

УДК 519.176:621.9

ОПТИМИЗАЦИЯ ТРАЕКТОРИИ ФРЕЗЕРОВАНИЯ СЛОЖНОЙ ОБЛАСТИ

В.А. Леус

Обработка детали сложной формы на программно-управляемом станке может занимать несколько рабочих смен. Только часть этого времени является собственно рабочим временем, когда фреза режет металл. Остальное тратится на вспомогательные операции и на холостые ходы, т.е. перемещения инструмента в воздухе. При фиксированных параметрах резания эффективность тем выше, чем больше доля собственно рабочего времени, и, значит, желательно сократить холостые ходы. В случае обработки неодносвязных областей с криволинейными границами решение задачи выбора рациональной траектории далеко не всегда возможно на интуитивном уровне. Здесь обсуждается алгоритмический поиск рациональной траектории.

1. Постановка задачи и подход к решению

Требуется цилиндрической фрезой в плоской заготовке выфрезеровать полость (рис. 1), которая имеет постоянную глубину и в проекции на плоскость (X, Y) дает неодносвязную область с криволинейной границей. В примере на рис. 1 граница области состоит из одного наружного и двух внутренних контуров. Предполагается, что технические ограничения требуют выполнить одно врезание, выборку крупнозубой фрезой объема полости с припуском Δ

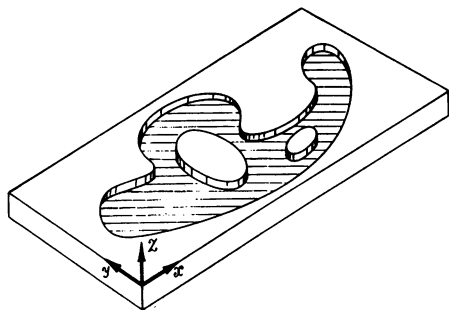


Рис. 1

($0 < \alpha \leq \Delta \leq \beta$) по контуру, и, наконец, мелкозубой фрезой произвести чистовое оконтуривание. Вычислительные условия состоят в задании контуров границы конечным числом точек, достаточным для обеспечения погрешности сплайн-интерполяции в пределах заданной величины ε . Предполагается, что $\varepsilon \leq \alpha$.

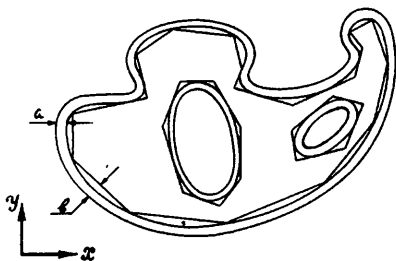


Рис. 2

С помощью сплайн-интерполяции легко строится эквидистанта к точечно заданной кривой. В нашем случае таким образом строится граница α -эквидистантной области, лежащей внутри заданной. Затем в α -эквидистантную область вписывается многоугольная область таким образом, что каждая замкнутая ломаная ее границы лежит в $(\beta - \alpha)$ -окрестности α -эквидистантной области (рис. 2). Эта задача решается на основании учета кривизны граничных контуров α -эквидистантной области. Полученная неодносвязная многоугольная область аппроксимирует исходную в том смысле, что их граничные контуры лежат в пересечении своих β -окрестностей.

Очередным этапом является подразделение полученной многоугольной области на элементарные фигуры. Для этого из каждой вершины ломаных ее границы внутрь области параллельно фиксированному направлению проводятся прямые до первой встречи с каким-либо участком границы. В результате получается разбиение многоугольной области на трапеции, которые нумеруются сверху-вниз, слева-направо (рис. 3). В частности, некоторые из трапеций могут быть вырождены в треугольники, например, 1, 3, 12, 31.

Отрезок линии раздела, принадлежащий двум трапециям, будем называть **к о н т а к т о м**. В силу построения любые две трапеции разбиения могут иметь не более одного контакта, и любой контакт лежит на основании (нижнем или верхнем) контактирующей трапеции.

