

УДК 519.248:621.37

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
БОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО ФРАГМЕНТАМ

Е.И.Беляев

1. Известно [4,5], что в детерминированном анализе больших систем в последние годы успешно развивается методика ускоренного моделирования путем разбиения на фрагменты. В общем виде она реализуется в два этапа – анализ подсистем и анализ связей; при этом на первом этапе связи моделируются условными величинами. При наличии обратных связей согласование этапов обеспечивается многократным повторением.

Представляется актуальной разработка аналогичного подхода к этапу статистического анализа. Но для систем общего вида эта задача сложна, и методов ее решения пока нет. Здесь возможен следующий подход: если некоторая реализация модели системы в целом приводит к отказу, но содержит годные реализации моделей фрагментов, то последние можно использовать для повышения качества моделирования.

В данной работе на этой основе предлагается метод ускоренного статистического моделирования. Рассмотрение ведется для частного случая – системы из двух фрагментов без обратных связей.

2. Пусть имеется система из двух ориентированных фрагментов (без обратной связи) (рис.1). Фрагмент i считается годным, если его выходной сигнал принадлежит некоторой области работоспособности S_i . Вероятность отказа фрагмента отлична от нуля по крайней мере в некоторой области рабочих значений его входного сигнала.

Рассмотрим следующий алгоритм статистического моделирования. Совершается N испытаний первого фрагмента. При этом в области S_1 оказывается некоторое число m реализаций $x_1, x_2, \dots, x_m$ его входного сигнала x ; они образуют в совокупности случайный вектор $\bar{x}$. Из них равновероятно без возвращения выбирается N_1 реализаций.

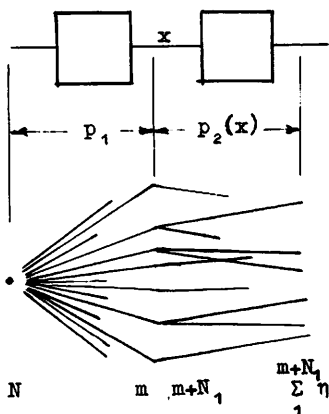


Рис. I

Первичные m и вторичные N_1 реализации величины x служат исходными для испытаний второго фрагмента. Допустим, что 1-е испытание второго фрагмента происходит при j -й реализации x_j входного сигнала x . Введем случайную величину η_1 , равную 1 при положительном исходе этого испытания (вероятность его равна $p_2(x_j)$) и равную 0 в случае отказа. Величины η_1 ($i=1, \dots, m+N_1$) образуют случайный вектор $\vec{\eta}$.

В качестве оценки вероятности правильной работы системы выберем величину

$$\zeta = \frac{m \sum_{i=1}^{m+N_1} \eta_i}{N(m+N_1)}. \quad (1)$$

Целью данного рассмотрения является изучение возможности выбора значений N_1 , дающих выигрыш в эффективности по сравнению с прямым моделированием (в котором, очевидно, $N_1=0$). Такая схема моделирования является обобщением метода расщепления [2,3] для условий $N_1 < m$, наиболее реального на практике, как будет показано далее.

3. Оценим трудоемкость предлагаемого алгоритма. Известно [3], что ее можно определить выражением

$$S = \frac{TD}{Q^2}, \quad (2)$$

где T - время моделирования, Q - искомая вероятность, D - дисперсия ее оценки.

Входной сигнал системы y примем постоянным. Введем ряд обозначений: $k(x/y) = k(x)$ - распределение выходного сигнала первого фрагмента; $p_1 = \int_{x \in S_1} k(x) dx$ - вероятность правильной работы первого фрагмента; $\tilde{k}(x) = k(x)/p_1$ при $x \in S_1$ и $\tilde{k}(x)=0$ при $x \in S_1^c$; t_1, t_2 - времена моделирования первого и второго фрагментов.

