СПЛАЙН-ФУНКЦИИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ
(Вычислительные системы)

1981 год Выпуск 86

УДК 519.65

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ СПЛАЙНАМИ

В.Л.Мирошниченко

В последние годы для решения задач, связанных с приближением функций, широко применяются сплайны, обладающие хорошими аппроксимационными свойствами и позволяющие строить вычислительные алгоритмы, эффективно реализуемые на ЭВМ. Мы приведем краткие сведения о наиболее употребительных в вычислительной практике сплайнах. Наряду с известными результатами сообщается ряд новых. Основное внимание уделяется сплайнам одной переменной. Более полные сведения по затронутым вопросам можно найти в [1-3].

Пусть на отрезке $[a,b]$ задано разбиение (сетка) $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и определено семейство функций Φ. Функция $S(x)$ называется сплайном, если на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ она совпадает с некоторой функцией $\varphi_i \in \Phi$. Точки x_i называются узлами сплайна, а функции φ_i - его звеньями. Дополнительно обычно требуют, чтобы в узлах сплайна были выполнены условия стыковки (склейки) соседних звеньев. Чаще всего это условия непрерывности сплайна $S(x)$ и некоторых его производных. Обозначим символом $C^k[a,b]$ множество функций непрерывных на $[a,b]$ вместе со своими производными до k-го порядка включительно ($C^0[a,b] = C[a,b]$). Будем называть сплайн $S(x)$ сплайном класса C^k если $S(x) \in C^k[a,b]$.

С точки зрения практического использования сплайнов множество Φ целесообразно выбирать состоящим из функций, значения которых легко вычисляются на ЭВМ. В первую очередь это многочлены и рациональные функции. Сплайн $S(x)$ называется *полиномиальным сплайном степени* n, когда Φ - множество многочленов степени не выше n. При этом говорят, что $S(x)$ имеет дефект μ, если $S(x) \in C^{n-\mu}[a,b]$.

Пусть в точках $\xi_j \in [a,b]$ заданы значения $f_j = f(\xi_j)$ функции $f(x)$. Сплайн $S(x)$ называется интерполяционным, если $S(\xi_j) = f_j$. Точки ξ_j называются узлами интерполяции. Их количество и расположение определяются условиями стыковки звеньев и видом функций, описывающих звенья. Наиболее простые и удобные конструкции сплайнов получаются, когда узлы интерполяции совпадают с узлами сплайна. Кроме значений интерполируемой функции, в узлах могут задаваться значения ее производных. Обычно условия интерполяции задаются во всех узлах сплайна, но иногда полезно рассматривать сплайны, для которых в отдельных узлах условия интерполяции не заданы (сплайны с дополнительными узлами).

Параметры интерполяционного сплайна вычисляются из системы уравнений, вытекающей из условий интерполяции. Сплайн называется локальным, если для вычисления каждого из его параметров используется только несколько интерполяционных условий.

При использовании интерполяционных сплайнов, естественно, возникает вопрос о погрешности приближения функции и ее производных. Ниже мы приводим оценки этой погрешности для случая, когда $f(x)$ - достаточно гладкая функция. При этом используются нормы $\|\cdot\|_C$ и $\|\cdot\|_\infty$. Если $\varphi(x) \in C[a,b]$, то $\|\varphi\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|$. Если $\varphi(x)$ кусочно-непрерывна на $[a,b]$ и имеет разрывы первого рода в точках $\eta_j \in (a,b)$, то $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_j \max\limits_{x\in[\eta_j,\eta_{j+1}]} |\varphi(x)|$, $j=1,\dots,\ell$, $\eta_0 = a$, $\eta_{\ell+1} = b$. Очевидно, $\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_C$, когда φ непрерывна на $[a,b]$.

Кроме интерполяционных сплайнов, для приближения функций используются локально-аппроксимационные, сглаживающие и другие сплайны. Некоторые из них рассматриваются ниже.

В технических приложениях, наряду с приближением функций, часто приходится иметь дело с задачей построения (генерирования) функций. Например, требуется построить функцию, проходящую через заданные (или близкие к ним) точки и, кроме того, удовлетворяющую некоторым условиям количественного или качественного характера. Количественные условия обычно формулируются в виде требований минимизации некоторых функционалов, а качественные зачастую сводятся к тому, чтобы график построенной функции "хорошо смотрелся". Сплайны как универсальный математический аппарат поистине незаменимы при решении подобных задач.

