\ldots,\theta_\lambda$ (рис.I). Найдем минимальный разрез такой, чтобы вер-

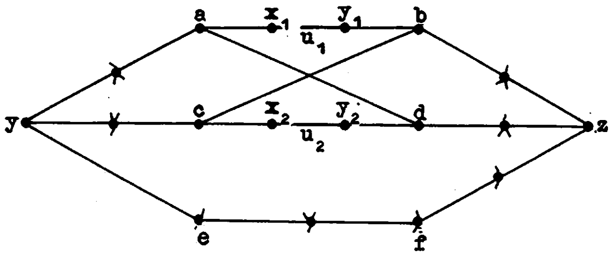

Рис. I

шины y,a,c,e и b,d,f,z оказались в разных компонентах связности. Очевидно, что число ребер в этом разрезе не менее λ. Так как вершины a и b, по условию теоремы, λ-сплетаемы, то, следовательно, вершины y и z λ-сплетаемы. Теорема доказана.

2.2. Граф $G = (X,U)$ называется (k,d)-реберно устойчивым, если при удалении любых k ребер диаметр полученного графа не превосходит d.

Пусть $\{C_i\}$ - множество всевозможных цепей, соединяющих y и z $(i = 1,2,\dots,r)$ длины не более чем d.

Построим матрицу $M_{yz} = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$, если ребро $u_i \in C_j$, и $a_{ij} = 0$ - в противном случае. Обозначим через ∂_k^{yz} максимальное число ненулевых элементов в объединении k строк матрицы M_{yz} (т.е. максимум ищется среди всех C_q^k наборов строк).

ТЕОРЕМА 2. λ-реберно-связный граф $G = (X,U)$ диаметра d является (k,d)-реберно устойчивым тогда и только тогда, когда для любой пары вершин y,z в соответствующей матрице M_{yz} число $\partial_k^{yz} < r$ $(k < \lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 2 из [2].

Достаточным условием (k,d)-реберной устойчивости будет существование $(k+1)$ независимых по ребрам цепей длины не более чем d, соединяющих любую пару вершин графа G.

2.3. Граф $G = (X,U)$ называется (k,δ)-компактно реберно-связным, если при удалении не менее k ребер граф G распадается на δ компонент связности.

Удовлетворительный критерий (k,δ)-компактной реберной связности в настоящее время неизвестен. Однако для заданного δ можно найти верхнюю и нижнюю оценки для числа k.

ТЕОРЕМА 3. Если в графе $G=(X,U)$ число непересекающихся по ребрам остовных деревьев равно r, то $r(\delta-1) \le k \le \frac{2(\delta-1)q}{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы очевидно, и не приводится.

Верхняя оценка достигается для почти однородных графов с минимальной степенью $\left\lceil \frac{2q}{p} \right\rceil \ge 3$, а нижняя для деревьев Хусими, в которых кратность каждого ребра равна r (см. рис.2).

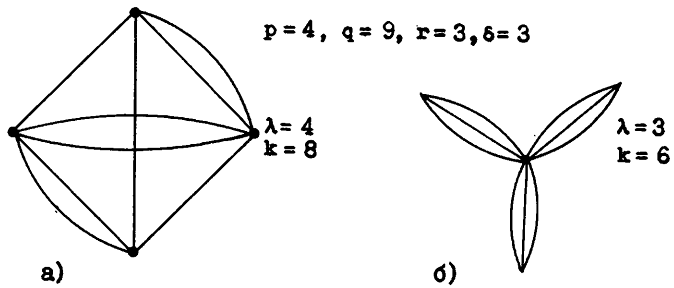

Рис. 2

Если (p,q)-граф G имеет максимально возможное число непересекающихся по ребрам остовных деревьев, то $k \ge \frac{q(\delta-1)}{p-1}$. Действительно, в этом случае $q = r\cdot(p-1)$ и, следовательно, $r = \frac{q}{p-1}$.

