

УДК 519.65:681.3.06

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ
В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Н.Н. Павлов, В.А. Скороспелов

В качестве средств математического моделирования кривых и поверхностей в системе используются кубические и бикубические параметрические сплайны. Сплайн-функции являются универсальным средством для этой цели. Они одинаково эффективны как для решения задач приближения кривых и поверхностей, так и задач генерации этих объектов. Единая форма представления объектов позволяет создать эффективные алгоритмы численного решения геометрических задач. Наконец, кубические сплайны обладают замечательными экстремальными свойствами.

Рассматриваются практические методы приближения кривых и поверхностей. Задача об определении приближающего сплайна формулируется либо как задача о восстановлении объекта, либо как задача о его приближении с заданной точностью. В первом случае по заданному множеству точек ищется интерполяционный или сглаживающий сплайн. Во втором – на заданной кривой или поверхности выбирается такое множество точек, чтобы интерполяционный сплайн аппроксимировал эти объекты с погрешностью, не превышающей заданную.

I. Интерполяция кривых кубическим параметрическим сплайном

Кубический параметрический сплайн, определенный на сетке Δ : $\alpha = t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$, всегда может быть представлен как вектор-функция

$$\vec{P}(t) = (f_1, f_2, g_1, g_2) \times (\vec{P}_i, \vec{P}_{i+1}, \vec{P}'_i, \vec{P}'_{i+1})^T, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad (I)$$

где

$$f_1 = (t_{i+1} - t)^2 [2(t - t_i) - \Delta t_i] / \Delta t_i^3, \quad f_2 = 1 - f_1,$$

$$g_1 = (t_{i+1} - t)^2 (t - t_i) / \Delta t_i^3, \quad g_2 = (t_i - t)^2 (t - t_{i+1}) / \Delta t_i^3,$$

$$\vec{P}(t) = \{P_x(t), P_y(t), P_z(t)\}, \quad \vec{P}_i = \vec{P}(t_i), \quad \vec{P}_i' = \frac{d}{dt} \vec{P}(t) \Big|_{t=t_i}.$$

Отсюда следует, что он однозначно определяется данными $\{\vec{P}_i, \vec{P}_i', t_i\}$. В дальнейшем кубический параметрический сплайн для краткости будем называть ρ -сплайном.

Рассмотрим несколько задач интерполяции дуги кривой ρ -сплайном, наиболее часто встречающихся в практике.

1.1. Пусть $\vec{E} = \vec{E}(t)$, $t \in [a, b]$ — некоторая параметризация дуги кривой и в узлах Δ известны ее значения $\{\vec{E}_i, \vec{E}_i'\}$, $i = \overline{1, n}$. Требуется восстановить дугу ρ -сплайном.

Подставляя значения $\vec{P}_i = \vec{E}_i$, $\vec{P}_i' = \vec{E}_i'$ в (1), получим одно из решений этой задачи. Очевидно, что $\vec{P}(t) \in C^1[a, b]$ (это означает, что $P_x(t), P_y(t), P_z(t) \in C^1[a, b]$). Если предположить, что $\vec{E}(t) \in C^1[a, b]$ и имеет кусочно-непрерывные вторые производные, справедлива следующая оценка погрешности [1], с которой полученный ρ -сплайн восстанавливает дугу на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$:

$$|\vec{E}(t) - \vec{P}(t)| \leq \frac{1}{16} \Delta t_i^2 \|\vec{E}''(t)\|_i, \quad \|\vec{E}''(t)\|_i = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\vec{E}''(t)|.$$

Решение задачи 1.1 в классе C^2 дает ρ -сплайн с дополнительными узлами, удовлетворяющий некоторым граничным условиям [2, гл. 5], при этом если $\vec{E}(t) \in C^2[a, b]$, то для погрешности восстановления дуги имеет место оценка:

$$|\vec{E}(t) - \vec{P}(t)| \leq \sqrt{3} \cdot 8,8928 \cdot 10^{-2} \Delta t^2 \omega(\vec{E}''),$$

где $\omega(\vec{E}'') = \max_i |\vec{E}''(t) - \vec{E}''(\tilde{t})|$, $\Delta t = \max_i \Delta t_i$, $t, \tilde{t} \in [a, b]$.

1.2. Пусть $\vec{E} = \vec{E}(t)$, $t \in [a, b]$ — параметризация гладкой дуги кривой и в узлах сетки Δ заданы ее значения $\{\vec{E}_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Требуется по этим точкам восстановить кривую ρ -сплайном.

Можно построить ρ -сплайн дефекта I, определенный на сетке Δ по заданным значениям и дополнительным граничным условиям [2, гл. 3]. В зависимости от гладкости $\vec{E}(t)$ оценки приближения кривой суть:

$$|\vec{z}(t) - \vec{p}(t)| \leq \begin{cases} \sqrt{3} \frac{19}{96} \Delta t^2 \omega(\vec{z}'), & \vec{z}(t) \in C^2[a, b]; \\ \sqrt{3} \frac{9}{8} \Delta t \omega(\vec{z}'), & \vec{z}(t) \in C^1[a, b]. \end{cases}$$

1.3. Пусть $\{\vec{z}_i\}$, $i=1, n$ - упорядоченная последовательность точек гладкой дуги, в каждой из которых известно направление касательного вектора $\vec{H}_i$. Требуется по этим значениям восстановить дугу ρ -сплайном.