При обработке трапеции, оптимальной в указанном выше смысле, оказывается зигзагообразная траектория, ходы которой параллельны основаниям трапеции^{*)}. Чтобы получить близкую к оптимальной траекто-

^{*)} Если в критерий оптимальности ввести сумму углов изломов траектории или время торможения фрезы на участках реверса, то оптимальной может оказаться иная траектория.

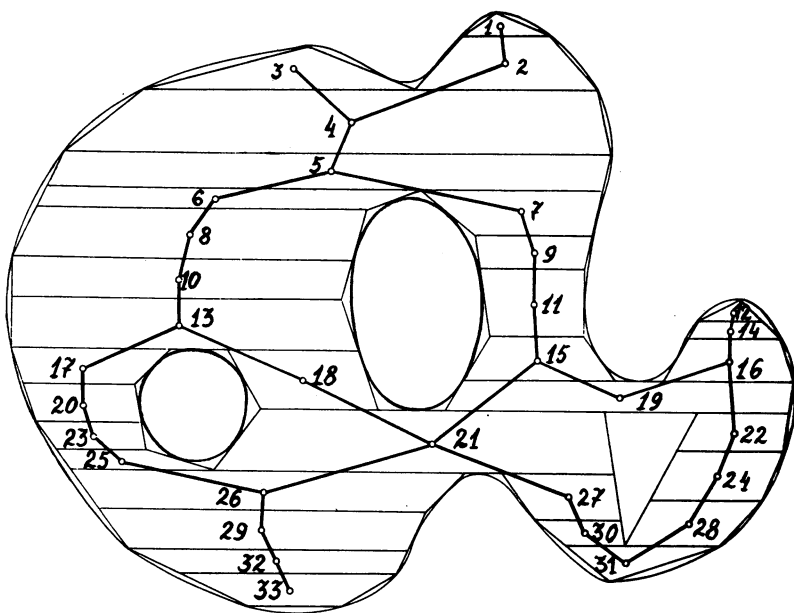


Рис. 3

рию в целом по области, нужно подобрать рациональную последовательность обхода трапеций разбиения. Если γ есть радиус фрезы оконтуривания, то кривая, γ -эквилистантная внутрь для границы первоначальной области, завершает полную траекторию обработки.

Поставим в соответствие разбиению неориентированный связный граф $G(X, A)$ так, что вершины $x_1, x_2, \dots, x_n$ (множество X) изображают трапеции разбиения, а ребра $a_1, a_2, \dots, a_n$ (множество A) изображают контакты. Если x_1 и x_2 - концевые вершины ребра a , то говорят, что вершины x_1, x_2 инцидентны ребру (или, что ребро a инцидентно вершинам x_1, x_2). В силу единственности контакта двух трапеций, любые две вершины могут быть инцидентны самое большее одному ребру, так что $G(X, A)$ является именно графом, а не мультиграфом (рис. 4а). В мультиграфе хотя бы одна пара вершин инцидентна более чем одному ребру. Для каждой трапеции разбиения найдем "центр" как точку, координаты которой есть среднее арифметическое соответствующих координат четырех вершин. В случае треугольника вершина, противоположная основанию, берется дважды.

Дадим определения некоторых понятий, относящихся к графам. Ребра, имеющие общую вершину, называются смежными, а количество этих ребер называют степенью вершины. Вершины, являющиеся концами некоторого ребра, называют смежными вершинами. Множество вершин, смежных некоторой вершине x_i , обозначают $\Gamma(x_i)$. Маршрут есть последовательность попарно смежных ребер $a_1, a_2, a_3, \dots, a_q$, где каждое ребро (кроме, быть может, первого и последнего) связано с предыдущим и последующим обоими своими концевыми вершинами. Цепь есть маршрут, в который любое ребро входит не более одного раза. Простая цепь есть цепь, где каждая вершина использована не более одного раза. Цикл есть замкнутая цепь. Цикл, исчерпывающий данный мультиграф, называется эйлеровым циклом.

В теории графов доказывается следующее утверждение: связный неориентированный мультиграф содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все вершины имеют четные степени.

