

УДК 681.3.06:519.65

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ АВТОМАТИЗАЦИИ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Г.В. Вайсберг, В.А. Скороспелов, П.А. Турук

В статье приводятся алгоритмы численного решения некоторых геометрических задач, в которых в качестве операндов участвуют кривые и поверхности. Они реализованы в виде стандартных модулей, используемых при генерации проблемных программ. Задача о пересечении геометрических объектов ставится в виде частного случая задачи об определении расстояния между точечными множествами в метрическом пространстве. Последняя состоит в минимизации положительной функции одной и многих переменных в замкнутой области. Такой подход представляется наиболее перспективным.

В дальнейшем используется векторная форма представления величин и уравнений. Выражения $(\vec{A}, \vec{B})$, $[\vec{A}, \vec{B}]$, $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$, $|\vec{A}|$, $\langle \vec{A} \rangle$ обозначают скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, модуль вектора и операцию нормирования вектора соответственно. Предполагается, что геометрические объекты представлены в стандартной форме [1]. Напомним, что дуга кривой описывается P -сплайном по значениям $(\vec{r}_i, \vec{r}'_i, s_i)$, $i = \overline{1, n}$. Его i -е звено относительно локального параметра $t \in [0, 1]$ в матричной форме имеет вид

$$\vec{P}^{(i)}(t) = (F_1(t), F_2(t), G_1(t), G_2(t)) \times (\vec{r}_i, \vec{r}'_{i+1}, \Delta s_i \vec{r}'_i, \Delta s_i \vec{r}'_{i+1})^T,$$

где $F_1(t) = (4-t)^2(2t+1)$, $F_2(t) = t^2(3-2t)$, $G_1(t) = t(1-t)^2$, $G_2(t) = t^2(1-t)$, $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$.

Для удобства вычислений введем на дуге параметр T , значения которого в заданных точках равно их порядковому номеру. Произвольному значению T^* соответствует точка на участке с номером $k = [T^*]$ ($[A]$ — целая часть A), имеющая значение локального параметра $t^* = T^* - [T^*]$.

Сегмент поверхности представляется в виде РР-сплайна, определенного по значениям $\{\bar{r}_{ij}, \bar{r}_{ij}^{(1,0)}, \bar{r}_{ij}^{(0,1)}, \bar{r}_{ij}^{(1,1)}, t_i, s_j\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, или в виде К-сплайна, определенного по значениям $\{\bar{r}_{ii}, \bar{r}_{ii}^{(1,0)}, \bar{r}_{ii}^{(0,1)}, t_i, s_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

На поверхности введем параметры U, V так, что для узла $\bar{r}_{ij}$ их значения - $U_i = i$, $V_j = j$. Тогда произвольным U^*, V^* соответствует точка, расположенная на клетке с индексами $k = [U^*]$, $l = [V^*]$ и имеющая значения локальных параметров $u^* = U^* - [U^*]$, $v^* = V^* - [V^*]$.

Введение таких параметров избавляет от поиска нужной клетки (участка).

Задачи с одним параметром

1. Минимизация функции одной переменной. Пусть $\Phi(T)$, $T \in [\alpha, \beta]$ - положительная функция, принадлежащая классу C^2 . Требуется:

а) определить одну из точек локального минимума $\Phi(T)$, если известно ее приближение T^* ;

б) найти точку наименьшего значения $\Phi(T)$;

в) найти все нулевые минимумы $\Phi(T)$.