Для того чтобы свести эту задачу к ранее рассмотренным, необходимо определить в заданных точках значения какой-либо параметризации кривой. Один из способов приближенного определения естественной параметризации состоит в том, что в качестве длины дуги кривой принимается длина дуги восстанавливающего ρ -сплайна [1]. Пусть s - естественный параметр кривой. Тогда $\vec{z}_i' = \vec{z}'(s_i) = \vec{H}_i$, ($|\vec{H}_i| = 1$). Длина дуги i -го звена ρ -сплайна определяется выражением

$$L_i = \int_{s_i}^{s_{i+1}} |\vec{p}'(s)| ds.$$

Сделаем замену переменной $\tilde{s} = s - s_i$ и потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\Delta s_i = \int_0^{\Delta s_i} |\vec{p}'(s)| d\tilde{s}, \quad \text{где } \Delta s_i = s_{i+1} - s_i.$$

Это уравнение относительно Δs_i имеет единственное положительное решение, которое легко находится методом итераций. В качестве начального значения следует принять $\Delta s_i^{(0)} = |\vec{H}_i|^2 / C$, где $\vec{H}_i = \vec{z}_{i+1} - \vec{z}_i$, $C = \max(|\vec{H}_i|, |\vec{H}_{i+1}|, |\vec{H}_i|, |\vec{H}_{i+1}|)$, $(\vec{H}_i, \vec{H}_{i+1})$ есть скалярное произведение векторов. Определив все Δs_i , $i=1, n-1$, найдем $s_{i+1} = s_i + \Delta s_i$, $i=1, n-1$, положив $s_1 = 0$.

1.4. Пусть $\{\vec{z}_i\}$, $i=1, n$ - упорядоченная последовательность точек гладкой дуги кривой. Требуется восстановить ее по заданным значениям ρ -сплайном. Эта задача сводится к задаче 1.2, если точкам $\{\vec{z}_i\}$ приписать значения $\{t_i\}$ какого-либо параметра t . В качестве такового, например, можно принять суммарную длину хорд:

$$t_1 = 0, \quad t_i = \sum_{k=2}^i h_{k-1}, \quad i = \overline{2, n},$$

где $h_k = |\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k|$.

Если в заданных точках приближенно определить направление касательного вектора к кривой, то эта задача будет сведена к задаче 1.3. Рассмотрим один из вариантов [6]. Направление касательного вектора в точке $\bar{x}_i$, $i = \overline{2, n-1}$, определим формулой

$$\bar{H}_i = (\alpha_i \bar{h}_{i-1} + \beta_i \bar{h}_i),$$

где

$$\alpha_i = |\langle \bar{h}_i, \bar{h}_{i+1} \rangle| \cdot \frac{h_i}{h_{i+2,i} h_{i+1}}, \quad i = \overline{2, n-2}, \quad \alpha_{n-1} = 1,$$

$$\beta_2 = 1, \quad \beta_i = |\langle \bar{h}_{i-2}, \bar{h}_{i-1} \rangle| \frac{h_{i-1}}{h_{i,i-2} h_{i-1}}, \quad i = \overline{3, n-1},$$

$$h_{i,i-2,i} = |\bar{x}_{i-2} - \bar{x}_i|.$$

Если окажется, что $\alpha_i = \beta_i = 0$, то следует принять $\alpha_i = \beta_i = 1$. Векторы $\bar{H}_1$ и $\bar{H}_n$ вычисляются по формулам

$$\bar{H}_1 = 2 \bar{h}_1 / |\bar{h}_1| - \bar{H}_2 / |\bar{H}_2|, \quad \bar{H}_n = 2 \bar{h}_n / |\bar{h}_n| - \bar{H}_{n-1} / |\bar{H}_{n-1}|$$

Для гладкой замкнутой кривой выражение (2) распространяется на все точки, если положить $\bar{x}_{-1} \equiv \bar{x}_{n-2}$, $\bar{x}_0 \equiv \bar{x}_{n-1}$, $\bar{x}_{n+1} \equiv \bar{x}_2$, $\bar{x}_{n+2} \equiv \bar{x}_3$. Отметим, что формула (2) точна для окружности (точки $\bar{x}_{i-2}$, $\bar{x}_{i-1}$, $\bar{x}_i$, $\bar{x}_{i+1}$, $\bar{x}_{i+2}$ лежат на окружности) и участка прямой, проходящего через три точки, одна из которых $\bar{x}_i$.

1.5. Пусть $\bar{x} = \bar{x}(t)$, $t \in [a, b]$ — параметризация гладкой дуги кривой. Требуется на отрезке $[a, b]$ выбрать такую сетку Δ , чтобы интерполяционный ρ -сплайн, определенный на этой сетке, восстанавливал дугу с погрешностью, не превышающей заданную величину ε .