Пусть для произвольной функции $f(\xi, \theta)$ условное среднее значение по переменной ξ равно $M_{\xi} f$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} D_{\xi} f(\xi, \theta) &= M_{\xi} (f(\xi, \theta) - M_{\xi} f)^2 = M_{\xi} f^2 - M_{\xi}^2 f; \\ M_{\underline{x}} f &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta) k(x) dx; \quad \tilde{M}_{\underline{x}} f = \int_{S_1} f(x, \theta) \tilde{k}(x) dx; \\ \tilde{M}_{\bar{x}} f &= \int_{\bar{x} \in S_j} \dots \int f(\bar{x}, \theta) \Pi \tilde{k}(x_j) dx_j; \quad \tilde{D} f = \tilde{M} f^2 - M_{\bar{x}}^2 f. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Обозначим через ν номер варианта выбора N_1 из m реализаций $\underline{x}$ (всего таких вариантов $C_m^{N_1}$, вероятности их равны).

При этом величина $\zeta(I)$ является функцией случайных переменных $m, \bar{x}, \nu, \bar{\eta}$. Ее среднее значение равно $M\zeta = M_{\bar{x}} M_{\nu} M_{\bar{\eta}} \zeta$.

Введем условные средние, которые понадобятся далее при выводе соотношений для дисперсии.

Согласно введенным определениям, $M\eta_1 = p_2(x_j)$, и, следовательно,

$$M_{\bar{\eta}} \zeta = \frac{m}{N(m+N_1)} \sum_1^m \beta_j p_2(x_j), \quad (4)$$

где $\beta_j = 2$ для N_1 реализаций сигнала $\underline{x}$, расположенных соответственно конкретному варианту ν ; для остальных $m - N_1$ реализаций $\beta_j = 1$. Перебирая все варианты, получаем

$$M_{\nu} M_{\bar{\eta}} \zeta = \frac{1}{N} \sum_1^m p_2(x_j). \quad (5)$$

Усредняя по $x_j \in S_j$ для $j=1, \dots, m$, получим

$$M_{\bar{x}} M_{\nu} M_{\bar{\eta}} \zeta = \frac{1}{N} \sum_1^m \tilde{M}_{x_j} p_2(x_j) = \frac{m}{N} \tilde{M}_{\underline{x}} p_2. \quad (6)$$

В более общем случае N выборочных значений величины y различны, следовательно, различны и слагаемые в последней сумме (6), и вероятности p_1 .

В рассматриваемом же случае эти величины одинаковы, и случайная величина m подчиняется биномиальному распределению, откуда

$$M\zeta = \frac{M_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} M_{\eta} \zeta}{N} = \frac{\tilde{M}_{\bar{x}} p_2}{N} M_{\eta} \zeta = \frac{M_{\bar{x}} p_2}{p_1 N} p_1 N = \int_{x \in S_1} k(x) p_2(x) dx. \quad (7)$$

Убеждаемся, что оценка (I) является несмещенной.

Теперь выведем соотношения для дисперсии.

Можно показать (см. например, [3]), что дисперсия функции нескольких случайных переменных $\zeta(m, \bar{x}, v, \bar{\eta})$ равна:

$$D\zeta(m, \bar{x}, v, \bar{\eta}) = D_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} M_{\eta} \zeta + M_{\bar{x}} D_{\sqrt{\eta}} M_{\eta} \zeta + M_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} D_{\eta} \zeta + M_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} D_{\eta} \zeta. \quad (8)$$

Согласно введенным определениям

$$D\eta_1 = M\eta_1 (\eta_1 - M\eta_1)^2 = p_2(x_j) (1 - p_2(x_j)). \quad (9)$$

Обозначим эту величину через $D(x_j)$. При этом, учитывая (4), имеем

$$D_{\bar{\eta}} \zeta = \left(\frac{m}{N(m+N_1)} \right)^2 \sum_1^m \beta_j D(x_j). \quad (10)$$