Для определения локального минимума применена модификация метода Ньютона. Строится последовательность $\{T_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, где $T_1 = T^*$, $T_{i+1} = T_i + \delta_i \Delta T_i$. Шаг ΔT_i и ограничивающий множитель δ_i определяются следующим образом:

$$D_i = \begin{cases} -\Phi'(T_i)/\Phi''(T_i) & \text{при } \Phi''(T_i) \geq \varepsilon; \\ \text{sign } \Phi'(T_i) |\Delta T_{i-1}| & \text{при } \Phi''(T_i) < \varepsilon; \end{cases}$$

$$\ell_i = \begin{cases} D_i & \text{при } |D_i| \leq |\Delta T_{i-1}|; \\ \text{sign } D_i |\Delta T_{i-1}| & \text{при } |D_i| > |\Delta T_{i-1}|; \end{cases}$$

$$\Delta T_i = \begin{cases} \ell_i & \text{при } T_i + \ell_i \in [T_n, T_K]; \\ T_n - T_i & \text{при } T_i + \ell_i < T_n; \\ T_i - T_K & \text{при } T_i + \ell_i > T_K; \end{cases}$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta T_i \cdot \Delta T_{i-1} > 0 \quad \text{или} \quad |\Delta T_i| < |\Delta T_{i-1}|; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Величина $\rho = |\Delta T_i|$ входит в число параметров алгоритма и определяет его "разрешающую способность". Ее значение не должно превосходить минимального расстояния между соседними точками минимума и максимума функции $\Phi(T)$.

Итерационный процесс заканчивается, как только выполнится дополнительное условие выхода или очередной шаг станет меньше допустимой величины, определяемой погрешностью вычислений. Сходимость процесса обеспечивается тем, что $|\Delta T_i| < |\Delta T_{i-1}|$, причем $|\Delta T_i| < |\Delta T_{i-1}|$, если $\Delta T_i \cdot \Delta T_{i-1} < 0$. Пусть T_{min} — точка минимума $\Phi(T)$. Если $T^* \in [T_{min} - \rho, T_{min} + \rho]$, итерационный процесс сойдется к точке T_{min} .

Отметим, что метод применим для непрерывных функций с ограниченными первой и второй производными. Его сходимость обеспечена и в случае, когда минимум $\Phi(T)$ есть стационарная точка кратности больше единицы.

Для определения наименьшего значения $\Phi(T)$ предлагается следующий алгоритм. По заданному ρ вычисляется величина шага $\Delta T = (b-a)/n$, где $n = [(b-a)/\rho] + 1$. Затем отыскиваются точки минимума функции $\Phi(T)$ $\{T_\ell\}$, $\ell \in \{2, 3, \dots, n\}$, на множестве точек $T_i = a + (i-1)\Delta T$, $i = \overline{2, n}$ по условиям: $\Phi(T_\ell) - \Phi(T_{\ell-1}) \leq 0$, $\Phi(T_{\ell+1}) - \Phi(T_\ell) \geq 0$. К ним добавляются точки $T_1 = a$ и $T_{n+1} = b$. Для каждого T_ℓ определяется $\Phi(\tilde{T}_\ell) = \min_{T \in [T_\ell, T_{\ell+1}]} \Phi(T)$ с начальным приближением

$T^* = T_\ell$. В качестве решения принимается точка $\tilde{T}$, для которой $\Phi(\tilde{T}) = \min_{\ell} \Phi(\tilde{T}_\ell)$.

Отличие алгоритма определения нулевых минимумов функции $\Phi(T)$ от предыдущего состоит только в том, что из множества $\{\Phi(\tilde{T}_\ell)\}$ выбирается в качестве решения только те, для которых $\Phi(\tilde{T}_\ell) < \varepsilon$.

2. 0 п р е д е л е н и е т о ч к и. Рассмотрим несколько задач об определении точки на кривой. Их решение состоит в вычислении корней соответствующего уравнения на некотором интервале изменения параметра. Возможны варианты: ищется один корень и известно его приближение, ищутся все корни. Для каждой задачи формулируется эквивалентная ей задача о минимизации положительной функции, алгоритм решения которой рассмотрен в п. 1.

Расстояние от точки $\tilde{T}_0$ до кривой $\tilde{T} = P(T)$, $T \in [T_n, T_k]$ есть наименьшее значение функции $\Phi(T) = |P(T) - \tilde{T}_0|$ на отрезке $[T_n, T_k]$.