Решение этой задачи можно получить, используя оценки интерполяции ρ -сплайном. В [2, гл. 2] рассмотрены два алгоритма такого рода. Недостаток этого подхода в том, что приходится вычислять старшие производные или, по крайней мере, иметь их оценку. На практике удобно пользоваться следующим простым приемом. На основании предварительного анализа кривой выбирается сетка Δ_0 : $\omega =$

$= t_1^0 < t_2^0 < \dots < t_n^0 = \ell$, соответствующая ее характерным точкам кривой. К ним относятся точки, которые должны сохранить свое положение, точки разрыва кривизны, средние точки участков с большим изменением кривизны. На этой сетке определяется интерполяционный ρ -сплайн. На каждом участке $[t_i, t_{i+1}]$ выбирается точка $\tilde{t}_i = a_i t_{i+1} + b_i t_i$, где $a_i = \cos \alpha_i / (\cos \alpha_i + \cos \beta_i)$, $b_i = \cos \beta_i / (\cos \alpha_i + \cos \beta_i)$, α_i, β_i - углы наклона касательных векторов $\vec{P}_i, \vec{P}_{i+1}$ к хорде $\vec{h}_i = (\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i)$. Если $|\vec{\varepsilon}(\tilde{t}_i) - \vec{P}(\tilde{t}_i)| > \varepsilon$, точка $\tilde{t}_i$ включается в сетку Δ_0 . Таким образом будет получена новая сетка Δ_1 . Этот процесс заканчивается, как только $\Delta_k \equiv \Delta_{k-1}$.

Практический интерес представляет вопрос о характере графика ρ -сплайна. Не приводя доказательств, отметим следующие его свойства:

- необходимым условием появления в графике i -го звена ρ -сплайна точки с нулевой кривизной является $(\vec{A}_i, \vec{B}_i, \vec{C}_i) = 0$, где $\vec{A}_i = [\vec{P}_i', \vec{h}_i]$, $\vec{B}_i = [\vec{P}_{i+1}', \vec{h}_i]$, $\vec{C}_i = [\vec{P}_i', \vec{P}_{i+1}']$, $(\vec{A}_i, \vec{B}_i, \vec{C}_i)$ - смешанное произведение, т.е. график этого звена есть плоская линия;

- достаточными условиями появления таких точек являются $(\vec{A}_i, \vec{B}_i) > 0$ (рис. I, а) или $(\vec{A}_i, \vec{B}_i) \leq 0$, $3|\vec{A}_i| < |\vec{C}_i| \|\vec{h}_i\|$ (или $3|\vec{B}_i| < |\vec{C}_i| \|\vec{h}_i\|$) (рис. I, б).

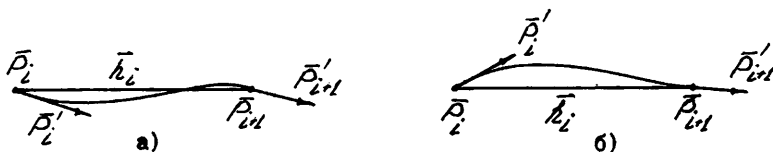


Рис. I

В случае, изображенном на рис. I, б, эту ситуацию можно устранить, если на этом звене ввести такую локальную параметризацию, чтобы выполнялись условия $3|\vec{A}_i| \geq |\vec{C}_i| \|\vec{h}_i\|$, $3|\vec{B}_i| \geq |\vec{C}_i| \|\vec{h}_i\|$.

Как правило, причинами осцилляций графика интерполяционного ρ -сплайна дефекта I являются неудачный выбор узлов интерполяции или необоснованное требование высокой степени его гладкости. Если исходные точки содержат ошибку, что является также причиной несплавного поведения графика интерполяционного сплайна, следует воспользоваться сглаживающим сплайном.

2. Интерполяция поверхности бикубическим параметрическим сплайном

Бикубический параметрический сплайн, определенный в прямоугольной области $\Omega: [a \leq t \leq b; c \leq s \leq d]$ на двумерной сетке $W: \{a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b; c = s_1 < s_2 < \dots < s_m = d\}$, всегда может быть представлен в виде:

$$\bar{r}p(t, s) = (f_1(t), f_2(t), g_1(s), g_2(s)) \times A_{ij} \times (f_1'(s), f_2'(s), g_1'(s), g_2'(s))^T, \\ t, s \in \Omega_{ij}: [t_i \leq t \leq t_{i+1}; s_j \leq s \leq s_{j+1}],$$

где f_1, f_2, g_1, g_2 - скалярные функции, определенные в § 1,

$$\bar{A}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{r}p_{ij} & \bar{r}p_{i,j+1} & \bar{r}p_{ij}^{(0,1)} & \bar{r}p_{i,j+1}^{(0,1)} \\ \bar{r}p_{i+1,j} & \bar{r}p_{i+1,j+1} & \bar{r}p_{i+1,j}^{(0,1)} & \bar{r}p_{i+1,j+1}^{(0,1)} \\ \bar{r}p_{ij}^{(1,0)} & \bar{r}p_{i,j+1}^{(1,0)} & \bar{r}p_{ij}^{(1,1)} & \bar{r}p_{i,j+1}^{(1,1)} \\ \bar{r}p_{i+1,j}^{(1,0)} & \bar{r}p_{i+1,j+1}^{(1,0)} & \bar{r}p_{i+1,j}^{(1,1)} & \bar{r}p_{i+1,j+1}^{(1,1)} \end{pmatrix},$$

$$\bar{r}p_{ij} = \bar{r}p(t_i, s_j), \quad \bar{r}p^{(\kappa, \ell)} = \frac{\partial^{\kappa+\ell}}{\partial t^\kappa \partial s^\ell} \bar{r}p(t, s).$$

Таким образом, бикубический параметрический сплайн однозначно определяется данными $\{\bar{r}p_{ij}, \bar{r}p_{ij}^{(1,0)}, \bar{r}p_{ij}^{(0,1)}, \bar{r}p_{ij}^{(1,1)}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. В дальнейшем для краткости будем называть его $\bar{r}p$ -сплайном.