Ребрам (x_i, x_j) графа $G(X, A)$ припишем положительные веса $c(x_i, x_j) = c_{ij}$, равные расстоянию между центрами контактирующих трапеций. Таким образом $G(X, A)$ станет графом со взвешенными ребрами. Вес маршрута (цепи, цикла) определяется как сумма весов ребер, по которым он проходит (с учетом кратности прохождения ребра).

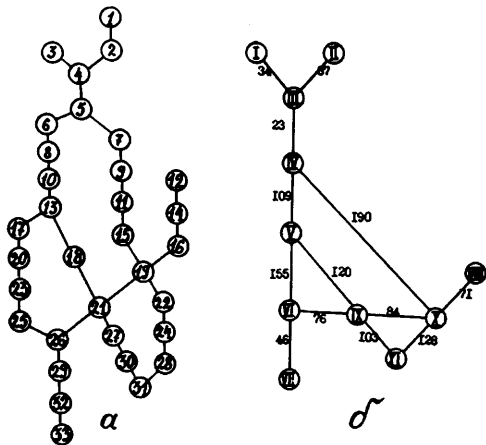


Рис. 4

Для цепи из двух ребер (x_{q-1}, x_q) и (x_q, x_{q+1}) преобразование стягивания вершин x_{q-1} и x_q состоит в замене их одной вершиной x и приписывании ребру (x, x_{q+1}) веса, равного сумме весов ребер (x_{q-1}, x_q) и (x_q, x_{q+1}) . Стягиванием смежных вершин степени не большей чем 2, граф G преобразуется в граф G (рис. 4,б). В неориенти-

рованном графе число вершин нечетной степени обязательно четно. В нашем примере это вершины с I-й по VII-ю. Редуцированный граф Q содержит топологическую информацию (число фундаментальных циклов) и метрическую информацию (длины ребер) об исходной области с криволинейной границей. С целью получения рациональной последовательности обхода трапеций разбиения будем искать замкнутый маршрут, проходящий через каждое ребро по меньшей мере один раз и такой, что его вес минимален. Это - задача китайского почтальона.

2. Поиск рационального обхода разбиения многоугольной области

В [1] конструктивно доказана разрешимость задачи китайского почтальона. Алгоритм решения задачи, приведенный в [2], опирается на методику решения нескольких подзадач, которые мы предварительно рассмотрим.

Подзадача I. Определение кратчайших цепей между вершиной z и всеми остальными вершинами графа со взвешенными ребрами.

Метод решения известен как алгоритм Дейкстры (по имени первооткрывателя). Вершинам x_i графа присваиваются временные числовые метки $\ell(x_i)$, указывающие верхнюю границу длины цепи от z к этой вершине и преобразующиеся по ходу работы алгоритма в постоянные $f(x_i)$. К той вершине, которая только что получила постоянную метку, переходит признак "ц" - центральная. Описание алгоритма таково.

Шаг 1. Дать временные метки $\ell(x_i) = \infty$ всем вершинам x_i кроме z . Вершине z дать постоянную метку $f(z) = 0$ и присвоить признак "ц".

Шаг 2. Для всех $x_i \in \Gamma(\text{ц})$, имеющих временные метки, изменить их по правилу

$$\ell(x_i) = \min[\ell(x_i), \ell(\text{ц}) + c(\text{ц}, x_i)], \quad (1)$$

где $c(\text{ц}, x_i)$ - вес ребра $(\text{ц}, x_i)$. Если таковых не оказалось, перейти к следующему шагу.

Шаг 3. Среди всех вершин графа, имеющих временные метки, найти такую x_i^* , для которой $\ell(x_i^*) = \min[\ell(x_i)]$.

Шаг 4. Превратить $\ell(x_i^*)$ в постоянную, $f(x_i^*) = \ell(x_i^*)$, а саму вершину x_i^* сделать центральной, $\text{ц} \rightarrow x_i^*$.