Если ε - допустимая абсолютная погрешность в определении расстояния, то условие выхода определяется формулой: $|\langle \vec{P}(T) - \vec{r}_0, \vec{P}'(T) \rangle| \leq \varepsilon |\vec{P}'(T)|$.

Перпендикуляр из точки $\vec{r}_0$ на кривую $\vec{r} = \vec{P}(T)$ лежит в плоскости, нормальной к кривой в точке $\vec{P}(T)$. Эта точка является точкой нулевого минимума функции $\Phi(T) = \langle \vec{P}(T) - \vec{r}_0, \vec{P}'(T) \rangle^2$, $T \in [T_H, T_K]$. Условие выхода: $|\langle \vec{P}(T) - \vec{r}_0, \vec{P}'(T) \rangle| \leq \varepsilon |\vec{P}'(T)|$.

Пересечение кривой $\vec{r} = \vec{P}(T)$ с прямой, проходящей через точку $\vec{r}_0$ в направлении орта $\vec{H}_0$, есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(T) = \langle \vec{P}(T) - \vec{r}_0, \vec{H}_0 \rangle^2$, $T \in [T_H, T_K]$. Условие выхода: $\Phi(T) \leq \varepsilon^2$.

Пересечение кривой и плоскости, проходящей через точку $\vec{r}_0$ нормально орту $\vec{N}_0$, есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(T) = \langle \vec{P}(T) - \vec{r}_0, \vec{N}_0 \rangle^2$, $T \in [T_H, T_K]$. Условие выхода: $\Phi(T) \leq \varepsilon^2$.

Пересечение кривой и сферы радиуса R с центром в точке $\vec{r}_0$ есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(T) = (\langle \vec{P}(T) - \vec{r}_0 \rangle^2 - R^2)^2$, $T \in [T_H, T_K]$. Условие выхода: $\Phi(T) \leq \varepsilon^2$.

Пересечение кривой с поверхностью кругового цилиндра радиуса R с осью $\{\vec{r}_0, \vec{H}_0\}$ есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(T) = (\langle \vec{P}(T) - \vec{r}_0, \vec{H}_0 \rangle^2 - R^2)^2$, $T \in [T_H, T_K]$. Условие выхода: $\Phi(T) \leq \varepsilon^2$.

3. Л и н е й н а я и н т е р п о л я ц и я д у г и к р и в о й с з а д а н н о й т о ч н о с т ь ю. Пусть $\vec{r} = \vec{P}(T)$, $T \in [a, b]$, - уравнение дуги кривой в виде P -сплайна. Требуется на отрезке $[a, b]$ построить сетку $a = T_1 < T_2 < \dots < T_\ell = b$ так, чтобы ломаная, соединяющая точки $\vec{P}(T_1), \vec{P}(T_2), \dots, \vec{P}(T_\ell)$, приближала дугу кривой с погрешностью, не превышающей наперед заданного значения ε .

Рассмотрим звено P -сплайна с номером i . Уравнение хорды, соединяющей две его точки $\vec{r}_0 = \vec{P}(T^*)$ и $\vec{r}_1 = \vec{P}(T^* + \ell)$, $\ell > 0$, $T^*, T^* + \ell \in [i, i+1]$, можно записать в виде

$$\vec{h}(T) = \vec{r}_0 \frac{\ell - \Delta T}{\ell} + \vec{r}_1 \frac{\Delta T}{\ell}, \quad (I)$$

где $\Delta T = T - T^*$, $T \in [T^*, T^* + \ell]$.