Рассматриваются почти всюду дважды дифференцируемые поверхности в евклидовом пространстве, допускающие параметризацию $\vec{r} = \vec{r}(t, s)$, $t, s \in \Omega$, с кусочно-непрерывными вторыми производными по каждой переменной.

Пусть в области Ω задана двумерная прямоугольная сетка W . Совокупность линий на поверхности, соответствующих линиям этой сетки, образует каркас поверхности. Каркас разбивает поверхность на $(n-1) \times (m-1)$ клеток. Если для каждой из них изменение вектора нормали к поверхности ограничено конусом с углом при вершине $\alpha < \pi$, то такой каркас называется регулярным.

Рассмотрим несколько задач об интерполяции поверхности $\rho\rho$ -сплайном.

2.1. Пусть $\bar{z} = \bar{z}(t, s)$, $t, s \in \Omega$ - параметризация поверхности и в узлах сетки W известны ее значения $\{\bar{z}_{ij}, \bar{z}_{ij}^{(1,0)}, \bar{z}_{ij}^{(0,1)}, \bar{z}_{ij}^{(1,1)}\}$. Требуется восстановить поверхность $\rho\rho$ -сплайном.

Если положить $\bar{\rho}\bar{\rho}^{(k,\ell)}(t_i, s_j) = \bar{z}_{ij}^{(k,\ell)}$, $k, \ell = 0, 1$ и подставить эти значения в (3), то получим одно из решений этой задачи, которое по каждой переменной принадлежит классу C^1 . Для погрешности приближения поверхности в области Ω_{ij} справедлива оценка:

$$|\bar{z}(t, s) - \bar{\rho}\bar{\rho}(t, s)| \leq \frac{1}{16} (\|\bar{z}_{tt}\|_{\Omega_{ij}} \Delta t_i^2 + \|\bar{z}_{ss}\|_{\Omega_{ij}} \Delta s_j^2 + 3\|\bar{z}_{ts}\|_{\Omega_{ij}} \Delta t_i \Delta s_j),$$

где

$$\|\bar{z}_{tt}\|_{\Omega_{ij}} = \max_{t, s \in \Omega_{ij}} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{z}(t, s) \right|.$$

Решение с непрерывными вторыми частными производными дает $\rho\rho$ -сплайн с дополнительными узлами [2, гл. 5].

2.2. Пусть в узлах сетки W известны значения $\{\bar{z}_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ некоторой параметризации поверхности. Требуется по ним восстановить поверхность $\rho\rho$ -сплайном.

Можно построить $\rho\rho$ -сплайн, принадлежащий классу C^2 по каждой из переменных, определенный на сетке W по заданным значениям в ее узлах и дополнительным граничным условиям [2, гл. 3]. Для погрешности приближения справедлива следующая оценка:

$$|\bar{z}(t, s) - \bar{\rho}\bar{\rho}(t, s)| \leq \sqrt{3} \frac{19}{96} [\omega(\bar{z}_{tt}) \Delta t^2 + \omega(\bar{z}_{ss}) \Delta s^2 + 1,42 \omega(\bar{z}_{ts}) \Delta t \Delta s], \quad t, s \in \Omega.$$

2.3. Пусть $\{\bar{z}_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ - последовательность узлов некоторого регулярного каркаса поверхности. Требуется восстановить поверхность по этим значениям.

Эта задача может быть сведена к предыдущей, если узлам каркаса поставить в соответствие некоторую сетку W размерности $n \times m$.

На практике применяется следующий простой способ ее определения. Выбираются две наиболее характерные каркасные линии, принадлежащие разным семействам. На каждой из них вводится параметр, определяется интервал его изменения и сетка, соответствующая заданным точкам. Декартово произведение интервалов образует область Ω , а их разбиения определяют в ней двумерную сетку W .

Предположим теперь, что в некоторых (или во всех) точках $\bar{z}_{ij}$ заданной последовательности известно направление вектора нормали $\bar{N}_{ij}$ к поверхности. В них можно задать орты касательных векторов $\bar{H}_{ij}^{(1)}, \bar{H}_{ij}^{(2)}$ каркасных кривых. В точках, в которых направление нормали не определено, касательные векторы подсчитываются приближенно, например, как в 1.4. В таком виде задача может быть сведена к 2.1, если определить какую-либо параметризацию, соответствующую каркасу с заданными узлами. Для этого на каждой каркасной линии приближенно восстанавливается естественная параметризация, а затем выделяются две наиболее характерные кривые, принадлежащие разным семействам. Пусть ξ, β - параметры выбранных кривых, а $\Delta\xi, \Delta\beta$ - сетки, соответствующие заданным точкам и определяющие двумерную область параметров Ω и сетку W . Обозначим через u естественный параметр произвольной каркасной линии. Для определенности пусть это будет линия первого семейства. Чтобы перейти от параметра u к параметру ξ , построим отображение $u = u(\xi)$, используя кубическую сплайн-интерполяцию и определим $\frac{\partial}{\partial \xi} \bar{z}(\xi) \Big|_{\xi=\xi_j} =$

$= u'(\xi_j) \bar{H}_j^{(1)}, \quad j = \overline{1, n}$ для всех каркасных линий. Значения $\{ \bar{z}_{ij}^{(1,1)} \}$ можно получить, проинтерполировав $\bar{z}_{ij}^{(1,0)}$ или $\bar{z}_{ij}^{(0,1)}$ соответственно вдоль координатных линий $\xi = \xi_j$ или $\beta = \beta_j$.