Далее, аналогично (6) и (7), получаем

$$\frac{M_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} D_{\eta} \zeta}{N} = \left(\frac{m}{N(m+N_1)} \right)^2 \left(\frac{m+N_1}{m} \right) \sum_1^m \tilde{M} D(x_j) = \frac{m^2 M_{\bar{x}} D(x)}{N^2(m+N_1) p_1}, \quad (11)$$

$$M_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} M_{\eta} D_{\eta} \zeta = \frac{M D(x)}{N} M_{\bar{x}} \left(\frac{m}{p_1 N} - \frac{m}{m+N_1} \right). \quad (12)$$

Второе и третье слагаемые в (8) представим в виде:

$$M_{\bar{x}} (M_{\sqrt{\eta}} D_{\eta} \zeta + D_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} \zeta) = M_{\bar{x}} \tilde{M}_{\sqrt{\eta}} (M_{\eta} \zeta - M_{\bar{x}} \tilde{M}_{\sqrt{\eta}} \zeta)^2. \quad (13)$$

Из выражений (4) и (6) получаем:

$$(M_{\eta} \zeta - M_{\bar{x}} M_{\sqrt{\eta}} \zeta)^2 = \left(\frac{m}{N(m+N_1)} \right)^2 [\sum \beta_j \Delta(x_j)]^2, \quad (14)$$

где $\Delta(x_j) = p_2(x_j) - M_{\bar{x}} p_2(x_j)$, а β_j имеет прежний смысл (4).

Сумму в (14) возведем в квадрат и переберем варианты v . При этом для каждого j относительное количество вариантов, в которых

коэффициент $\beta_j^2 = 4$, равно N_1/m , а в остальных $(1-N_1/m)$ вариантах $\beta_j^2 = 1$. Следовательно,

$$M_{\sqrt{}}(M_{\eta} \zeta - \tilde{M}_{\sqrt{}} M_{\eta} \zeta)^2 = \left(\frac{m}{N(m+N_1)} \right)^2 \left(4 \frac{N_1}{m} + 1 - \frac{N_1}{m} \right) \sum_1^m \Delta^2(x_j) + \Pi_2, \quad (15)$$

где Π_2 - член, содержащий удвоенные произведения $\Delta x_j \Delta x_x$ ($j \neq x$), которые уничтожатся далее при взятии $\tilde{M}_{\sqrt{}}$, так как случайные величины x_x и x_j независимы.

При этом

$$M_{\sqrt{}} M_{\eta} \zeta - M_{\sqrt{}} M_{\eta} \zeta^2 = \left(\frac{m}{N(m+N_1)} \right)^2 \left(\frac{m+3N_1}{m} \right) m \tilde{D}_{\sqrt{}} p_2(x), \quad (16)$$

где $\tilde{D}_{\sqrt{}} p_2(x) = \tilde{M}_{\sqrt{}} \Delta_x^2$, согласно (3).

Учитывая соображения при выводе (7), запишем:

$$\begin{aligned} M_{\sqrt{}} D_{\sqrt{}} M_{\eta} \zeta &= D_{\sqrt{}} p_2(x) M_{\sqrt{}} \frac{m^2(m+3N_1)}{N^2(m+N_1)^2} = \\ &= \frac{p_1 \tilde{D}_{\sqrt{}} p_2(x)}{N} \left(1 + M_{\sqrt{}} \frac{mN_1(m-N_1)}{p_1 N(m+N_1)^2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

а первое слагаемое в (8), согласно (6), в виде:

$$\begin{aligned} D_{\sqrt{}} M_{\sqrt{}} M_{\eta} \zeta &= \tilde{M}_{\sqrt{}}^2 p_2 D_{\sqrt{}} \left(\frac{m}{N} \right) = p_1^2 \tilde{M}_{\sqrt{}}^2 p_2(x) D_{\sqrt{}} \left(\frac{m}{p_1 N} \right) = \\ &= M_{\sqrt{}}^2 p_2(x) \frac{p_1(1-p_1)N}{p_1 N} = \frac{M_{\sqrt{}}^2 p_2(x)}{N} \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Трудоемкость алгоритма в данной схеме испытаний равна:

$$TD \zeta = (N t_1 + M_{\sqrt{}}(m+N_1) t_2) D \zeta, \quad (19)$$

где $D \zeta$ образуется подстановкой (12), (17) и (18) в (8).