Оценим величину отклонения точек хорды от кривой:

$$|\vec{R}| = |\vec{h}(T) - \vec{P}(T)|. \quad (2)$$

Поскольку $\vec{P}(T)$ на рассматриваемом отрезке есть кубический полином относительно параметра T , $\vec{r}_0$ и $\vec{r}_1$ можно представить в виде:

$$\bar{\tau}_0 = \bar{P}(\tau) - \bar{P}'(\tau)\Delta\tau + \frac{1}{2}\bar{P}''(\tau)\Delta\tau^2 - \frac{1}{6}\bar{P}'''(\tau)\Delta\tau^3,$$

$$\bar{\tau}_1 = \bar{P}(\tau) + \bar{P}'(\tau)(\ell - \Delta\tau) + \frac{1}{2}\bar{P}''(\tau)(\ell - \Delta\tau)^2 + \frac{1}{6}\bar{P}'''(\tau)(\ell - \Delta\tau)^3.$$

Подставляя эти выражения в (1), а результат в (2), получим:

$$|\bar{R}| = \frac{1}{2\ell}(\ell - \Delta\tau)\Delta\tau|\bar{P}''(\tau)\ell + \frac{1}{3}\bar{P}'''(\tau)((\ell - \Delta\tau)^2 - \Delta\tau^2)|.$$

Так как $\bar{P}''(\tau) = \bar{P}''(\tau^*) + \bar{P}'''(\tau)\Delta\tau$ и $\bar{P}'''(\tau) = \bar{P}'''(\tau^*)$, то:

$$\begin{aligned} |\bar{R}| &= \left| \frac{1}{2}(\ell - \Delta\tau)\Delta\tau\bar{P}''(\tau^*) + \frac{1}{6}(\ell^2 - \Delta\tau^2)\Delta\tau\bar{P}'''(\tau^*) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\ell - \Delta\tau)\Delta\tau|\bar{P}''(\tau^*)| + \frac{1}{6}(\ell - \Delta\tau)\Delta\tau(\ell - 2\Delta\tau)|\bar{P}'''(\tau^*)|. \end{aligned}$$

Поскольку $\max_{\Delta\tau \in [0, \ell]} (\ell - \Delta\tau)\Delta\tau = \frac{1}{4}\ell^2$ и $\max_{\Delta\tau \in [0, \ell]} (\ell - \Delta\tau)(\ell - 2\Delta\tau)\Delta\tau = \frac{\sqrt{3}}{18}\ell^3$,

окончательно для $|\bar{R}|$ получаем оценку:

$$|\bar{R}| \leq \frac{1}{8}\ell^3|\bar{P}''(\tau^*)| + \frac{\sqrt{3}}{108}\ell^3|\bar{P}'''(\tau^*)|.$$

Потребуем, чтобы выражение справа равнялось ε . Получаем кубическое уравнение относительно ℓ , т.е. относительно допустимого расстояния между точками $\bar{\tau}_0$ и $\bar{\tau}_1$ по параметру. Нетрудно убедиться, что это уравнение имеет единственный положительный корень. Если он не принадлежит отрезку $[0, i+1 - T^*]$, который соответствует области непрерывности $\bar{P}''(\tau)$ и $\bar{P}'''(\tau)$, принимаем $\ell = i+1 - T^*$.

Окончательно алгоритм выбора узлов линейной интерполяции дуги кривой состоит в следующем. Полагаем $T_1 = \alpha$. Вычисляем $\bar{P}''(T_1)$, $\bar{P}'''(T_1)$. По этим значениям определяем ℓ_1 и $T_2 = T_1 + \ell_1$. Далее для T_2 находим ℓ_2 и т.д. Процесс заканчивается, как только получаем $T_L = \beta$.

Задачи с многими параметрами

1. Минимизация функции нескольких переменных. Пусть $q = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ - вектор переменных и $\Phi(q)$, $q \in \Omega : \{a_k \leq x_k \leq b_k\}$, $k = \overline{1, m}$, - положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Требуется:

а) определить точку одного из локальных минимумов $\Phi(q)$ в области Ω , если известно ее приближение q^* ;

б) определить точку наименьшего значения $\Phi(q)$;

в) найти точки нулевого минимума $\Phi(q)$.