3. Показатели структурной надежности

3.I. Показатель $R_\mu \in M_1$, если и только если существует число α такое, что для любого связного графа $H \in \mathfrak{A}(X)$ выполняется $\mu(H) = \alpha$, а для несвязного графа $H \in \mathfrak{A}(X)$ имеет место $\mu(H) < \alpha$.

К этому классу относятся такие показатели, как:

- вероятность связности

$$\mu(H) = \begin{cases} 1, & \text{если } H \text{ - связный}, \\ 0, & \text{если } H \text{ - несвязный}; \end{cases} \qquad (3)$$

- математическое ожидание числа пар соединимых вершин

$\mu(H) =$ [число пар соединимых в H вершин];

- математическое ожидание числа компонент связности

$$\mu(H) = -[\text{ число компонент связности } H], \tag{5}$$

так как оптимальному графу соответствует наибольшее значение R_μ, то число компонент связности графа H входит в формулу с обратным знаком;

- математическое ожидание числа вершин в наименьшей компоненте связности

$$\mu(H) = \frac{t(H)}{p}, \tag{6}$$

где $t(H)$ - число вершин в наименьшей компоненте связности;

- математическое ожидание значения функции неоднородности спектра δ наибольших компонент связности

$$\mu(H) = 1 - \frac{2\delta}{(\delta-1)(\sum_{i=1}^{\delta} k_i)^2} \sum_{j=1}^{\delta-1} \sum_{i=j+1}^{\delta} k_i \cdot k_j, \tag{7}$$

где k_i - число вершин в i-й компоненте связности; $\mu(H) = 1$, если граф H связен, и $\mu(H) = 0$, если H содержит δ компонент связности, в каждой из которых число вершин в точности равно $\frac{p}{\delta}$.

Рассмотренный класс показателей структурной надежности включает в себя основное множество показателей, наиболее употребляемых при исследовании живучести информационных сетей [2,5].

3.2. Показатель $R_\mu \in M_2(d)$, если и только если существует число α такое, что для любого графа $H \in \mathcal{O}(X)$, имеющего диаметр $d(H)$ выполняется

$$\mu(H) = \alpha, \quad \text{если} \quad d(H) \le d;$$

$$\mu(H) < \alpha, \quad \text{если} \quad d(H) > d.$$

К этому классу относятся следующие показатели структурной надежности:

- вероятность того, что диаметр случайного графа не превосходит d. В этом случае

$$\mu(H) = \begin{cases} 1, & \text{если } d(H) \le d, \\ 0, & \text{если } d(H) > d; \end{cases} \tag{8}$$

- математическое ожидание числа пар вершин, соединимых цепью длины, не большей чем d,

$\mu(H)$ = [числу пар вершин $x,y \in H$, для которых $\rho(x,y) \le d$]. (9)

В этом классе число показателей удваивается за счет различного содержания, вкладываемого в понятие диаметр (т.е. диаметр графа H - это либо число ребер в диаметральной цепи, либо длина этой цепи во взвешенном графе).

3.3. Показатель $R_\mu \in M_3(\delta)$, если и только если существует число α такое, что если граф $H \in \mathcal{O}\!\ell(X)$ имеет не более δ компонент связности (т.е. $\varkappa(H) \le \delta$), то $\mu(H) = \alpha$, в противном случае $\mu(H) < \alpha$.

К этому классу относится следующий важный показатель структурной надежности:

- вероятность того, что случайный граф имеет не более чем δ компонент связности. В этом случае

$$\mu(H) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varkappa(H) \le \delta ; \\ 0, \text{ если } \varkappa(H) > \delta . \end{cases} \qquad (10)$$

При $\delta = 1$ этот показатель, очевидно, принадлежит классу M_1.

Другие естественные показатели, принадлежащие к этому классу, нам неизвестны.

4. R_μ-оптимальные графы при асимптотически надежных ребрах

4.1. В работах [3,4] изучались свойства R_μ-оптимальных графов при асимптотически надежных ребрах для случая, когда R_μ - вероятность связности. Разработанные там методы легко переносятся на класс показателей структурной надежности M_1.

ТЕОРЕМА 4. Если $R_\mu \in M_1$ и $G \in \mathcal{O}\!\ell^0_\mu(X,q)$, то реберная связность графа G равна $\left\lceil \frac{2q}{p} \right\rceil$.