Задача заключается в нахождении функции $N_1(m)$, обеспечивающей минимум выражения (19).

Но для функций $N_1(m)$ общего вида вычисление сумм $M_{\sqrt{}}$ в (12), (17) и (19) сложно. Покажем, что существование минимума выражения (19) реально возможно при $N_1(m) = \alpha m$ ($\alpha = \text{const}$).

При этом трудоемкость алгоритма равна

$$TD\zeta = (t_1 + p_1(1+\alpha)t_2) \left(M_X^2 p_2(x) \left(\frac{1}{p_1} - 1 \right) + \right. \\ \left. + p_1 \tilde{D}_X p_2(x) \left(1 + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2} \right) + \frac{M_X D(x)}{1+\alpha} \right). \quad (20)$$

Подставляя $D_X p_2(x)$ и $M_X D(x)$ в (20) с учетом (3), (9), (16), получаем:

$$S_p = TD\zeta = (t_1 + p_1(1+\alpha)t_2) \left(D_1 + \frac{D_2}{1+\alpha} + \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1+\alpha)^2} D_3 \right), \quad (21)$$

где $D_1 = M_X p_2^2(x) - M_X^2 p_2(x)$ - дисперсия среднего значения вероятности правильной работы второго фрагмента $p_2(x)$; $D_2 = M_X[p_2(x) \times (1-p_2(x))]$ - средняя дисперсия величины η (см. (I)); $D_3 = M_X p_2^2(x) - \frac{M_X^2 p_2(x)}{p_1}$ - дисперсия среднего значения вероятности $p_2(x)$ при условии правильной работы первого фрагмента, умноженная на p_1 . Отметим, что величина D_3 характеризует связь между фрагментами и при их независимости $D_3 = 0$.

Обозначим $\frac{1}{1+\alpha} = w$ ("вес" вторичного испытания [2]). Изучим возможность снижения трудоемкости алгоритма $S(w)$ путем выбора величины w . Прежде всего отметим случай, когда последнее слагаемое в выражении (21) равно нулю. Это возможно либо при независимых фрагментах ($D_3 = 0$), либо при расщеплении каждой из m первичных реализаций на одинаковое число вторичных [2]. При этом минимальное значение трудоемкости достигается при условии [3]:

$$w = w_0 = \sqrt{\frac{p_1 D_1}{D_2}}. \quad (22)$$

Напомним, что в прямом моделировании трудоемкость определяется выражением (21) при $\alpha=0$ (или $w=1$).

Для простоты допустим $t_1 = t_2 = 1$. Предполагаемый выигрыш определяется на основе (21)

$$\Delta S = S|_{w=1} - S(w) =$$

$$= \left(\frac{1}{w}-1\right) D_2 (-2aw^2 + (1-(2p_1-1)a)w - w_0^2 + ap_1) = \left(\frac{1}{w}-1\right) \phi(w), \quad (23)$$

где $a = \frac{D_3}{D_2}$.

Очевидно, выигрыш гарантируется, если производная $\partial S / \partial w$ при $w=1$ отрицательна, откуда следует достаточное условие

$$1 - w_0^2 > a(1+p_1), \quad (24)$$

или, в другой форме, $D_2 - p_1 D_1 > D_3(1+p_1)$, что при относительно слабой зависимости второго фрагмента от первого вполне реально.

Обозначим через $M_{x p_2}(x) = Q$ вероятность работы обоих фрагментов; через $Q/p_1 = p_2$ - среднюю вероятность работы второго фрагмента; $M_{x p_2^2}(x) = \mu$. При этом условие (24) принимает вид

$$\frac{p_1 p_2 (1+p_1^2 p_2)}{1+p_1} - \mu > \mu - p_1 p_2^2. \quad (25)$$

Следовательно, существование выигрыша в принципе возможно в области

$$p_2(1+p_1(1-p_1)) < 1, \quad (26)$$

практически достаточно широкой, как будет показано далее в п.4.