Приведем еще один метод построения восстанавливающего сплайна, базирующийся на локальной параметризации отдельных клеток поверхности. Пусть $\{ \bar{z}_{ij}, \bar{H}_{ij}^{(1)}, \bar{H}_{ij}^{(2)}, \xi_{ij}, \beta_{ij} \}, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}$, значения радиусов-векторов узлов регулярного каркаса, касательных векторов каркасных линий и естественных параметров в узлах. Для заданных $\{ \bar{z}_{ij} \}$ вся эта информация может быть приближенно определена. Рассмотрим следующий сплайн. На клетке с номером ij относительно локальных переменных $u, v \in [0, 1]$ он имеет вид:

$$\bar{K}^{(ij)}(u, v) = FG(u) \times \bar{A}K_{ij} \times FG(v)^T,$$

где

$$FG(u) = (F_1(u), F_2(u), G_1(u), G_2(u), F_1(u)F_2(u)),$$

$$F_1(u) = (1-u)^2(2u+1), F_2(u) = u^2(3-2u), G_1(u) = u(1-u)^2, G_2(u) = u^2(u-1),$$

$$\bar{AK}_{ij} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{ij} & \bar{E}_{i,j+1} & \mu_i \bar{H}_{ij}^{(2)} & \mu_i \bar{H}_{i,j+1}^{(2)} & 0 \\ \bar{E}_{i+1,j} & \bar{E}_{i+1,j+1} & \mu_{i+1} \bar{H}_{i+1,j}^{(2)} & \mu_{i+1} \bar{H}_{i+1,j+1}^{(2)} & 0 \\ \beta_j \bar{H}_{ij}^{(2)} & \beta_{j+1} \bar{H}_{i,j+1}^{(2)} & 0 & 0 & -\Delta\beta_j \Delta \bar{H}_i^{(2)} \\ \beta_j \bar{H}_{i+1,j}^{(2)} & \beta_{j+1} \bar{H}_{i+1,j+1}^{(2)} & 0 & 0 & -\Delta\beta_j \Delta \bar{H}_{i+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & -\Delta\mu_i \Delta \bar{H}_j^{(2)} & -\Delta\mu_i \bar{H}_{j+1}^{(2)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mu_i = \beta_{i,j+1} - \beta_{ij}, \beta_j = t_{i+1,j} - t_{ij}, \Delta\beta_j = \beta_{j+1} - \beta_j, \Delta \bar{H}_j^{(2)} = \bar{H}_{i,j+1}^{(2)} - \bar{H}_{ij}^{(2)}.$$

Такой сплайн назовем бикубическим параметрическим сплайном Кунса, или K -сплайном. Он обеспечивает гладкое восстановление поверхности и определяется локально.

2.4. Пусть $\{\bar{E}_j(l)\}$, $j = \overline{1, m}$ - множество линий, которые можно рассматривать как каркасные линии первого семейства. На каждой линии задано множество точек $\{\bar{E}_{ij}\}$, $i = \overline{1, n_j}$. Требуется по этим точкам восстановить поверхность.

Выберем наиболее характерную линию из заданных и определим на ней нормированную параметризацию по суммарной длине хорд:

$$t_1 = 0, t_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k / \sum_{k=1}^{n-1} h_k, \quad i = \overline{2, n}.$$

В результате на отрезке $[0, 1]$ получим некоторую сетку-шаблон Δ_0 . Для каждой из оставшихся кривых определяется подобная параметризация, строится P -сплайн и рассчитываются его значения в узлах этой сетки $\{P_j(t_i)\}$. Множество точек $\{\bar{P}_{ij}\}$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ можно рассматривать как множество узлов каркаса некоторой поверхности, близкой к исходной. По ним определяется интерполирующий PP -сплайн, или K -сплайн, как это было сделано в задаче 2.3.

Полученное решение, вообще говоря, не сохраняет исходные точки, кроме крайних, на каждой кривой, относительно которых предпола-

гается, что они описывают первую и последнюю каркасные линии второго семейства. Иногда возникает необходимость сохранить некоторые характерные точки заданных кривых. Это легко сделать, если они лежат на дугах, которые можно включить в число каркасных линий 2-го семейства. Тогда каждая исходная кривая характерными точками разбивается на одинаковое количество участков. Применяв прием, описанный выше для каждого из участков отдельно, получим каркас, содержащий среди своих узлов сохраняемые точки.

2.5. Пусть на поверхности задано некоторое множество линий $\{G_k\}$, $k=1, \overline{L}$, которые, в отличие от предыдущей задачи, не могут быть взяты в качестве каркасных. Требуется по ним восстановить поверхность.