Сплайны первой степени

Интерполяционный сплайн первой степени, реализующий всем известную линейную интерполяцию - это простейший и "древнейший" из сплайнов. Если в узлах x_i сетки Δ заданы значения $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, N$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ интерполяционный сплайн первой степени $S_1(x)$ записывается в виде

$$S_1(x) = (1-t)f_i + t f_{i+1}, \tag{I}$$

где $t = (x - x_i)/h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$. Если $f(x) \in C^2[a, b]$, то справедливы оценки

$$\| S_1^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_{C[x_i, x_{i+1}]} \leqslant K_r h_i^{2-r} \| f'' \|_{C[x_i, x_{i+1}]}, \quad r = 0, 1, \tag{2}$$

где $K_0 = 1/8$, $K_1 = 1/2$. Заметим, что оценки (2) не могут быть улучшены ни по порядку, ни по константе, даже при большей гладкости $f(x)$.

Основной недостаток сплайнов первой степени заключается в том, что для получения хорошей точности приходится брать большое количество узлов интерполяции. Кроме того, приближение получается негладким. На практике, как правило, приближение функций осуществляется с помощью других сплайнов (например, кубических), и лишь на заключительном этапе работы, когда нужно вывести результаты на графопостроитель или выдать данные для станков с ЧПУ, используются сплайны первой степени. При этом возникает задача приближения с заданной точностью. Она решается путем выбора узлов интерполяции для сплайна $S_1(x)$. Пусть, например, требуется интерполировать $f(x)$ так, чтобы выполнялось условие $|S_1(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$, $x \in [a, b]$. Из оценки (2) видно, что для этого достаточно взять сетку Δ равномерной с шагом h, удовлетворяющим условию $h^2 \| f'' \|_{C[a,b]} = 8\varepsilon$. С точки зрения количества используемых узлов более оптимальной будет интерполяция на неравномерной сетке, шаги которой удовлетворяют условиям $h_i^2 \| f'' \|_{C[x_i, x_{i+1}]} = 8\varepsilon$. Методы отыскания таких сеток изложены в [I].

Существуют способы приближения сплайнами первой степени, более эффективные по сравнению с интерполяцией. В [4] вместо (I) предлагается использовать сплайн

$$\tilde{S}_1(x) = (1-t)[f_i - \tfrac{1}{16} \max\{h_{i-1}^2, h_i^2\} f_i''] + t[f_{i+1} - \tfrac{1}{16} f_{i+1}'' \max\{h_i^2, h_{i+1}^2\}], \tag{3}$$
$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad h_{-1} = h_N = 0.$$

Если $f(x) \in C^3[a,b]$, то

$$\| \tilde{S}_1(x) - f(x) \|_{C[x_i,x_{i+1}]} \le \frac{H_i^2}{16} [\| f'' \|_{C[x_i,x_{i+1}]} + h_i \| f''' \|_{C[x_i,x_{i+1}]}] , \qquad (4)$$

где $H_i = max \{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$. Следовательно, при малых H_i погрешность приближения функции сплайном $\tilde{S}_1(x)$ будет практически в два раза меньше по сравнению с погрешностью для интерполяционного сплайна $S_1(x)$.

Производные в (3) можно заменить трехточечными разностными аппроксимациями:

$$f_i'' \approx \tilde{f}_i'' = \frac{2}{h_{i-1}+h_i} \left\{ \frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right\}, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$

$$f_0'' \approx \tilde{f}_1'' , \qquad f_N'' \approx \tilde{f}_{N-1}'' . \qquad (5)$$

В этом случае в правой части оценки (4) слагаемое, содержащее f''', следует заменить на $\frac{4}{3} H_i \| f''' \|_{C[x_{i-1}, x_{i+1}]}$.

Кубические сплайны

Среди кубических сплайнов наиболее популярны разнообразные сплайны классов C^1 и C^2. Рассмотрим некоторые из них.

Любой интерполяционный кубический сплайн из класса C^1 при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ может быть записан в виде

$$S(x) = (1-t)^2(1+2t)f_i + t^2(3-2t)f_{i+1} + \\ + h_i t (1-t)^2 m_i - h_i t^2 (1-t) m_{i+1} , \qquad (6)$$

где $m_j = S(x_j)$. Конкретный вид сплайна зависит от способа задания (вычисления) параметров m_j.

Полагая $m_j = f_j$, $j = 0, \dots, N$, получаем эрмитов кубический сплайн $S_H(x)$, для которого при $f(x) \in C^4[a,b]$ справедливы оценки

$$\| S_H^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_\infty \le K_r H^{4-r} \| f^{IV} \|_C , \quad r = 0,1,2, \qquad (7)$$

где $H = \max_i h_i$, $K_0 = 1/384$, $K_1 = \sqrt{3}/216$, $K_2 = 1/12$.

Эрмитовы сплайны обеспечивают высокую точность приближения. Однако в практических задачах значения производных f_i' редко бывают известными. Поэтому приходится прибегать к различным способам приближенного задания f_i'. Часто с этой целью используются трехточечные разностные аппроксимации. Положим

$$\tilde{f}_i' = \lambda_i \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{8}$$

$$\tilde{f}_0' = (1+\mu_1)\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \mu_1 \frac{f_2 - f_1}{h_1}, \tag{9}$$

$$\tilde{f}_N' = (1+\lambda_{N-1})\frac{f_N - f_{N-1}}{h_{N-1}} - \lambda_{N-1} \frac{f_{N-1} - f_{N-2}}{h_{N-2}}, \tag{10}$$

где $\mu_i = 1 - \lambda_i$, $\lambda_i = h_i/(h_{i-1} + h_i)$.

