

УДК 519.688:681.327

ЧИСЛЕННАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СЦЕН

В.А. Леус

1. 0 некоторых способах проецирования. Зрительный образ трехмерного мира создается в мозгу на основе анализа пары двумерных изображений, создаваемых глазной оптикой на сетчатке. С помощью фотокамеры подобные изображения фиксируются на плоской светочувствительной пластинке. В геометрическом смысле в обоих случаях имеет место центральное проецирование, т.е. отображение трехмерного объекта на двумерное пространство конусным пучком прямых. Образом трехмерного объекта при таком способе проецирования является перспективное изображение.

Пусть в пространственной системе координат (X, Y, Z) ось Z направлена от проекции к объекту, а центр проецирования F лежит на оси Z за объектом. Если на сфере с центром в F взять за начало координат точку P , где сферу пересекает отрицательная полуось Z , за координату u принять угол между плоскостью (Y, Z) и вертикальной плоскостью, проходящей через центр и точку на сфере, а за координату v — угол между плоскостью (X, Z) и плоскостью, проходящей параллельно оси X через центр и точку на сфере (рис. 1, а), то координаты u, v точки-образа при центральном проецировании можно получить через пространственные координаты точки-образа по формулам

$$u = \arcsin \left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + (Z - Z_F)^2}} \right), \quad v = \arcsin \left(\frac{Y}{\sqrt{Y^2 + (Z - Z_F)^2}} \right) \quad (I)$$

Когда центральное проецирование производится на плоскость (X, Y) и координаты u, v в картинной плоскости совпадают соответственно с X, Y (рис. 1, б), то выражения координат точки-обра-

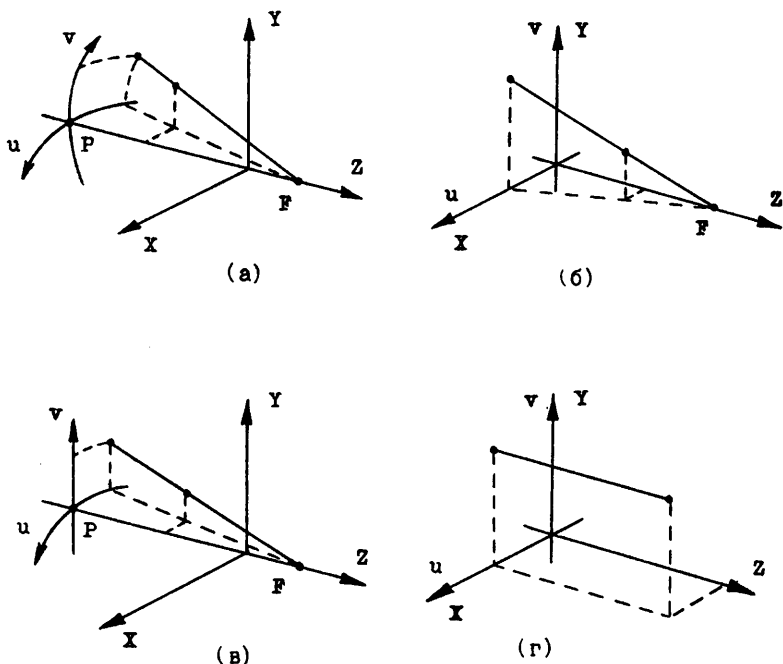


Рис. I

за через координаты точки-прообраза имеют вид

$$u = \left| \frac{Z_F}{Z - Z_F} \right| X, \quad v = \left| \frac{Z_F}{Z - Z_F} \right| Y. \quad (2)$$

В случае центрального проецирования на поверхность кругового цилиндра, ось которого проходит вертикально через центр F (рис. I, в), получается так называемое панорамное изображение. Угловая u и линейная v координаты точки на изображении выражаются через пространственные следующим образом

$$u = \arcsin \left(\frac{X}{\sqrt{X^2 + (Z - Z_F)^2}} \right), \quad v = \left| \frac{Z_F - Z_F}{Z - Z_F} \right| Y. \quad (3)$$

Если центр F расположен между проекцией и объектом, изображение оказывается перевернутым. Дополнительные два отражения в

плоскостях $X=0$ и $Y=0$ ставят изображение "на ноги", причем формулы (1)–(3) остаются в силе.

В технике применяются аксонометрические изображения, получающиеся за счет проецирования пространства на плоскость пучком параллельных прямых. Если ось Z задать параллельной пучку, а в качестве картиной плоскости взять плоскость $Z=0$ (рис. 1, г), то координаты проекции будут совпадать с соответствующими координатами точки-прообраза:

$$u = X, \quad v = Y. \quad (4)$$

Правые части формул (1)–(4) записаны с точностью до числового коэффициента, выполняющего роль масштабного множителя.

2. Изображение простейших объектов. Когда объект представляет собой конечную совокупность, содержащую n точек, построение его изображения тривиально: для этого необходимо и достаточно n раз применить формулы типа (1)–(4). Задача усложняется, если объектом является так называемая "проволочная конструкция", которая составлена из конечного числа пространственно расположенных линий с кусочно-непрерывной кривизной. В этом случае удобно использовать сплайн-интерполяцию пространственных кривых. На основании интерполяционных зависимостей линии заменяются достаточно густыми конечными последовательностями точек. Для каждой последовательности вычисляются проекции ее точек, и эти проекции связываются прямолинейными отрезками в ломанные линии. Полученные таким путем ломаные образуют приближенную проекцию "проволочной конструкции". Степень приближения кривой с помощью ломаной можно характеризовать отношением стрелки прогиба h дуги кривой к длине ℓ , стягивающей эту дугу хорды $\Delta = h/\ell$.