Рассмотрим прием, позволяющий получить одно из семейств каркасных линий. Пусть известны две поверхности $\tilde{Z} = \tilde{Z}_i(t, s)$ и $\tilde{Z} = \tilde{Z}_m(t, s)$, которые в пересечении с исходной дают две крайние дуги, т.е. крайние каркасные линии, например, первого семейства. Определим семейство поверхностей: $\tilde{R}(t, s, \delta) = \tilde{Z}_i(t, s)(1-\delta) + \tilde{Z}_m(t, s)\delta$, $\delta \in [0, 1]$ и на отрезке $[0, 1]$ зададим сетку Δ_δ : $\{0 = \delta_1^* < \delta_2^* < \dots < \delta_m^* = 1\}$. Ей соответствует множество поверхностей $\{\tilde{R}(t, s, \delta_j^*)\}$, $j=1, \overline{m}$. Их пересечения с исходной поверхностью образуют семейство каркасных линий. Пересекая каждую поверхность этого множества с заданными дугами $\{G_k\}$ и упорядочивая точки пересечения вдоль каркасных линий, получаем множество значений $\{\tilde{z}_{ij}^*\}$, $i=1, \overline{L}$, $j=1, \overline{m}$, фигурирующих в условии задачи 2.4. Успех этого приема зависит от удачного выбора семейства поверхностей $\tilde{R}(t, s, \delta)$.

2.6. Пусть $\tilde{Z} = \tilde{Z}(t, s)$, $t, s \in G_2 = [a, b] \times [c, d]$ — параметризация поверхности. Требуется определить pp -сплайн, приближающий эту поверхность с погрешностью, не превышающей наперед заданную величину ε .

Задача фактически состоит в определении некоторой сетки W : $\{\alpha = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b; \beta = s_1 < s_2 < \dots < s_m = d\}$. Практический интерес представляет следующий простой прием. Выбираются две характерные координатные линии $t = t^* \ll \beta - s^*$. Из их анализа определяются сетки Δ_t^0 и Δ_s^0 , которые образуют двумерную сетку W_0 .

Рассмотрим кривую $S = S_1^0$ и для нее подберем сетку Δ_t^1 приемом, изложенным при решении задачи 1.5, используя в качестве начальной Δ_t^0 . Затем по кривой $S = S_2^0$ аналогично преобразуем Δ_t^1 в Δ_t^2 и т.д. В результате будет получена сетка Δ_t^m обеспечивающая заданное приближение координатных линий $S = S_j$, $j=1, \overline{m}$.

Точно так же преобразуем сетку Δ_s^0 на множестве линий $\ell = \ell_i$ в сетку Δ_s^2 , которая вместе с Δ_ℓ^2 задает W_ℓ . На этом можно остановиться, если сетка W_0 была выбрана достаточно удачно. Но для большей строгости следует процедуру продолжать до тех пор, пока не выполнится условие $W_\ell = W_{\ell-1}$, а после этого проверить неравенство

$$\left| \bar{\varepsilon}\left(\frac{\ell_i + \ell_{i+1}}{2}, \frac{s_j + s_{j+1}}{2}\right) - \overline{pp}\left(\frac{\ell_i + \ell_{i+1}}{2}, \frac{s_j + s_{j+1}}{2}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

$$i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

2.7. В заключение рассмотрим задачу о восстановлении линейчатой поверхности. Пусть $\{\bar{\varepsilon}_{i1}\}, \{\bar{\varepsilon}_{i2}\}, i = \overline{1, n}$ — упорядоченные последовательности точек ее крайних дуг, соответствующих множеству положений образующей этой поверхности. Требуется восстановить ее, сохраняя свойство линейчатости.

Определим сетку Δ параметра t , общую для обеих дуг. Например, это может быть параметризация по суммарной длине хорд первой дуги. Обозначим через $\bar{P}_1(t)$ и $\bar{P}_2(t)$ P -сплайны, приближающие заданные дуги, и в качестве решения примем вектор-функцию: $S(t, v) = \bar{P}_1(t)(1-v) + \bar{P}_2(t)v, v \in [0, 1]$. Задача состоит в восстановлении крайних дуг сегмента.

3. Аппроксимация кривых и поверхностей

Задача аппроксимации состоит в отыскании сплайна, приближающего исходную кривую, заданную набором принадлежащих ей точек. В тех случаях, когда по исходным данным не удастся построить интерполяционный сплайн с достаточно плавным графиком (например, имеют место осцилляции), целесообразно применять сглаживающие сплайны. Ниже описываются два подхода к построению сглаживающих сплайнов.

Первый состоит в построении P -сплайна на сетке с возможно меньшим числом узлов [3, 4]. В основе второго подхода лежит известная задача сглаживания кубическими сплайнами [3].

3.1. Пусть исходная кривая задана упорядоченным множеством точек $\{\bar{\varepsilon}_i\}, i = \overline{1, n}$. Будем строить сглаживающий P -сплайн на некоторой сетке $\Delta: 0 = T_1 < T_2 < \dots < T_k = 1; k < n$. Его коэффициенты $\bar{P}_k, \bar{P}_k', k = \overline{1, k}$, в представлении (I) определяются из условий минимума функционала

$$I = \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i^2 + \sum_{j=2}^{k-1} \delta_j [\bar{\rho}(t_j)]^2, \quad (4)$$

где $\alpha_i, \delta_j \geq 0$ - весовые коэффициенты; $\rho_i = \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |\bar{\rho}(t) - \bar{E}_i|$ - расстояние от точки с номером i до кривой; $[\bar{\rho}(t_j)]$ - вектор разрыва второй производной ρ -сплайна в точке T_j . Пусть $\{t_i\}$, $i=1, n$, $t_i \in [0, 1]$, $t_{i+1} > t_i$, - значения параметра t , для которых при фиксированной кривой $\bar{\rho}(t)$ справедливо $|\bar{\rho}(t_i) - \bar{E}_i| = \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} |\bar{\rho}(t) - \bar{E}_i|$.