Сплайн $\tilde{S}_H(x)$, получающийся при замене в (I) величин m_i на $\tilde{f}_i'$, удобен в приложениях. Однако в этом случае существенно снижается точность приближения по сравнению с эрмитовым сплайном. При $f(x) \in C^4[a,b]$ и $x \in [x_1, x_{N-1}]$ справедливы оценки

$$\|\tilde{S}_H^{(\tau)}(x) - f^{(\tau)}(x)\|_\infty \le K_{0,\tau} H^{3-\tau} \|f'''\|_C + K_{1,\tau} H^{4-\tau} \|f^{IV}\|_C, \tag{11}$$

$$\tau = 0, 1, 2,$$

где $K_{0,0} = 1/24$, $K_{0,1} = 1/6$, $K_{0,2} = 1$, $K_{1,0} = 1/192$, $K_{1,1} = 0$, $K_{1,2} = 0{,}14815$. Для отрезков $[x_0, x_1]$, $[x_{N-1}, x_N]$ порядки в оценках (II) сохраняются, но постоянные несколько увеличиваются.

Порядок приближения в оценках (II) на единицу меньше, чем в (7). Это объясняется сравнительно невысокой точностью аппроксимации значений f_i' по формулам (8)-(I0). Повысить точность можно путем применения четырехточечных разностных аппроксимаций, которые получаются дифференцированием многочлена Лагранжа $L_j(x)$, построенного по узлам x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}. Например, для сплайна $\bar{S}_H(x)$, полученного из (I) при $m_i = L_{i-1}'(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ $m_0 = L_0'(x_0)$, $m_k = L_{N-3}'(x_k)$ $(k = N-1, N)$ имеют место оценки

$$|\bar{S}_H^{(\tau)}(x) - f^{(\tau)}(x)| \le K_\tau H^{4-\tau} \|f^{IV}\|_C, \tag{12}$$

$$\tau = 0, 1, \quad x \in [x_1, x_{N-1}], \quad K_0 = 9/384, \quad K_1 = 1/12.$$

Порядки приближения здесь такие же, как в оценках (7), но постоянные значительно больше.

Кроме указанных локальных кубических сплайнов, возможны разнообразные смешанные конструкции. Например, в некоторых узлах значения производных могут быть заданы, а в других должны вычисляться. Особенно полезно знание величин f'_0 и f'_N, так как их вычисление связано с применением односторонних разностных аппроксимаций, которые имеют невысокую точность.

Во многих практических задачах требуется, чтобы приближение имело две непрерывные производные. Для их построения можно использовать кубические сплайны класса C^2 (дефекта I). Именно они дали толчок развитию всей теории сплайнов. Следуя общепринятой терминологии, мы будем называть их кубическими сплайнами без явного указания класса (дефекта). Кубические сплайны обеспечивают практически такую же точность приближения, что и эрмитовы, но при этом не требуется задавать значения производных в узлах сетки. Хотя кубические сплайны не являются локальными, они обладают достаточно четко выраженными локальными свойствами. В частности, существенное влияние на значение сплайна в точке x [illegible]азывают лишь те интерполяционные условия, которые заданы в узл[illegible] близких к x.

Первая производная кубического сп[illegible]а непрерывна. Поэтому интерполяционный кубический сплайн $S($[illegible]жет быть записать в виде (6). Свободные параметры m_i определ[illegible]ются из условий непрерывности второй производной сплайна во внутренних узлах сетки:

$$S''(x_i+0)-S''(x_i-0)=0\,,\quad i=1,\dots,N-1. \tag{I3}$$

Это приводит к соотношениям

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=c_i\,,\quad i=1,2,\dots,N-1, \tag{I4}$$

где $\lambda_i=h_i/(h_{i-1}+h_i)$, $\mu_i=1-\lambda_i$, $c_i=3\lambda_i\dfrac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}+3\mu_i\dfrac{f_{i+1}-f_i}{h_i}$.

Число неизвестных в (I4) на два больше числа уравнений. Поэтому для замыкания системы необходимы два дополнительных уравнения, которые получают, задавая краевые условия на концах отрезка $[a,b]$. На практике наиболее часто используются следующие типы краевых условий:

I. $S'(x_0)=f'_0$, $S'(x_N)=f'_N$.

П. $S''(x_0)=f''_0$, $S''(x_N)=f''_N$.

Ш. $S^{(\tau)}(x_0) = S^{(\tau)}(x_N)$, $\tau = 1,2$.