Шаг 5. Если в графе осталась хотя бы одна вершина с временной меткой, перейти к шагу 2. Иначе - останов.

Полученная в результате для каждой вершины постоянная метка $\ell(x_i)$ дает значение веса кратчайшей цепи от вершины s до вершины x_i . Сама кратчайшая цепь отыскивается последовательными переходами от вершины x_q к той вершине $x_{q+1} \in \Gamma(x_q)$, для которой $\ell(x_{q+1}) = \ell(x_q) - c(x_{q+1})$, т.е. как бы обратно к (1).

Для редуцированного графа, представленного на рис. 4,а, алгоритм Дейкстры, будучи семикратно применен, дает матрицу весов d_{ij} кратчайших цепей между вершинами нечетной степени (см. таблицу). Когда, например, в качестве s берется вершина $\bar{V}$, то после перво-

Т а б л и ц а 1. Результаты выполнения шага 2

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I		121	34	57	166	321	367	318
II	121		87	110	219	374	420	371
III	34	87		23	132	287	333	284
IV	57	110	23		109	264	310	261
V	166	219	132	109		155	201	275
VI	321	374	287	264	155		46	231
VII	367	420	333	310	201	46		277
VIII	318	371	284	261	275	231	277	

другие вершины графа получают, согласно правилу (1), следующие временные метки: $\ell_{IV} = 110$, $\ell_{VI} = 155$, $\ell_{IX} = 120$. Остальные вершины сохраняют $\ell = \infty$. Затем на шаге 4 метка четвертой вершины превращается в постоянную $\ell_{IV} =$

110 , а сама вершина становится центральной для следующего выполнения шага 2 и т.д.

Подзадача 2. 0 минимальном совершенном паросочетании.

Пусть D есть полный граф с четным числом $n = 2p$ вершин и взвешенными ребрами (полным называется граф, в котором присутствуют все возможные ребра (x_i, x_j) при $i \neq j$, всего $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер), веса d_{ij} — положительные числа, образующие симметрическую матрицу $\|d_{ij}\|$ без главной диагонали. Совокупность из p ребер, исчерпывающая все вершины и такая, что каждая вершина инцидентна ровно одному ребру, называется совершенным паросочетанием. Задача о минимальном совершенном паросочетании состоит в отыскании совершенного паросочетания, сумма весов ребер которого была бы минимальной.

Для случаев $n = 4$ и $n = 6$ все возможные совершенные паросочетания показаны на рис. 5. Число возможных совершенных паросочетаний в зависимости от количества вершин дается рекуррентным соотношением $M_n = (n-1) M_{n-2}$, откуда непосредственно следует выражение

$$M_n = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1). \quad (2)$$

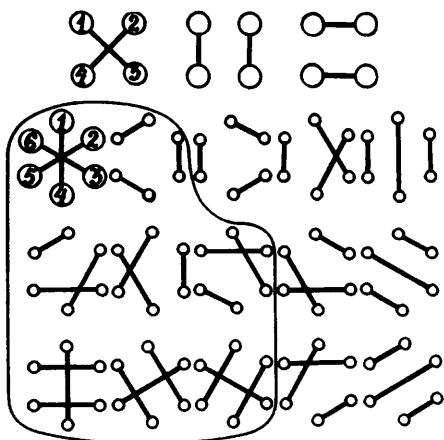


Рис. 5

Так, например, $M_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, $M_{10} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = 945$, $M_{12} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10395$ и т.д. С ростом n зависимость (2) опережает экспоненту. Подобное лавинообразное нарастание исключает полный перебор в качестве средства поиска. Существуют алгоритмы, дающие точное решение [1], однако они громоздки в реализации. В качестве компромисса можно предложить следующий алгоритм "усеченного перебора".