Введем обозначения:

$$\nabla \Phi_i = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi|_{q^{(i)}}, k=1, m \right\}, \quad \nabla^2 \Phi_i = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_\ell} \Phi|_{q^{(i)}}, k, \ell=1, m \right\}.$$

Для определения локального минимума $\Phi(q)$ применен модифицированный метод Ньютона [2], согласно которому строится последовательность $q^{(i)} = q^*$, $q^{(i+1)} = q^{(i)} + \delta_i \Delta q^{(i)}$, $\|\Delta q^{(i)}\|_c = 1$ ($i = 2, 3, \dots$). Направление шага $\Delta q^{(i)}$ выбирается удовлетворяющим одному из следующих условий: а) если собственные числа матрицы $\nabla^2 \Phi_i$ положительны, то $\nabla^2 \Phi_i \Delta q^{(i)} = -\nabla \Phi_i$; б) если собственные числа матрицы $\nabla^2 \Phi_i$ неотрицательны и хотя бы одно из них равно нулю, то $\nabla^2 \Phi_i \Delta q^{(i)} = 0$, $(\Delta q^{(i)})^T \nabla \Phi_i \leq 0$; в) если матрица $\nabla^2 \Phi_i$ имеет отрицательные собственные числа, то $(\Delta q^{(i)})^T \nabla^2 \Phi_i \Delta q^{(i)} < 0$, $\Delta q^{(i)} \nabla \Phi_i \leq 0$. Если удовлетворить этим условиям не удастся, то принимается $\Delta q^{(i)} = \Delta q^{(i-1)}$. Полученное направление модифицируется с учетом границ области Ω : $\Delta x_k^{(i)} = 0$, если $x_k^{(i)} = a_k$, $\Delta x_k^{(i)} (b_k - a_k) < 0$ или $x_k^{(i)} = b_k$, $\Delta x_k^{(i)} (a_k - b_k) < 0$. Результирующее направление должно удовлетворять условию $\Delta q^{(i)} \nabla \Phi_i \leq 0$.

Величина шага δ_i в направлении $\Delta q^{(i)}$ вычисляется по правилам:

$$d_i = \begin{cases} -\Delta q^{(i)} \nabla \Phi_i / (\Delta q^{(i)})^T \nabla^2 \Phi_i \Delta q^{(i)}, & \text{если знаменатель больше } \varepsilon > 0; \\ \delta_{i-1}, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\ell_i = \begin{cases} d_i, & \text{если } d_i < \delta_{i-1}; \\ \delta_{i-1}, & \text{если } d_i \geq \delta_{i-1} \text{ и } \Delta q^{(i)} (\Delta q^{(i-1)})^T \geq 0; \\ 0,7 \delta_{i-1}, & \text{если } d_i \geq \delta_{i-1} \text{ и } \Delta q^{(i)} (\Delta q^{(i-1)})^T < 0, \end{cases}$$

$$\delta_i = c_i \ell_i.$$

Константа $0 \leq c_i \leq 1$ выбирается максимально возможной и такой, чтобы $q^{(i)} + c_i \Delta q^{(i)} \in \Omega$.

Величина $\rho = \delta_1$ является параметром алгоритма и имеет тот же смысл, что и при минимизации функции одной переменной.

Итерационный процесс заканчивается, как только выполняется условие выхода, которое задается дополнительно, или если величина ℓ_i становится меньше допустимой. Заметим, что метод применим для непрерывных функций с ограниченными первой и второй производными.

Для решения задач "б" и "в" использован следующий прием. Выбирается множество точек $\{q^j\}$, $j = 1, n$, равномерно расположенных в области Ω . Принимая каждую из них в качестве начального приближения, осуществляют поиск локального минимума $\Phi(q)$, задавшись достаточно грубым условием выхода. Из полученных точек минимума $\Phi(q)$ рассматриваются более строго только те, которые находятся на расстоянии $\geq \rho$ друг от друга. Обычно число возможных решений задачи известно. Значение n выбирается достаточно большим, но поиск прекращается, как только будет обнаружено заданное число различных решений.

2. О п р е д е л е н и е т о ч к и. Рассмотрим несколько задач об определении точки (или сводящихся к определению точки). Для каждой из них формулируется эквивалентная задача о минимизации некоторой положительной функции Φ и приводится условие выхода.