IУ. $S'''(x_j+0) - S'''(x_j-0) = 0$, $j = 1, N-1$.

Краевые условия типов I, П используют, когда известны значения первой или второй производной функции $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$. Если известны и те и другие, то предпочтительнее условия типа I. Краевые условия типа Ш называются периодическими. Их применяют, когда $f(x)$ – периодическая с периодом $b-a$ функция. Условия типа IУ рекомендуется использовать, если отсутствует информация о производных функции $f(x)$.

Конкретный вид уравнений, замыкающих систему (I4), зависит от типа краевых условий. Очевидно, для условий типа I это уравнения

$$m_0 = f_0' \,, \quad m_N = f_N' \,. \tag{I5}$$

Система (I4),(I5) трехдиагональная, с диагональным преобладанием и поэтому легко решается методом прогонки. (Относительно построения и решения систем при других краевых условиях см. [I].)

Кубический сплайн $S(x)$ интерполирует в узлах сетки значения функции $f(x)$. Иногда дополнительно требуется, чтобы сплайн в некоторых узлах интерполировал производную $f'(x)$. Пусть, например, требуется удовлетворить в узле x_j условию $S'(x_j) = f_j'$. Для построения такого сплайна достаточно заменить в (I4) уравнение, содержащее неизвестные m_{j-1}, m_j, m_{j+1} , уравнением $m_j = f_j'$. В этом случае сплайн $S(x)$ будет иметь разрыв второй производной в точке x_j.

Наряду с формулой (6) для кубического сплайна часто используется представление через параметры f_i и $M_i = S''(x)$:

$$S(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} - \frac{1}{6}h_i^2 t(1-t)[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}] \,. \tag{I6}$$

Параметры M_i, $i = 0, \ldots, N$, находятся из системы, образованной уравнениями

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1 \,, \tag{I7}$$

где

$$d_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left\{ \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} \right\} \,,$$

и двумя уравнениями, вытекающими из краевых условий [I].

Приведем некоторые оценки для погрешности приближения интерполяционными кубическими сплайнами. Если $f^{IV}(x)$ кусочно-непрерывна на $[a,b]$ и $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям одного из типов I-III, то

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_C \leq K_r H^{4-r} \| f^{IV} \|_\infty \ , \ r=0,1,2 \ , \qquad (18)$$

где $K_0 = 5/384$, $K_1 = 1/24$, $K_2 = 13/72$.

Если $f(x) \in C^4[a,b]$ и $S(x)$ удовлетворяет краевым условиям типа I или III, то

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\| \leq H^{4-r}[K_{0,r}\| f^{IV}\|_C + K_{1,r}\, \omega(f^{IV})] \ , \ r=0,1, \qquad (19)$$

где

$$K_{0,0} = 2/384 \ , \ K_{0,1} = 0.014731 \ , \ K_{1,0} = 1/96 , \ K_{1,1} = 1/24 ,$$

$$\omega(f^{IV}) = \max_i \max_{x', x'' \in [x_i, x_{i+1}]} | f^{IV}(x') - f^{IV}(x'')| \ .$$

Если сетка Δ равномерная, то в оценках (19) при $r = 0,1,2$ постоянные будут: $K_{0,0} = 1/384$, $K_{0,1} = \sqrt{3}/216$, $K_{0,2} = 1/12$, $K_{1,0} = 1/96$, $K_{1,1} = 1/24$, $K_{1,2} = 1/4$. С этими же значениями $K_{0,r}$ ($K_{1,r}$ несколько иные) оценки (19) справедливы для сплайнов с предложенными в [5] краевыми условиями

$$m_0 + 3m_1 = \frac{1}{6h}(-17f_0 + 9f_1 + 9f_2 - f_3) \ ,$$

$$3m_{N-1} + m_N = \frac{1}{6h}(f_{N-3} - 9f_{N-2} - 9f_{N-1} + 17f_N) \ .$$

Каждое из представлений (6), (16) для хранения сплайна, кроме узлов сетки, требует запоминания $2(N+2)$ параметров f_i и m_i или f_i и M_i. Более экономно представление кубического сплайна через B-сплайны (базисные сплайны):

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} \alpha_i B_i(x) \ . \qquad (20)$$

Здесь каждая из функций $B_i(x)$ является кубическим сплайном, который отличен от нуля только на промежутке (x_{i-2}, x_{i+2}). Кроме того, выполнено условие нормировки $\sum_{i=-1}^{N+1} B_i(x) \equiv 1$. Для корректной записи формулы (20) сетка Δ должна быть дополнена узлами x_{-j}, x_{N+j}, $j = 1,2,3$, которые могут быть произвольными. Удобно полагать $x_{-j} = x_0 - jh_0$, $x_{N+j} = x_N + jh_{N-1}$, $j = 1,2,3$.