Шаг 1. В матрице $\|d_{ij}\|$ ищется наименьший элемент $d_{i_1 j_1}$, соответствующие вершины образуют пару (x_{i_1}, x_{j_1}) , а две строки и два столбца (в силу симметрии матрицы) вычеркиваются. Из оставшихся элементов снова ищется наименьший $d_{i_2 j_2}$, образуется вторая пара (x_{i_2}, x_{j_2}) , затем вычеркиваются строки и столбцы и т.д., пока после p -го раза не получится паросочетание M_n^0 , состоящее из пар $(x_{i_1}, x_{j_1}), (x_{i_2}, x_{j_2}), \dots, (x_{i_p}, x_{j_p})$.

Шаг 2. Перебираются сочетания по три элемента из M_n^0 (всего $\frac{p(p-1)(p-2)}{6}$), в каждом из которых участвуют шесть вершин. Для шести вершин согласно рис. 5 существует 15 вариантов совершенных паросочетаний M_6 , из которых перебором находится минимальное. Им заменяются три рассматриваемые пары в паросочетании M_n^0 , преобразуемом таким образом в паросочетание M_n^1 . Может оказаться, что исходные три пары уже давали минимальное M_6 , тогда M_n^1 совпадает с M_n^0 . Процесс продолжают до тех пор, пока в паросочетании M_n^k на всех $\frac{p(p-1)(p-2)}{6}$ шестерках вершин не будут достигнуты минимумы.

Шаг 3. Если M_n^k и M_n^0 совпадают, производится останов. Иначе — полагают M_n^0 совпадающим с M_n^k и возвращаются к шагу 2.

Останов можно производить (в зависимости от запаса времени) на любом выполнении шага 3.

Вообще говоря, алгоритм дает лишь приближенный результат. Этот компромисс представляется оправданным, поскольку рассматриваемая методика изначально содержит элементы эвристики: разбиение области на трапеции, способ "взвешивания" ребер. Применение алгоритма к матрице, представленной в таблице, дает паросочетание (I - II), (III - IV), (V - VШ), (VI - VII) с общим весом 465.

Подзадача 3. Об отыскании эйлерова цикла.

Если эйлеров цикл в мультиграфе существует, то он находится алгоритмом, предложенным Флэри. Правила этого алгоритма суть следующие: обход начинать с любой вершины, вычеркивать пройденное ребро, причем могут образовываться изолированные вершины, не проходить по ребру, если его удаление разбивает мультиграф на две связанные компоненты, каждая из которых содержит невычеркнутые ребра.

Теперь можно рассмотреть алгоритм для задачи китайского почтальона.

Шаг 1. Используя алгоритм подзадачи 1, образовать для множества вершин нечетной степени графа Q матрицу $\|d_{ij}\|$, где d_{ij} есть вес цепи наименьшего веса, идущей из вершины x_i в другую вершину x_j при всевозможных i, j .

Шаг 2. С помощью алгоритма подзадачи 2 найти оптимальное паросочетание M для полного графа D , имеющего $\|d_{ij}\|$ в качестве матрицы весов ребер.

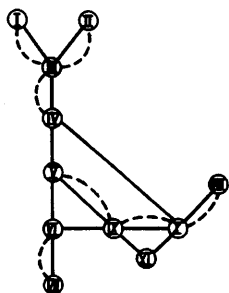


Рис. 6

Шаг 3. Для каждой пары сочetaющихся вершин x_α и x_β алгоритмом подзадачи 1 определить цепь $\mu_{\alpha\beta}$, соответствующую весу $d_{\alpha\beta}$. Ребра, составляющие все цепи из M , добавить в качестве искусственных к графу Q , получив при этом мультиграф $\tilde{Q}$, в котором гарантировано существование эйлерова цикла*).

Шаг 4. Пользуясь алгоритмом подзадачи 3, найти эйлеров цикл в мультиграфе $\tilde{Q}$. Применительно к графу, изображенному на рис. 4, б, алгоритм дает мультиграф $\tilde{Q}$ показанный на рис. 6, где искусственные реб-

*) Если для цепей $\mu_{\alpha\beta}$ и $\mu_{\gamma\delta}$ обнаружится общее ребро, эти цепи заменяются на цепи $\mu_{\alpha\gamma}$ и $\mu_{\beta\delta}$ с меньшим общим весом, в которые ребро уже не входит.