Пусть для показателей структурной надежности $R_\mu \in M_1$ выполняются условия:

$$\text{если} \quad t(H_1) < t(H_2), \quad \text{то} \quad \mu(H_1) \ge \mu(H_2),$$

и (11)

$$\text{если} \quad t(H_1) = t(H_2), \quad \text{то} \quad \mu(H_1) = \mu(H_2),$$

где $H_1, H_2 \in \mathcal{O}\!\ell(X)$, $\varkappa(H_1) = \varkappa(H_2) = 2$. Тогда справедливы

ТЕОРЕМА 5. Если $G \in \mathfrak{A}^0_\mu(X,q)$, то степень любой вершины графа G равна s или $s+1$, где $s = \left[\frac{2q}{p}\right]$.

ТЕОРЕМА 6. Если $G \in \mathfrak{A}^0_\mu(X,q)$, причем $2q \geq 3p$, то G является $(1,\lambda)$-тотально реберно-связным графом ($\lambda = \left[\frac{2q}{p}\right]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теорем 5,6 также легко получается из результатов работ [3,4].

Заметим, что условие (II) выполняется не для всех показателей структурной надежности из класса M_1, например, для математического ожидания числа вершин в наименьшей компоненте связности случайного графа $\langle G, \varepsilon \rangle$. Для других же рассмотренных показателей из M_1 условие (II) выполняется.

4.2. Рассмотрим свойства R_μ-оптимальных графов для $R_\mu \in M_2(d)$. Обозначим через $K_d(X,q)$ наибольшее k такое, что в $\mathfrak{A}(X,q)$ найдется граф G, являющийся (k,d)-реберно устойчивым.

ТЕОРЕМА 7. Если $R_\mu \in M_2(d)$ и $G \in \mathfrak{A}^0_\mu(X,q)$, то граф G является (k,d)-реберно устойчивым, где $k = k_d(X,q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению,

$$R_\mu(G,\varepsilon) = \sum_{U' \subset U(G)} \mu(G \setminus U')\varepsilon^{|U'|}(1-\varepsilon)^{q-|U'|} = \sum_{i=0}^{q} A_i \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{q-i}, \quad (12)$$

где

$$A_i = \sum_{\substack{U' \subset U(G) \\ |U'|=i}} \mu(G \setminus U').$$

Пусть $k_d(G)$ - наибольшее число ребер такое, что граф G является $(k_d(G), d)$-реберно устойчивым. Тогда из определения класса $M_2(d)$ следует, что для любого i, $0 \leq i \leq k_d(G)$, верно $A_i = \alpha C^i_q$. В том случае, когда $i > k_d(G)$, имеет место $A_i < \alpha C^i_q$. Значит, R_μ-оптимальный граф G должен быть таков, чтобы $k_d(G)$ принимало максимальное значение, т.е. $k_d(G) = k_d(X,q)$. Теорема доказана.

4.3. Сформулируем теорему о R_μ-оптимальных графах, если $R_\mu \in M_3(\delta)$. Обозначим через $k_\delta(X,q)$ наибольшее k такое, что в мно -

жестве $\mathfrak{A}(X,q)$ найдется (k,δ)-компактно реберно-связный граф G.

ТЕОРЕМА 8. Если $R_\mu \in M_3(\delta)$ и $G \in \mathfrak{A}^0_\mu(X,q)$, то граф G является (k,δ)-компактно реберно-связным, где $k = k_\delta(X,q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы аналогично доказательству теоремы 7.

5. R_μ-оптимальные графы при асимптотически ненадежных ребрах

5.1. В этом разделе на показатели структурной надежности R_μ налагаются следующие естественные ограничения: если графы H_1 и H_2 изоморфны, то $\mu(H_1) = \mu(H_2)$.