В виде (20) может быть записан любой кубический сплайн класса C^2. Если $S(x)$ – интерполяционный сплайн, то коэффициенты α_i определяются из условий интерполяции

$$\alpha_{i-1} B_{i-1}(x_i) + \alpha_i B_i(x_i) + \alpha_{i+1} B_{i+1}(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, N, \qquad (21)$$

и краевых условий для сплайна. Следует иметь в виду, что в уравнениях (21), в отличие от системы для параметров m_i и M_i, возможна потеря диагонального преобладания, если сетка Δ неравномерная.

На практике важно уметь переходить от одного представления сплайна к другому. Переход от (6) к (16) и обратно не вызывает затруднений. Столь прост переход от (20) к (6) или (16). Действительно, для этого достаточно воспользоваться вытекающими из (20) формулами

$$S^{(r)}(x_j) = \alpha_{j-1} B_{j-1}^{(r)}(x_j) + \alpha_j B_j^{(r)}(x_j) + \alpha_{j+1} B_{j+1}^{(r)}(x_j), \quad j = 0, \dots, N.$$

Обратный переход от (6) или (16) к (20) можно осуществить с помощью формул

$$\alpha_{-1} = f_0 - \frac{2h_{-1} + h_{-2}}{3} m_0 + \frac{h_{-1}(h_{-1} + h_{-2})}{6} M_0,$$

$$\alpha_i = f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} m_i - \frac{h_{i-1} h_i}{6} M_i, \quad i = 0, \dots, N,$$

$$\alpha_{N+1} = f_N + \frac{2h_N + h_{N+1}}{3} m_N + \frac{h_N(h_N + h_{N+1})}{6} M_N.$$

При интерполировании функции часто требуется сохранить некоторые ее качественные характеристики. Например, если $f(x)$ выпуклая $(f''(x) > 0)$, то естественно потребовать, чтобы сплайн $S(x)$ тоже был выпуклым. Из оценок (18) видно, что так и будет, если $f(x)$ достаточно гладкая и H мало. Однако обычно мы имеем дело с фиксированной сеткой, и поэтому важно знать, будет ли сплайн выпуклым на этой сетке. Пусть данные f_i образуют выпуклую последовательность, т.е.

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \qquad (22)$$

и сплайн $S(x)$ строится с краевыми условиями

$$2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0, \qquad \mu_N M_{N-1} + 2M_N = d_N. \tag{23}$$

Так как $S''(x)$ кусочно-линейна на $[a,b]$, то $S''(x) \geqslant 0$, если все $M_i \geqslant 0$. Это имеет место, когда правые части системы (17), (23) и числа λ_0, μ_N удовлетворяют условиям

$$2d_i - \mu_i d_{i-1} - \lambda_i d_{i+1} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$

$$2d_0 - \lambda_0 d_1 \geqslant 0, \quad 2d_N - \mu_N d_{N-1} \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \lambda_0 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \mu_N \leqslant 4.$$

Если эти условия нарушены, то $S''(x)$ может быть знакопеременной, что проявляется в виде осцилляций сплайна $S(x)$.

Наряду с интерполяционными сплайнами получили распространение квазиинтерполяционные и локально-аппроксимационные сплайны. Они записываются в виде (20), но, в отличие от интерполяционных сплайнов, коэффициенты α_i задаются явными формулами. Для квазиинтерполяционных сплайнов имеем

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{-1} &= f_0 - \frac{2h_{-1} + h_{-2}}{3} f_0' + \frac{h_{-1}(h_{-1} + h_{-2})}{6} f_0'', \\
\alpha_i &= f_i + \frac{h_i - h_{i-1}}{3} f_i' - \frac{h_{i-1} h_i}{6} f_i'', \quad i = 0,1,\dots,N, \\
\alpha_{N+1} &= f_N + \frac{2h_N + h_{N+1}}{3} f_N' + \frac{h_N(h_N + h_{N+1})}{6} f_N''.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Заменяя в формулах для α_i, $i = 1,2,\dots,N-1$, производные f_i', f_i'' трехточечными разностными аппроксимациями, получаем формулы коэффициентов локально-аппроксимационных сплайнов

$$\alpha_i = f_i + \frac{1}{3(h_{i-1} + h_i)} \left\{ h_i^2 \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - h_{i-1}^2 \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \right\}, \quad i = 1,\dots,N-1.$$

Формулы для $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_N, \alpha_{N+1}$ можно найти, аппроксимируя f_0', f_0'', f_N', f_N'' производными многочленов Лагранжа $L_0(x)$ и $L_{N-3}(x)$. Если потребовать выполнения условий интерполяции (21) в узлах x_0, x_1, x_{N-1}, x_N, то эти коэффициенты можно выразить через α_1, α_2, α_{N-2}, α_{N-1}.