Количественную оценку выигрыша можно провести, применяя приближенное выражение (в окрестности точки $w=1$): $w^2 \approx (1+w_0)w + w_0$. При этом максимум величины (23) равен

$$\Delta S_m \approx (\sqrt{1-(2p+2w_0+1)a} - \sqrt{w_0^2-(p+2w)a})^2$$

и достигается при

$$w^2 = w_k^2 = \frac{w_0^2 - (p+2w_0)a}{1 - (2p+2w_0+1)a}.$$

В принципе можно получить и достаточное условие выигрыша, вообще говоря, менее жесткое, чем (24). Но можно показать, что на практике достаточное условие (24) является более реальным.

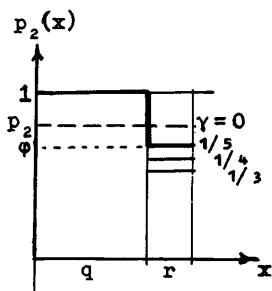


Рис.2

4. Проиллюстрируем изложенные закономерности на простом примере. Для электронных цифровых схем характерно наличие области значений входных сигналов x , в которой работоспособность схемы достоверна ($p_2(x) = 1$), и области, в которой возможен отказ ($p_2(x) < 1$). Это можно приблизительно представить характеристикой (рис.2): $p_2(x) = 1$ с вероятностью q , $p_2(x) = \varphi$ с вероятностью r . Такая характеристика представляется более жесткой относительно изучаемой тенденции, чем реальные случаи на практике.

При этом $p_1 = q + r$ (считаем $p_1 < 1$); $M_x p_2(x) = q = r\varphi + q$ — полная вероятность работы обоих фрагментов; $\mu = M_x p_2^2(x) = r\varphi^2 + q$. Отсюда легко получаются характеристики D_1, D_2, D_3, P_2 . Очевидно, что $p_2 > \varphi$ и можно обозначить $p_2 = \varphi(1 + \gamma)$, где $\gamma > 0$. Из выражения (22) следует:

$$w_0^2 = q \left(\frac{1-q}{\varphi(p_1 - q)} - 1 \right) p_1 = p_1 p_2 \left(\frac{1 - p_1 + \gamma \left(\frac{1}{p_2} - p_1 \right)}{1 - p_2} \right). \quad (27)$$

На основе (25) получаем достаточное условие выигрыша при данной характеристике рис.2:

$$p_2 > \varphi > p_2 \left(1 - \frac{1 - p_2 - p_1 p_2 (1 - p_1)}{2(1 - p_2)(1 + p_1)} \right), \quad (28)$$

что дает определенную область значений φ при условии (26).

Для независимых фрагментов разбиение системы близко к оптимальному по критерию (21), если фрагменты примерно одинаковы по сложности (все p_i равны) и невелики ($1 - p_i \ll p_i$). Этого следует ожидать и в более общих случаях. Тогда при $p_1 = p_2$ получаем $w_0^2 = p^2 \left(1 + \gamma \left(\frac{1}{p} + 1 \right) \right)$ и видим, что реальные значения коэффициентов расщепления $1 + \alpha$ ненамного превосходят единицу. Вид области выигрыша (28) представлен на рис.3 для $\alpha \in [0, 1]$.

5. Дадим краткую оценку эффективности изложенного метода. Сравнение различных методов по выражению (2) для систем общего вида сложно. Мы рассмотрим частный случай системы из независимых