Будем считать, что вершины множества X пронумерованы числами $1,2,\dots,p$. Обозначим через λ_{ij} число ребер, инцидентных вершинам x_i и x_j, через s_i степень вершины x_i; тогда

$$S^2 = \sum_{i=1}^{p} s_i^2; \quad \Lambda^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij}^2 .$$

Кроме того, определим графы $L_1,\dots,L_6$, как показано на рис.3.

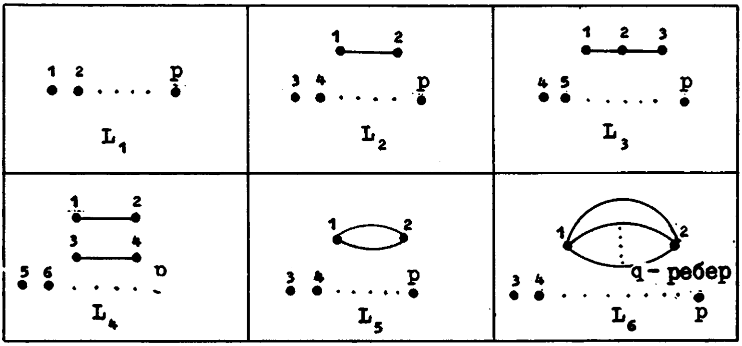

Рис. 3

Для вычисления R_μ можно воспользоваться выражением (I2).

5.2. Найдем A_q и A_{q-1}. Легко видеть, что $A_q = \mu(L_1)$, $A_{q-1} = q \cdot \mu(L_2)$, т.е. для данного показателя R_μ значения A_q и A_{q-1} будут одни и те же при любом $G \in \mathfrak{A}(X,q)$. Далее, покажем, что

A_{q-2} зависит от графа $G\in\mathfrak{A}(X,q)$. Так как необходимо найти граф G, максимизирующий R_μ при $\varepsilon\to 1$, то в силу того что A_q и A_{q-1} не зависят от выбора графа G, для максимизации R_μ при $\varepsilon\to 1$ необходимо найти граф G, максимизирующий A_{q-2}. Поэтому найдем удобное выражение для A_{q-2}.

5.3. При удалении из графа G $(q-2)$-х ребер могут получиться суграфы, изоморфные L_3, L_4, L_5 (см.рис.3). Обозначим через t_3, t_4, t_5 число множеств $U'\subset U(G)$ таких, что $G\setminus U'$ изоморфен L_3, L_4, L_5 соответственно.

Очевидно, что $t_3+t_4+t_5=C_q^2$. Найдем t_3 и t_5, а t_4 определим из равенства $t_4=C_q^2-t_3-t_5$. Легко видеть, что

$$t_3=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i,j}\lambda_{ij}\lambda_{ik};\quad t_5=\frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(\lambda_{ij}-1).$$

Преобразуем эти выражения:

$$t_3=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i,j}\lambda_{ij}\lambda_{ik}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\sum_{k\neq i,j}\lambda_{ik}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(s_i-\lambda_{ij})=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_i s_i\cdot\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}-\Lambda^2\right)=\frac{1}{2}(s^2-\Lambda^2);$$

$$t_5=\frac{1}{4}\sum_i\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}(\lambda_{ij}-1)=\frac{1}{4}(\Lambda^2-2q).$$

Значит, $t_4=\frac{1}{4}(2q^2-2S^2+\Lambda^2)$.

Таким образом, $A_{q-2}=t_3\mu(L_3)+t_4\mu(L_4)+t_5\mu(L_5)=\frac{1}{2}(S^2-\Lambda^2)\mu(L_3)+$ $+\frac{1}{4}(2q^2-2S^2+\Lambda^2)\mu(L_4)+\frac{1}{4}(\Lambda^2-2q)\mu(L_5)=\omega_s\cdot S^2+\omega_\lambda\Lambda^2+\omega_0$, где $\omega_s=$ $=\frac{1}{2}(\mu(L_3)-\mu(L_4))$; $\omega_\lambda=\frac{1}{4}(-2\mu(L_3)+\mu(L_4)+\mu(L_5))$; $\omega_0=\frac{q}{2}(q\mu(L_4)-\mu(L_5))$.