Оценки погрешности приближения функций $f(x) \in C^4[a,b]$ квазиинтерполяционными и локально-аппроксимационными сплайнами по порядку совпадают с оценками для интерполяционных сплайнов, но имеют значительно большие константы.

Сделаем несколько замечаний по поводу применения кубических сплайнов для генерирования функций. Одно из главных требований здесь - возможность локальной модификации сплайна в процессе его построения. Если для генерирования функции применяются кубические сплайны класса C^1, то из (6) ясно, что изменение в узле x_i параметров f_i, m_i приводит к изменению сплайна только на двух соседних интервалах $(x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1})$. В случае, когда нужно регулировать поведение сплайна только на одном интервале, например, $[x_i, x_{i+1}]$, достаточно ввести на нем один узел сплайна. Ясно, что, увеличивая число узлов, можно модифицировать сплайн на участке сколь угодно малой длины.

При использовании в задачах генерирования функций кубических сплайнов класса C^2 представления (6) и (16) бесполезны, так как они не позволяют производить локальное изменение сплайна. Выход состоит в применении B-сплайнов. Изменение одного из коэффициентов в представлении (20) вызывает изменение сплайна на четырех соседних интервалах. Для уменьшения размеров области изменения сплайна необходимо ввести дополнительные узлы. Пусть, например, нужно модифицировать сплайн при $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Дополним сетку Δ узлами $x_i < x_{i1} < x_{i2} < x_{i3} < x_{i+1}$. Затем пересчитаем коэффициенты разложения сплайна на новую сетку. Для этой цели очень удобны формулы квазиинтерполяции (24). Теперь изменение коэффициента, соответствующего узлу x_{i_2}, приводит к изменению сплайна только при $x \in (x_i, x_{i+1})$.

В нашем обзоре мы не коснулись многих интересных и важных задач, решаемых с помощью кубических сплайнов. В частности, не рассматривались сглаживающие сплайны. Материал по этому вопросы имеется в [I-3, 6].

Рациональные сплайны

Конструкция рационального сплайна, рассматриваемая ниже, содержит много свободных параметров. Выбирая последние, можно учитывать самые разнообразные свойства приближаемой функции. Кубический сплайн класса C^2 является частным случаем рационального сплайна. Большие возможности открываются при использовании рациональных сплайнов для генерирования функций.

Рациональным сплайном называется функция $S_R(x) \in C^2[a, b]$, которая на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ имеет вид

$$S_R(x) = A_i t + B_i(1-t) + \frac{C_i t^3}{1+\varphi_i(t)} + \frac{D_i(1-t)^3}{1+\psi_i(t)},$$

где $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$ – заданные дважды дифференцируемые функции аргумента t. Предполагаются выполненными условия

$$\varphi_i(t) > -1, \quad \psi_i(t) > -1, \quad t \in [0,1]; \quad \varphi_i(1) = 0, \quad \psi_i(0) = 0, \qquad (25)$$
$$i = 0, \ldots, N-1.$$

Интерполяционный рациональный сплайн записывается в виде

$$S_R(x) = (1-t)f_i + t f_{i+1} +$$
$$+ t C_i\left[\frac{t^2}{1+\varphi_i(t)} - 1\right] + (1-t)D_i\left[\frac{(1-t)^2}{1+\psi_i(t)} - 1\right]. \qquad (26)$$

Коэффициенты C_i, D_i, $i = 0, \ldots, N-1$, определяются из условия $S_R(x) \in C^2[a,b]$. Если обозначить $m_i = S_R'(x_i)$, то

$$C_i = \Delta_i^{-1}\{(f_{i+1} - f_i)[3 + \psi_i'(0)] - h_i m_i - h_i m_{i+1}[2 + \psi_i'(0)]\},$$
$$D_i = \Delta_i^{-1}\{(f_{i+1} - f_i)[\varphi_i'(1) - 3] + h_i m_i[2 - \varphi_i'(1)] + h_i m_{i+1}\},$$

где $\Delta_i = 1 - [2 + \psi_i'(0)][2 - \varphi_i'(1)]$. При выполнении ограничений

$$\varphi_i'(1) < 1, \quad \psi_i'(0) > -1, \quad i = 0, \ldots, N-1, \qquad (27)$$

величина Δ_i отлична от нуля.