Предлагается следующий алгоритм отыскания ρ -сплайна, минимизирующего функционал (4). Разбиением отрезка $[0, 1]$ пропорционально длине хорд $h_i = |\bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i|$ выбирается начальное приближение $\{t_i^0\}$. Затем отыскиваются коэффициенты $\bar{\rho}_j, \bar{\rho}_j'$, доставляющие минимум функционалу (4) на этом разбиении, для чего решается система линейных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_j} I = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_j'} I = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (5)$$

Далее, для определения следующего приближения $\{t_i^1\}$ решается n нелинейных уравнений $\frac{\partial}{\partial t_i} I = 0$ и т.д. Значение функционала I на каждом шаге описанного процесса не возрастает. Задавшись некоторым $\varepsilon > 0$, можно прервать процесс приближения, как только $I^{(j+1)} - I^{(j)} \leq \varepsilon$. Для того чтобы матрица системы (5) была невырожденной, достаточно задать ненулевые коэффициенты δ_k . Более подробно этот вопрос исследован в [3].

Программа, реализующая описанный алгоритм, выполняется в интерактивном режиме. Варьируя число и расположение узлов сетки и значения весовых коэффициентов, пользователь добивается достаточно хорошего приближения кривой при плавном характере графика сплайна. Естественно начинать с сетки, включающей характерные точки кривой. Если при этом величины отклонений ρ_i будут превосходить допустимые, нужно увеличить число звеньев сплайна.

3.2. Рассмотрим сначала задачу сглаживания функции, состоящую в отыскании на некоторой сетке $\Delta: a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ кубического сплайна $S(x)$, $x \in [a, b]$, минимизирующего функционал

$$J = \int_a^b (S'')^2 dx$$

и удовлетворяющего условиям: $Y_i - \varepsilon_i \leq S(x_i) \leq Y_i + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$ ($\{Y_i\}$, $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \geq 0$, $i = \overline{1, n}$, наборы вещественных чисел), а также одному из трех типов граничных условий:

- 1) $S'(a) = S'(b) = 0$;
- 2) $S'(a) = Y'_a$, $S'(b) = Y'_b$, Y'_a, Y'_b - некоторые числа;
- 3) $S^{(p)}(a) = S^{(p)}(b)$, $p = 0, 1, 2$.

Условия первого и третьего типов задаются соответственно в тех случаях, когда вторая производная приближаемой функции на концах интервала $[a, b]$ близка к нулю или когда функция периодична. Если о поведении приближаемой функции в окрестности точек a и b ничего неизвестно, используют граничные условия второго типа, задавая тем или иным способом значения Y'_a и Y'_b . Применение известных методов приближенного определения Y'_a и Y'_b далеко не всегда приводит к удовлетворительным результатам. Приведенный ниже способ задания граничных условий позволяет строить сглаживающие сплайны с плавным изменением графика, а также дифференциальных характеристик, таких как кривизна и т.п.

Величины Y'_a и Y'_b предлагается выбирать такими, чтобы сплайн доставлял минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^n [S''']_i^2,$$

где $[S''']_i$ означает величину разрыва функции $S'''(x)$ в точке i . Обращаясь к механической аналогии сплайна - упругой рейке, можно сказать, что при этом она займет такое положение, при котором сумма квадратов реакций опор будет минимальной, т.е. рейка будет находиться в наименее напряженном состоянии.

Легко видеть, что сформулированная в терминах фундаментальных сплайнов, или B -сплайнов, задача, описанная выше, сводится к задаче условной минимизации квадратичного функционала.

Сглаживание кривой осуществляется по координатно на некоторой сетке Δ , в качестве которой можно взять разбиение отрезка пропорционально хордам $h_i = |x_{i+1} - x_i|$ с величинами допустимых отклонений $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i^2 = \varepsilon_i^2 - \varepsilon_i \sqrt{3}$. Очевидно, что результирующий P -сплайн будет удовлетворять условиям $|\bar{P}(x_i) - Y_i| \leq \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n}$.

3.3. Перейдем к задаче аппроксимации поверхностей. Пусть $\{\bar{E}_i\}$, $i=1,2$, - множество точек, исходной поверхности, которые, вообще говоря, не являются узлами какого-либо каркаса, $\bar{P}_0(u)$, $\bar{P}_1(u)$, $\bar{P}_0(v)$, $\bar{P}_1(v)$, $u \in [0,1]$, $v \in [0,1]$ - заданные P -сплайны, описывающие граничные дуги поверхности, для которых справедливо

$$\bar{P}_i(u)|_{u=j} = \bar{P}_j(v)|_{v=i} = \bar{P}_{ij}, \quad i, j = 0, 1.$$

Будем аппроксимировать исходную поверхность с помощью бикубического параметрического сплайна Кунса, уравнение которого имеет вид: $\bar{K}(u, v) = FG(u) \cdot \bar{A} \cdot FG(v)^T + FG(u) \bar{P}(v) + FG(v) \bar{P}(u)$, где $u, v \in [0,1]$, $FG(t) = [f_0(t), f_1(t), g_2(t), g_3(t), f_4(t), f_5(t)]$, $f_0, f_1, g_2, g_3, f_4, f_5$ - функции, введенные в п. 2.3. Клеточно-диагональная матрица $\bar{A}$ имеет вид:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{P} & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \bar{P} = \begin{pmatrix} \bar{P}_{00} & \bar{P}_{01} \\ \bar{P}_{10} & \bar{P}_{11} \end{pmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 & \bar{q}_2 & \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 & \bar{q}_5 & \bar{q}_6 \\ \bar{q}_7 & \bar{q}_8 & \bar{q}_9 \end{pmatrix}$$