Пересечение двух кривых $\vec{r} = \vec{r}_1(\tau)$, $\tau \in [T_n, T_k]$ и $\vec{r} = \vec{r}_2(s)$, $s \in [S_n, S_k]$, есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(\tau, s) = (\vec{r}_1(\tau) - \vec{r}_2(s))^2$ в прямоугольной области $\Omega = [T_n, T_k] \times [S_n, S_k]$. Условие выхода: $\Phi \leq \varepsilon^2$, где ε - допустимая абсолютная погрешность в определении точки пересечения.

Расстояние от точки $\vec{r}_0$ до поверхности $\vec{r} = \vec{r}(U, V)$, $U, V \in \Omega = [U_n, U_k] \times [V_n, V_k]$, есть корень квадратный из наименьшего значения функции $\Phi(U, V) = (\vec{r}(U, V) - \vec{r}_0)^2$ в области Ω . Условие выхода при локальной минимизации этой функции: $|\vec{r}(U, V) - \vec{r}_0, \vec{N}| \leq \varepsilon |\vec{N}|$, где $\vec{N} = [\vec{r}_U, \vec{r}_V]$ - нормаль поверхности, $\vec{r}_U = \frac{\partial}{\partial U} \vec{r}(U, V)$.

Перпендикуляр из точки $\vec{r}_0$ на поверхность $\vec{r} = \vec{r}(U, V)$ есть нормаль поверхности в точке (U^*, V^*) , проходящая через $\vec{r}_0$. Такими точками являются точки нулевых минимумов функции $\Phi(U, V) = [\vec{r}(U, V) - \vec{r}_0, \vec{N}(U, V)]^2$. Условие выхода: $\Phi \leq \varepsilon^2 |\vec{N}|^2$.

Пересечение поверхности $\vec{r} = \vec{r}(U, V)$, $U, V \in \Omega$, и прямой, проходящей через точку $\vec{r}_0$ в направлении орта $\vec{H}_0$, есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(U, V) = [\vec{r}(U, V) - \vec{r}_0, \vec{H}_0]^2$ в области Ω . Условие выхода: $\Phi \leq \varepsilon^2$.

Пересечение поверхности $\tilde{z} = \bar{P}\bar{P}(U, V)$ и окружности радиуса R с центром в точке $\tilde{z}_0$ и лежащей в плоскости с нормалью $\tilde{N}_0$, есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(U, V) = (\Delta\tilde{z}, \tilde{N}_0)^2 + ((\Delta\tilde{z})^2 - R^2)^2$, где $\Delta\tilde{z} = \bar{P}\bar{P}(U, V) - \tilde{z}_0$. Условие выхода: $\Phi \leq \varepsilon^2$.

Пересечение поверхности и дуги кривой есть точки нулевых минимумов функции $\Phi(T, U, V) = (\bar{P}\bar{P}(U, V) - \bar{P}(T))^2$ в области $\mathcal{M}: \{T_n \leq T \leq T_n, U_n \leq U \leq U_n, V_n \leq V \leq V_n\}$. Условие выхода: $\Phi \leq \varepsilon^2$.

Пересечение кривой $\tilde{z} = \bar{P}_1(T)$, $T \in [T_n, T_n]$, и поверхности вращения, которая задана осью вращения $\{\tilde{z}_0, \tilde{N}_0\}$ и образующей в виде P -сплайна $\tilde{z} = \bar{P}_2(S)$, $S \in [S_n, S_n]$, есть точки нулевых минимумов функции:

$$\Phi(T, S, \varphi) = (\bar{G} \sin \varphi + [\bar{G}, \tilde{N}_0] \cos \varphi + (\bar{P}_2(S) - \tilde{z}_0, \tilde{N}_0) \tilde{N}_0 + \tilde{z}_0 - \bar{P}_1(T))^2,$$

где $\bar{G} = [\bar{P}_2(S) - \tilde{z}_0, \tilde{N}_0]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Условие выхода: $\Phi \leq \varepsilon^2$.