Из условия непрерывности $S''(x)$ в узлах x_i получаем

$$\lambda_i P_{i-1} m_{i-1} + \{\lambda_i P_{i-1}[2 + \psi_{i-1}'(0)] + \mu_i Q_i[2 - \varphi_i'(1)]\} m_i + \mu_i Q_i m_{i+1} =$$
$$= \lambda_i P_{i-1}[3 + \psi_{i-1}'(0)]\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} + \mu_i Q_i[3 - \varphi_i'(1)]\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \qquad (28)$$
$$i = 1, \ldots, N-1,$$

где

$$P_{i-1} = \Delta_{i-1}^{-1}\{6 - 6\varphi_{i-1}'(1) - \varphi_{i-1}''(1) + 2[\varphi_{i-1}'(1)]^2\},$$
$$Q_i = \Delta_i^{-1}\{6 + 6\psi_i'(0) - \psi_i''(0) + 2[\psi_i'(0)]^2\}.$$

Для однозначного определения сплайна $S_R(x)$ требуются два дополнительных условия. В качестве последних можно использовать краевые условия тех же типов, что и в случае кубического сплайна. Присоединяя к (28) уравнения, вытекающие из краевых условий, получаем системы для параметров m_i, $i=0,1,\ldots,N$. Эти системы имеют единственные решения, если выполнены условия (25), (27) и $P_{i-1}Q_i > 0$, $i=1,2,\ldots,N-1$.

Ограничения на функции $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, достаточные для существования рационального сплайна, весьма слабы, и это позволяет строить сплайны с самыми разнообразными свойствами. На конкретном примере проиллюстрируем некоторые свойства рациональных сплайнов.

Положим $\varphi_i(t)=p_i(1-t^\alpha)$, $\psi_i(t)=q_i\,[1-(1-t)^\alpha]$, где $\alpha>0$, $p_i>0$, $q_i>0$ – некоторые постоянные.

Справедливы следующие утверждения.

Если значения f_j таковы, что для $i=k,k+1$ выполнены неравенства (22), то при всех достаточно больших q_{k-1}, p_k, q_k, p_{k+1} выполняется неравенство $S''(x)>0$, $x\in[x_k,x_{k+1}]$, т.е. сплайн $S(x)$ на отрезке $[x_k,x_{k+1}]$ будет выпуклой функцией.

Если значения f_j таковы, что для некоторого k выполнено условие $f_{k-1}<f_k<f_{k+1}<f_{k+2}$, то при всех достаточно больших q_{k-1}, p_k, q_k, p_{k+1} выполняется неравенство $S'(x)>0$, $x\in[x_k,x_{k+1}]$, т.е. сплайн $S(x)$ на отрезке $[x_k,x_{k+1}]$ будет монотонно возрастающей функцией.

Очевидно, при $p_i=q_i=0$, $i=0,1,\ldots,N-1$. рациональный сплайн превращается в кубический. С другой стороны, справедливо соотношение
$$\lim_{p_k,q_k\to\infty} S_R(x)=(1-t)f_k+t f_{k+1},\quad x\in[x_k,x_{k+1}],$$
и сплайн первой степени тоже можно считать частным случаем рационального сплайна.

Перечисленные свойства позволяют эффективно использовать рациональные сплайны для приближения с сохранением монотонности и выпуклости (вогнутости). Не вызывает затруднений и наличие точек излома или участков с большими градиентами.

Аналогичными свойствми обладают рациональные сплайны, когда
$$\varphi_i(t)=p_i(1-t)[1+p_i(1-t)],\ \psi_i(t)=q_i t(1+q_i t)$$
или
$$\varphi_i(t)=p_i t(1-t),\ \psi_i(t)=q_i t(1-t).$$

Интересные конструкции рациональных сплайнов получаются, если положить

$$\varphi_i(t)=\frac{t^3}{\xi_i(t)}-1 \quad , \qquad \psi_i(t)=\frac{(1-t)^3}{\eta_i(t)}-1 \; .$$

Здесь $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ – дважды дифференцируемые функции, свойства которых должны быть согласованы с условиями (25), (27). Формула для интерполяционного сплайна в этом случае имеет простой вид: $S_R(x)=(1-t)f_i+tf_{i+1}+C_i[\xi_i(t)-t]+D_i[\eta_i(t)-(1-t)]$. Среди различных вариантов выбора функций $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ укажем следующий:

$$\xi_i(t)=\frac{(t-\alpha_i)_+^3}{(1-\alpha_i)^3} \quad , \qquad \eta_i(t)=\frac{(\beta_i-t)_+^3}{\beta_i^3} \quad ,$$

где $0\leqslant\alpha_i<1$, $0<\beta_i\leqslant 1$, $(x)_+=max\{x,0\}$. В этом случае $S_R(x)$ представляет собой кубический сплайн класса C^2 с дополнительными узлами в точках $x_i+\alpha_i h_i$, $x_i+\beta_i h_i$. Изменяя их расположение, можно управлять поведением сплайна. В частности, если $\beta_i<\alpha_i$, то на отрезке $[x_i+\beta_i h_i, x_i+\alpha_i h_i]$ сплайн $S_R(x)$ будет линейной функцией. Отметим, что при $\beta_i=1-\alpha_i$ получается сплайн, рассмотренный в [7].