Здесь $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_9$ - варьируемые параметры, имеющие смысл смешанных производных. Их значения определяются из условий минимума функционала $I = \sum_{i=1}^9 \alpha_i \rho_i^2$, где $\alpha_i \geq 0$ - весовые коэффициенты, $\rho_i = \min_{u \in [0,1], v \in [0,1]} |\bar{K}(u, v) - \bar{E}_i|$ - функция расстояния от точки с номером i до поверхности.

Для отыскания решения строится процесс, аналогичный описанному в п. 3.1, при этом начальное приближение берется в виде $\bar{P}_i^0 = 0$, $i=1, \bar{P}$.

Следует отметить, что описываемый подход, вообще говоря, не позволяет решить задачу построения гладкой поверхности, проходящей в заданной окрестности исходных точек, поскольку число варьируемых параметров ограничено. Одной из особенностей подхода является то, что задание граничных дуг означает одновременно и задание направления нормали в угловых точках, вектор которой вычисляется по формуле $\bar{N} = [\bar{P}_j'(u)|_{u=i}, \bar{P}_i'(v)|_{v=j}]$, $i, j = 0, 1$.

В заключение рассмотрим вопрос о выборе параметризации. Пусть $\{\bar{E}_i\}$, $i = \overline{1, n}$, упорядоченная последовательность точек на дуге. Рассмотрим множество ее параметризаций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Для каждой из них заданным точкам соответствует сетка $\Delta_j: \{0 = t_1^j < t_2^j < \dots < t_n^j = 1\}$. С другой стороны, для любых значений $\{t_i^e\}$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих условию $0 = t_1^e < t_2^e < \dots < t_n^e = 1$, существует такая параметризация $\bar{R} = \bar{R}(t)$, $t \in [0, 1]$ дуги, что $\bar{R}(t_i^e) = \bar{E}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Поскольку приближение кривой сплайнами рассматривается как приближение ее параметризации, то заданному разбиению дуги соответствует множество ρ -сплайнов $\{\bar{\rho}(\Delta_j, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \dots, \bar{E}_n)\}$, зависящих от $(n-2)$ параметров, которыми являются узлы сетки Δ_j . Ими можно воспользоваться для обеспечения требуемых свойств приближения. Примером этого могут служить методы аппроксимации кривых и поверхностей (см. пп. 3.1 и 3.3), когда за счет вариации узлов сетки достигается лучшее приближение.

Рассмотрим один из способов выбора узлов сетки Δ для эрмитовой интерполяции кривой. Пусть $\{\bar{E}_i, \bar{H}_i\}$ - точки и орты касательного вектора дуги. Определим интерполяционный ρ -сплайн, минимизирующий функционал

$$F(\Delta) = \int_0^1 |\bar{\rho}''|^2 dt = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\bar{\rho}''|^2 dt$$

Для каждого интеграла суммы сделаем замену переменной $u = \frac{t - t_i}{\Delta t_i}$

В результате выражение для F примет вид:

$$F(\Delta t_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^1 |\bar{\rho}_i''(u, \Delta t_i)|^2 du,$$

где $\bar{\rho}_i(u, \Delta t_i)$ есть i -е звено ρ -сплайна, записанное относительно локальной переменной u ,

$$\bar{\rho}_i(u, \Delta t_i) = (F_1(u), F_2(u), G_1(u), G_2(u)) \times (\bar{E}_i, \bar{E}_{i+1}, \Delta t_i \bar{H}_i, \Delta t_{i+1} \bar{H}_{i+1})^T.$$

Из условия минимума этого функционала находим выражение для размера интервала $\Delta t_i = 3(\bar{H}_i + \bar{H}_{i+1}, \bar{H}_i) / [4 + 2(\bar{H}_i, \bar{H}_{i+1})]$.

Можно рассмотреть также задачу о выборе параметризации объекта с точки зрения наилучшего его приближения ρ -сплайном.

Л и т е р а т у р а

1. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Кубическая сплайн-интерполяция как средство приближения пространственных кривых. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с. 36-45.
2. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980, - 352 с.
3. ПАВЛОВ Н.Н., СКОРОСПЕЛОВ В.А. Аппроксимация поверхностей лопасти гидротурбины. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 72). Новосибирск, 1977, с. 56-64.
4. ПАВЛОВ Н.Н. К вопросу об аппроксимации пространственных кривых кубическими параметрическими сплайнами. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 75). Новосибирск, 1978, с. 45-49.
5. ЛОРАН П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.: Мир, 1975. - 496 с.
6. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Интерполяция плоских кривых. - В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 68). Новосибирск, 1976, с. 33-44.

Поступила в ред.-изд.отд.

7 мая 1981 года