3. О п р е д е л е н и е д у г и к р и в о й. Задача определения дуги кривой как пересечения поверхностей $\tilde{z} = \tilde{z}_1(U, V)$, $U, V \in \Omega_1$ и $\tilde{z} = \tilde{z}_2(T, S)$, $T, S \in \Omega_2$ состоит в расчете некоторой последовательности ее точек $\{\tilde{z}_i\}$, $i = \overline{1, n}$, по которым она приближается P -сплайном. Рассмотрим основные моменты алгоритма решения задачи: поиск начальной точки, выбор шага и определение следующей точки.

Поиск начальной точки $\tilde{z}_1$ начинается на границе одной из поверхностей: ищется точка пересечения ее крайних дуг с другой поверхностью. В случае отрицательного результата поступаем следующим образом. Определяется любая точка нулевого минимума функции расстояния $\Phi(U, V, T, S) = (\tilde{z}_1(U, V) - \tilde{z}_2(T, S))^2$. Область параметров одной из поверхностей делим на две части так, чтобы их общая граница проходила через эту точку. Таким образом, приходим к задаче определения пересечения одной поверхности с двумя сегментами другой, для которых известна начальная точка, расположенная на границе. Последняя операция, связанная с начальной точкой, — ориентация поверхностей так, чтобы касательный вектор к искомой кривой $\tilde{N}_1 = [\tilde{N}_1^{(1)}, \tilde{N}_1^{(2)}]$ ($\tilde{N}_1^{(1)}, \tilde{N}_1^{(2)}$ — нормали поверхностей в точке $\tilde{z}_1$) был направлен внутрь пересекаемых сегментов.

Величина шага между соседними точками должна обеспечивать восстановление искомой дуги с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Отметим, что описанная ниже процедура, выбора шага, вообще говоря, не является строгой. Поступаем следующим образом. Пусть $\tilde{z}_i$ и $\tilde{N}_i$ — очередная точка дуги и орт ее касательного вектора. Подсчитаем кри-

визну дуги в этой точке: $K_i = kn(\vec{H}_i) / \sin \alpha_i$, где $kn(\vec{H}_i)$ - нормальная кривизна одной из поверхностей в направлении $\vec{H}_i$, α_i - угол между векторами $\vec{N}_i^{(1)}$ и $\vec{N}_i^{(2)}$. На основании оценки погрешности приближения кривой Р-сплайном допустимый шаг по длине дуги равен $\Delta S_i = 4 \sqrt{\epsilon n K(S)}$. Примем $\|K(S)\| = K_i$. Представим вектор $\Delta S_i \vec{H}_i$ в виде:

$$\Delta S_i \vec{H}_i = \Delta U_i \vec{\tau}_1^{(u,v)}(U_i, V_i) + \Delta V_i \vec{\tau}_2^{(u,v)}(U_i, V_i),$$

$$\Delta S_i \vec{H}_i = \Delta T_i \vec{\tau}_2^{(t,s)}(T_i, S_i) + \Delta S_i \vec{\tau}_2^{(t,s)}(T_i, S_i),$$

где $\vec{\tau}^{(u,v)}(U, V) = \frac{\partial^{u,v}}{\partial U^u \partial V^v} \vec{r}(U, V)$ и зададим точку в области пара-

метров $\Omega_1 \times \Omega_2$: $\mu = (U_i + c \Delta U_i, V_i + c \Delta V_i, T_i + c \Delta T_i, S_i + \Delta S_i)$, где $0 < c \leq 1$ - коэффициент, который выбирается максимально возможным; $\vec{\tau}_{i+1}$ определится как точка, соответствующая нулевому минимуму функции $\Phi(U, V, T, S)$ в окрестности μ . Пусть $\Delta \tilde{S}_i$ длина дуги восстанавливающего Р-сплайна на участке $(\vec{\tau}_i, \vec{\tau}_{i+1})$. Ее нетрудно подсчитать приближенно. Если $\Delta S_i < \Delta \tilde{S}_i$, то ΔS_i умножаем на величину $\Delta S_i / \Delta \tilde{S}_i$ и снова определяем $\vec{\tau}_{i+1}$, после чего переходим к вычислению шага ΔS_{i+1} . Как только точка $\vec{\tau}_n$ окажется на границе одной из поверхностей, считается, что дуга определена.