Сплайны двух переменных

В этом разделе мы ограничимся краткими сведениями о кубических сплайнах двух переменных. Пусть в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$ введена сетка $\Delta=\Delta_x\times\Delta_y$, где $\Delta_x: a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, $\Delta_y: c=y_0<y_1<\ldots<y_N=d$, в узлах которой заданы значения $f_{ij}=f(x_i,y_j)$. Кубическим сплайном называется функция $S(x,y)$, которая в каждой ячейке $[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$ является многочленом третьей степени по каждой переменной. Обобщением кубического сплайна класса C^1 на двумерный случай будет сплайн класса $C^{1,1}$ имеющий непрерывные производные $D^{r,s}S(x,y)$, $r,s=0,1$ (символ $D^{r,s}$ означает r-кратное дифференцирование по x и s-кратное по y).

Обозначим

$$m_{ij}^{r,s}=D^{r,s}S(x_i,y_j)\,,\ r,s=0,1\,;\quad h_i=x_{i+1}-x_i\ ,\quad \ell_j=y_{j+1}-y_j\ ,$$

$$t=(x-x_i)/h_i\ ,\quad u=(y-y_j)/\ell_j\ ,\quad \beta_1(z)=(1-z)^2(1+2z)\ ,$$

$$\beta_2(z)=z^2(3-2z)\,,\quad \beta_3(z)=z(1-z)^2,\quad \beta_4(z)=-z^2(1-z)\,.$$

Любой интерполяционный сплайн класса $C^{1,1}$ записывается в виде $S(x,y)=\beta(t)\cdot F\cdot\beta(u)$, где векторы $\beta(t)$, $\beta(u)$ и матрица F определены формулами

$$\beta(t)=[\,\beta_1(t),\beta_2(t),h_i\beta_3(t),\,h_i\beta_4(t)]\,,$$

$$F=\begin{bmatrix} f_{ij} & f_{i,j+1} & m_{ij}^{0,1} & m_{i,j+1}^{0,1} \\ f_{i+1,j} & f_{i+1,j+1} & m_{i+1,j}^{0,1} & m_{i+1,j+1}^{0,1} \\ m_{ij}^{1,0} & m_{i,j+1}^{1,0} & m_{ij}^{1,1} & m_{i,j+1}^{1,1} \\ m_{i+1,j}^{1,0} & m_{i+1,j+1}^{1,0} & m_{i+1,j}^{1,1} & m_{i+1,j+1}^{1,1} \end{bmatrix}, \qquad \beta(u)=\begin{bmatrix} \beta_1(u) \\ \beta_2(u) \\ \ell_j\beta_3(u) \\ \ell_j\beta_4(u) \end{bmatrix}.$$

В частности, полагая $m_{ij}^{r,s}=D^{r,s}f(x_i,y_j)$, $r,s=0,1$; $i=0,1,\ldots$ $\ldots,N$; $j=0,1,\ldots,M$, получаем эрмитовы кубические сплайны двух переменных*).

Кубические сплайны класса $C^{2,2}$ получаются, если $m_{i,j}^{r,s}$ определяются из условий непрерывности производных $D^{\ell,k}S(x,y)$, $\ell,k=2$. В этом случае в узлах сетки Δ задаются только значения f_{ij}. На границах прямоугольника задаются краевые условия.

Любой сплайн класса $C^{2,2}$ может быть записан в виде разложения по B-сплайнам:

$$S(x,y)=\sum_{i=-1}^{N+1}\sum_{j=-1}^{M+1}\alpha_{ij}\,B_i(x)\widetilde{B}_j(y)\,.$$

Коэффициенты α_{ij} вычисляются либо из условий интерполяции, либо по формулам квазиинтерполяции или локальной аппроксимации.

В заключение отметим, что во всех случаях алгоритмы построения сплайнов двух переменных сводятся к решению одномерных задач вдоль линий $x=x_i$ и $y=y_j$.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

2. BOOR C.de. A practical guide to splines.- N.Y., Heidel - berg, Berlin: Springer,1978.- 392 p.

---

*) В [I, с.76] допущена неточность: вместо матрицы F ошибочно указана транспонированная к ней. Аналогичная ошибка в [I, с. 135].

3. SPÄTH H. Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. - München-Wien: R.Oldenburg Verl.,1973.

4. ШУМИЛОВ Б.М. О локальной аппроксимации билинейными сплайнами. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы,вып. 81). Новосибирск, 1979, с. 42-47.

5. BEHFOROOZ G.H., PAPAMICHAEL N. End conditions for cubic spline interpolation.-J.Inst.Maths Applics, 1979,v.23,p.355-366.

6. ВЕРШИНИН В.В. О сглаживающих сплайнах и их производных. - Новосибирск, Б.и., 1980. - 20 с. - (Препринт/Институт математики СО АН СССР).

7. PRUESS S. Alternatives to the exponential spline in tension.- Math.Computat., 1979 , v.33,N 148,p.1273-1281.

Поступила в ред.-изд.отд.
28 апреля 1981 года