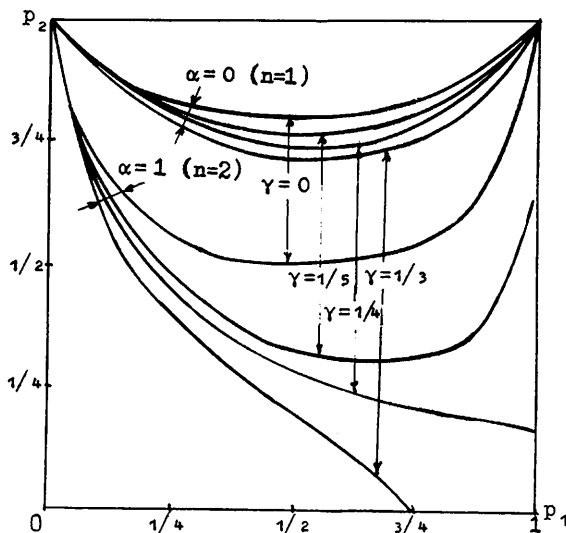


Рис. 3

фрагментов с вероятностями правильной работы p_i и временами моделирования t_i . Число испытаний обозначим N .

При прямом моделировании системы

$$D_n = \frac{Q(1-Q)}{N}, \quad (29)$$

$$T_n = N(t_1 + \sum_{i=1}^k t_i \prod_{j=1}^i p_j). \quad (30)$$

При моделировании методом расщепления (с оптимальными значениями коэффициентов n_{i0}) на основе формул из [2] получаем

$$T_P D_P = Q^2 \left(\sum_{i=1}^k \sqrt{\left(\frac{1}{p_i} - 1 \right)} t_i \right)^2. \quad (31)$$

Допустим, все p_i и t_i одинаковы, при этом из (29)–(31) следует

$$S_n = \frac{(1-p^k)^2}{p^k(1-p)} t; \quad (32)$$

$$S_p = k^2 \frac{1-p}{p} t . \quad (33)$$

Отсюда видно, что при увеличении размеров системы трудоемкость при прямом моделировании растет экспоненциально, а с применением расщепления — квадратично, что при большом числе фрагментов (или при наличии обратных связей) существенно повышает эффективность.

Например, при $k = 10$ и $p = 0,75$ отношение величин (33), (32) равно примерно 0,51, т.е. трудоемкость снижается в 2 раза.

Предлагаемый алгоритм требует отдельной процедуры оптимизации параметров расщепления (величин m_i (1), (4) и далее). Разработка такой процедуры является самостоятельной задачей. Но на основе предварительных рассмотрений следует полагать, что она сведется к вычислению выборочных значений дисперсий на основе проведенных испытаний. Трудоемкость такого расчета существенно не зависит ни от сложности моделируемого объекта, ни от числа испытаний, и для большой системы всегда может быть много меньше, чем затраты времени на ее моделирование.

В заключение отметим, что в рассмотренном вопросе наиболее интересной представляется принципиальная возможность ускорения статистического моделирования с помощью разбиения системы на фрагменты, причем без предварительного выигрыша в детерминированном анализе. При этом приведенные оценки показывают, что для больших систем возможно значительное повышение эффективности расчета.

Л и т е р а т у р а

1. Методы статистического расчета интегральных схем /Смол — ко Г.Г., Батадов Б.В., Казеннов Г.Г., Бедяков Ю.Н. — В кн.: Микроэлектроника. Вып.6. Под ред. А.А.Васенкова. М., 1973, с.11—25.
2. ОГИБИН В.Н. О применении "расщепления" и "рулетки" в расчетах прохождения частиц методом Монте-Карло. — В кн.: Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений. Под ред. Г.И.Марчука. М., 1967, с.72—83.
3. МИХАЙЛОВ Г.А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. — Новосибирск: Наука, 1974. — 141 с.
4. Применение метода многополюсных подсchem в программах анализа электрических характеристик БИС /Гурарий М.М., Ермаков В.В., Зарудный Д.И., Русаков С.Г. — Управляющие системы и машины, 1973, №5, с.55—58

5. Система автоматизированного моделирования и расчета интегральных схем (САМРИС) /Васенков А.А., Казеннов Г.Г., Беляков Ю.Н., Аврашков П.П. -В кн.: Микроэлектроника. Вып.9. Под ред. А.А.Васенкова. М., 1976, с.11-21.

Поступила в ред.-изд.отд.

20 октября 1979 года