ра даны пунктиром. Оптимальный эйлеров цикл для мультиграфа $\tilde{G}$ определяется неоднозначно. Два таких цикла приведены на рис. 7.

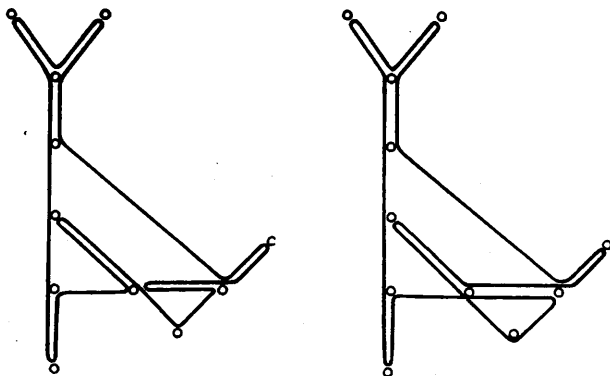


Рис. 7

Спецификой рассматриваемой задачи является то, что обработке на станке подлежат трапеции разбиения, а не их контакты. В исходном графе G нет необходимости проходить все ребра. Достаточно пройти хотя бы раз каждую вершину. Возвращаясь от редуцированного графа Q к исходному графу G , мы получим для него оптимальные (но уже не эйлеровы) циклы, на основании которых можно еще выбирать рациональный маршрут, содержащий все вершины. При этом полезно руководствоваться следующими правилами:

1. Начинать с вершины степени единица (если такая имеется), наиболее удаленной от ближайшего перекрестка.

2. Отмечать пройденные вершины, а из данной вершины следовать прежде всего в ту, куда ведет однократно проходимое ребро (если оно есть).

3. Исключать из последовательности обхода те циклы, которые целиком проходят по уже отмеченным вершинам.

4. Заканчивать обход, как только помечена последняя вершина.

Полученная в соответствии с этими правилами рациональная последовательность обхода вершин графа G (рис. 4) имеет вид: 1, 2, 4, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 17, 20, 23, 25, 26, 29, 32, 33, 32, 29, 26, 21, 18, 21, 27, 30, 31, 28, 24, 22, 19, 16, 14, 12, 14, 16, 19, 15, 11, 9, 7.

Отношение числа элементов подобной последовательности к числу вершин графа (в нашем примере оно равно 1,24) является показателем качества полученного решения. Топология графа G инвариантна относительно изменений разбиения области (за счет перемены направления разбивающих прямых и изменения аппроксимирующих многоугольников). Показатель качества получаемых при этом траекторий будет варьировать в незначительных пределах.

Намеченная здесь методика может быть распространена на поиск рациональной траектории фрезерования сложных областей на поверхностях, заданных параметрически. Имеется в виду применение методики в плоскости параметров с последующим отображением плоской траектории на поверхность. Другое направление возможного использования методики предоставляет фрезерование, допускающее переходы фрезы (по воздуху) между заданными точками сложной области. Формальное отличие этого случая состоит в том, что графы G и Q здесь не обязательно плоские. Поскольку планарность графов нигде по существу не использовалась, методика сохраняет силу и в этом случае, только "воздушные" участки результирующего маршрута должны быть снабжены метками.

Несомненно, практическая реализация методики потребует большого труда и подлинного искусства программирования особенно в той ее части, где необходимо реализовать переход от континуальной модели к дискретной. Хочется надеяться, что все затраты окупятся сторицей за счет экономии ресурса дорогостоящего оборудования.

Л и т е р а т у р а

1. СЕРДИКОВ А.И. О задаче нахождения минимального эйлера мультиграфа для связного графа со взвешенными ребрами. - В кн.: Управляемые системы. Новосибирск, 1974, вып. 12, с. 61-67.
2. КРИСТОФИДЕС Н. Теория графов, алгоритмический подход. - М.: Мир, 1978. - 432 с.

Поступила в ред.-изд.отд.
II марта 1981 года