5.4. Приступим теперь к формулировке и доказательству теоремы, в которой описываются свойства R_μ-оптимальных графов при асимптотически ненадежных ребрах. Предварительно введем несколько обозначений:

$\Lambda(X,q)$ – множество графов из $\mathfrak{A}(X,q)$, у которых $\forall i\neq j$ $\lambda_{ij}=$ $=\lceil 2q/p(p-1)\rceil+\beta$, где $\beta\in\{0,1\}$;

$S(X,q)$ – множество графов из $\mathfrak{A}(X,q)$, у которых $\forall i$ $s_i=$ $=\lceil 2q/p\rceil+\beta$, где $\beta\in\{0,1\}$;

$W(X,q)$ – множество графов из $\mathfrak{A}(X,q)$, у которых любая вершина максимальной степени смежна со всеми вершинами ненулевой степени.

Иначе говоря, множество графов $\Lambda(X,q)$ образовано почти однородными по кратностям ребер графами из $\mathcal{U}(X,q)$, множество $S(X,q)$ образовано почти однородными по степеням вершин графами из $\mathcal{U}(X,q)$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть R_μ – некоторый показатель надежности и $G\in\mathcal{U}^1_\mu(X,q)$. Тогда

а) если $\omega_\lambda<0$, $\omega_s=0$, то $G\in\Lambda(X,q)$;

б) если $\omega_\lambda=0$, $\omega_s<0$, то $G\in S(X,q)$;

в) если $\omega_\lambda<0$, $\omega_s<0$, то $G\in\Lambda(X,q)\cap S(X,q)$;

г) если $\omega_\lambda\geq 0$, $\omega_s>0$ или $\omega_\lambda>0$, $\omega_s\geq 0$, то граф G изоморфен графу L_6 (см. рис.3);

д) если $\omega_\lambda\leq 0$, $\omega_s>0$, то $G\in W(X,q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА I. Если $\Omega_1=\Omega_1(N,n)$ – множество всех целочисленных n-мерных векторов $z=(z_1,\ldots,z_n)$ таких, что $z_1+\ldots+z_n=N$, то $\min\limits_{z\in\Omega_1}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$ достигается на таком векторе $\bar{z}=(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)$, что $\forall i\in\overline{1,n}$ $\bar{z}_i=\lfloor N/n\rfloor+\beta$, где $\beta\in\{0,1\}$.

ЛЕММА 2. Если $\Omega_2=\Omega_2(N,n)$ – множество всех n-мерных векторов $z=(z_1,\ldots,z_n)$ с неотрицательными целочисленными элементами, таких, что $z_1+\ldots+z_n=N$, то $\max\limits_{z\in\Omega_2}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$ достигается на таком векторе $\bar{z}=(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)$, что $\exists i_0\in\overline{1,n}$: $\bar{z}_{i_0}=N$, $\forall i\in\overline{1,n}\setminus\{i_0\}$ $\bar{z}_i=0$.

ЛЕММА 3. Если $\Omega_3=\Omega_3(2N,n)$ – множество всех целочисленных n-мерных векторов $z=(z_1,\ldots,z_n)$ таких, что $z_1+\ldots+z_n=2N$ и $\forall i\in\overline{1,n}$ $0\leq z_i\leq N$, то $\max\limits_{z\in\Omega_3}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$ достигается на таком векторе $\bar{z}=(\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_n)$, что $\exists i_1\, i_2\in\overline{1\,n}$: $\bar{z}_{i_1}=\bar{z}_{i_2}=N$, $\forall i\in\overline{1,n}\setminus\{i_1,i_2\}$ $\bar{z}_i=0$.

Доказательства этих лемм достаточно просты, и поэтому мы приводить их не будем (в [4,с. 21] доказан более общий вариант леммы I).

Утверждения "а"-"г" теоремы (9) непосредственно следуют из лемм I,2,3.

Перейдем теперь к доказательству утверждения "д".