Пересечение поверхности $\vec{r} = \vec{r}\vec{p}(U, V)$, $U, V \in \Omega$ и сферы радиуса R с центром в точке $\vec{r}_0$. Функция расстояния: $\Phi(U, V) = (r\vec{p}(U, V) - \vec{r}_0)^2$. Направление касательного вектора и кривизна искомой кривой в точке $\vec{\tau}_i$ подсчитываются по формулам: $\vec{H}_i = [\vec{\tau}_i - \vec{r}_0, \vec{N}_i]$, $K_i = (R \sin \alpha_i)^{-1}$.

Пересечение поверхности и кругового цилиндра. Данные, задающие цилиндр в пространстве - $\{\vec{r}_0, \vec{H}_0, R\}$. Функция расстояния: $\Phi(U, V) = ([\vec{r}\vec{p}(U, V) - \vec{r}_0, \vec{H}_0]^2 - R^2)^2$. Касательный вектор и значение кривизны в точке $\vec{\tau}_i$ искомой кривой: $\vec{H}_i = [[[\vec{\tau}_i - \vec{r}_0, \vec{H}_0], \vec{H}_0], \vec{H}_0]$.

$K_i = (R \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i})^{-1}$, где $0 < \beta_i < \frac{\pi}{2}$ - угол между векторами $\vec{H}_0$ и $\vec{H}_i$.

Пересечение поверхности с поверхностью вращения общего вида. Данные, описывающие поверхность вращения, приведены в задаче о пересечении кривой и поверхности вращения, рассмотренной в п.2. Функция расстояния: $\Phi(U, V, S, T) = (\vec{G} \sin \varphi + [\vec{G}, \vec{H}_0] \cos \varphi + (\vec{r}(S) - \vec{r}_0, \vec{H}_0) \vec{H}_0 + \vec{r}_0 - \vec{r}\vec{p}(U, V))^2$, где $\vec{G} = [\vec{r}(S) - \vec{r}_0, \vec{H}_0]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно реализации приведенных выше алгоритмов. Отметим прежде всего, что применение сплайнов для представления кривых и поверхностей предполагает хранение и обработку большого объема информации. Поэтому при разработке вычислительных алгоритмов исходили из того, что информация об объекте заведомо не может быть размещена в оперативной памяти ЭВМ. Ее обработка ведется по частям. Развитое программное обеспечение управления данными в системе устранило неудобства, связанные с этим.

Модули, реализующие рассмотренные алгоритмы, разделены на два уровня. На первом уровне ищется приближение корня и его допустимый интервал. Модули второго уровня ищут решение, начиная с этого приближения. Такой подход вполне оправдан, поскольку приближение корня часто бывает известно по ходу основного алгоритма.

Модуль вычисления точек на поверхности на самом деле реализует вычисление точек на любой ее эквидистанте $\tilde{z} = \bar{p}p(u,v) + d\tilde{n}(u,v)$. Самой поверхности соответствует значение $d=0$. Этим обеспечивается решение рассмотренных задач для целого семейства поверхностей, эквидистантных заданной.

Модули, реализующие операции векторной алгебры, обеспечивают компактную запись алгоритмов на входном языке и существенно сокращают объем программ.

Л и т е р а т у р а

1. СКОРОСПЕЛОВ В.А. Система автоматизации геометрических расчетов и опыт ее использования. - Настоящий сборник, с. 25-43.
2. ФИАНКО А., МАК-КОРМИК Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. - М.: Мир, 1972. - 240 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
29 апреля 1981 года