Предположим противное, т.е. существует вершина y максимальной степени, несмежная с некоторой вершиной z ненулевой степени (значит, вершина z смежна с некоторой вершиной t). Заменим в графе G все ребра вида (z,t) на ребра вида (z,y). Получим граф G'. Ясно, что $A^2(G') = A^2(G)$; а $S^2(G') = S^2(G) - s_y^2 - s_t^2 + (s_y+\lambda_{zt})^2 + (s_t - \lambda_{zt})^2 = S^2(G) + 2\lambda_{zt}^2 + 2\lambda_{zt}(s_y - s_t) > S^2(G)$. Таким образом, $A_{q-2}(G') > A_{q-2}(G)$, что противоречит R_μ-оптимальности графа G. Теорема доказана.

5.5. Проиллюстрируем теорему 9, применяя ее к показателям надежности, описанным в §3.

Если R_μ – математическое ожидание числа пар соединимых вершин, то $\mu(L_3) = 3$, $\mu(L_4) = 2$, $\mu(L_5) = 1$ и, значит, $\omega_s = \frac{1}{2}$, $\omega_\lambda = -\frac{3}{4}$. По теореме 9, R_μ-оптимальный граф в этом случае обладает свойством: любая вершина максимальной степени смежна со всеми вершинами ненулевой степени. Если сравнить этот результат с выводами теорем 4–6, то получим, что для математического ожидания числа пар соединимых вершин R_μ-оптимальные графы при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to 1$ имеют различную структуру.

Если R_μ – математическое ожидание числа пар вершин, соединимых цепью длины, не большей чем d $(d \geq 2)$, то, аналогично предыдущему случаю, $\omega_s = \frac{1}{2}$, $\omega_\lambda = -\frac{3}{4}$; R_μ-оптимальный граф обладает свойством – любая вершина максимальной степени смежна со всеми вершинами ненулевой степени.

Наконец, если R_μ – вероятность того, что случайный граф имеет не более чем δ $(\delta \leq p-2)$ компонент связности, теорема 9 неприменима, так как $\omega_\lambda = \omega_s = 0$.

6. О задачах, связанных со структурными характеристиками случайных графов

Проблема синтеза оптимальных структур информационных сетей с ненадежными линиями связи является важной прикладной задачей теории графов. В связи с этим результаты исследования структурных характеристик и их взаимосвязей с показателями структурной надежности позволят решать задачи синтеза оптимальных структур (по крайней мере, для асимптотически надежных или ненадежных ребер) без привлечения теории вероятности и имитационного моделирования сетей связи.

В плане этих исследований необходимо решить следующие задачи:

- разработать эффективные алгоритмы вычисления структурных характеристик и показателей структурной надежности, описанных в п. 2.3;

- разработать алгоритмы синтеза графов как с заданными структурными характеристиками, так и с экстремальными значениями этих характеристик;

- найти точные верхние и нижние оценки для предложенных характеристик;

- исследовать взаимосвязь структурных характеристик R_μ-оптимальных графов;

- исследовать R_μ-оптимальные графы для произвольных значений ε.

Литература

1. ЗЫКОВ А.А. Теория конечных графов. - Новосибирск: Наука, 1969. - 244 с.

2. ПОПКОВ В.К. Некоторые структурные характеристики сетей связи. -В кн.: Системный анализ и исследование операций, 1979, с. 105-118. - В надзаг.: ВЦ СО АН СССР.

3. НЕЧЕПУРЕНКО М.И. Случайные мультиграфы с равнонадежными ребрами. -Там же, с.84-93. - В надзаг.: ВЦ СО АН СССР.

4. МАЙНАГАШЕВ С.М., НЕЧЕПУРЕНКО М.И. Об однородности оптимально связных мультиграфов. -В кн.: Системное моделирование, 1979, с. 19-24. - В надзаг.: ВЦ СО АН СССР.

5. ЧЕНЦОВ В.М. Системы распределения информации. Синтез структуры и управления. -М.: Связь, 1980. - 142 с.

6. ЛОМОНОСОВ М.В., ПОЛЕССКИЙ В.П. О максимуме вероятности связности. -Проблемы передачи информации, 1972, т.8, вып.4, с. 68-73.

Поступила в ред.-изд.отд.
26 мая 1981 года