Взяв в качестве координатного репера сопровождающий трехгранник кривой в точке $\vec{r}_0$ и используя теилоровское разложение в этой точке нормальных координат текущей точки $\vec{r}$ как функций от касательной координаты, можно показать, что отношение h/ℓ (с точностью до малых высших порядков относительно величины $k \cdot \ell$) совпадает с подобным отношением у дуги окружности с кривизной $k=k_0$, где k_0 есть кривизна кривой в точке $\vec{r}_0$. Для окружности справедливо соотношение

$$\frac{h}{\ell} = \Delta = \frac{k\ell}{8} + O(k^3\ell^3),$$

откуда, пренебрегая малыми высших порядков, получаем:

$$\ell = \frac{8\Delta}{k}. \quad (5)$$

Если величину ℓ из (5) брать в качестве локального шага вдоль кривой, то с точностью до малых высших порядков будет обеспечено заданное значение Δ отношения h/ℓ .

Кривизна k' проекции, разумеется, не совпадает с кривизной k проецируемой кривой. Для того чтобы вдоль кривой выбирать шаг, обеспечивающий заданное Δ на проекции, необходимо учитывать взаимное расположение кривой, проецирующего луча и плоскости проекции. Введем обозначения: α, β, γ — углы между проецирующим лучом и соответственно касательной к кривой, нормалью кривой и нормалью плоскости проекции; δ — угол между плоскостью P , ортогональной к плоскости проекции и параллельной проецирующему лучу, и плоскостью, параллельной проецирующему лучу и касательной к кривой; φ — угол между плоскостью P и плоскостью, параллельной проецирующему лучу и нормали кривой. Проекция хорды ℓ' и проекция стрелки прогиба h' выражаются через ℓ и h формулами

$$h' = \left| \frac{h \sin \beta}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi} \right|, \quad \ell' = \left| \frac{\ell \sin \alpha}{\cos \gamma} \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi} \right|,$$

а отношение имеет вид

$$\frac{h'}{\ell'} = \frac{h}{\ell} \left| \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \delta}} \right|.$$

Чтобы получить заданное отношение $h'/\ell' = \Delta'$ нужно иметь

$$\frac{h}{\ell} = \Delta' \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}}.$$

Учитывая (5), получаем выражение для локального шага по кривой

$$\frac{8\Delta'}{k} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \delta}{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi}},$$

обеспечивающего заданное отношение h'/ℓ' на проекции.

3. Штриховое изображение непрозрачной поверхности. Физической реализацией ориентируемой поверхности (замкнутой или имеющей край) является тонкая, твердая, быть может непрозрачная, оболочка. Для того, чтобы математически моделировать подобные физические свойства оболочек, ис-

пользуем понятие ориентированного каркаса. Каркас на гладкой поверхности определяется через криволинейные координаты (u, v) как конечная совокупность координатных линий $u_i = \text{const}$, $v_j = \text{const}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. Каркасные линии образуют сетку, ячейки которой, вообще говоря, различны по величине. Пусть d обозначает диаметр наименьшего шара, в который может быть вложена любая ячейка. Тогда величина d характеризует густоту каркаса.

Одна совокупность каркасных линий зафиксирована в качестве первой, другая – в качестве второй, тем самым в каждом узле каркаса определена упорядоченная пара касательных векторов, то есть определен репер $\vec{\tau}'_u \wedge \vec{\tau}'_v$. Примем ориентацию этого репера в качестве положительной. Каркас вместе с положительной ориентацией есть ориентированный каркас. Вектор положительной нормали к каркасу в каждом узле определяется, естественно, как векторное произведение $[\vec{\tau}'_u \times \vec{\tau}'_v]$.

Используя сплайн-аппроксимацию поверхности, можно по исходному каркасу получить сколь угодно густой каркас, узлы которого будут участвовать в создании изображения. С точки зрения визуализации будем различать явный каркас, заданный первоначально, и неявный, т.е. составленный из линий загущения.

Для моделирования сегмента ориентируемой поверхности необходимы два ориентированных каркаса: по одному на каждую сторону. Неориентируемая поверхность ленты Мёбиуса моделируется одним ориентированным каркасом, наложенным сам на себя в два слоя с противоположно направленными нормальными.

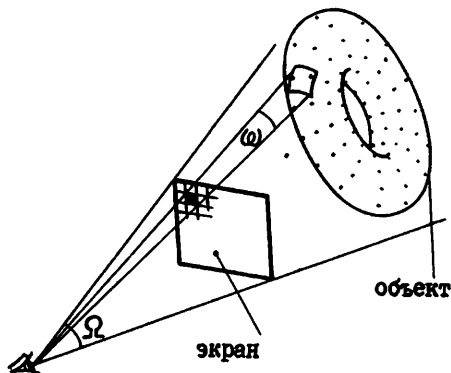


Рис. 2

Остановимся на центральном проецировании, дающем перспективное изображение. Как правило, экран устройства визуализации имеет прямоугольную форму, поэтому телесный угол Ω , в котором расположен моделируемый объект, берется в виде конуса прямоугольного сечения с вершиной в центре проекции. Это так называемая "пирамида видимости" (рис.2).

Телевизионный способ визуализации предполагает разложение изображения в упорядоченную по строкам и столбцам матрицу светящихся точек, называемых элементами раstra. Разобьем пирамиду видимости на элементарные телесные уголки ω по числу элементов раstra. С каждым ω_{ij} свяжем вещественную переменную ρ_{ij} , которая будет принимать значения расстояния от центра проецирования до ближайшего в данном направлении узла каркаса. Фиксируем малую положительную величину ε . Алгоритм построения штрихового изображения не-прозрачной поверхности состоит в следующем.

1. Всем ρ_{ij} присваивается значение ρ_{ij}^0 , равное максимальному в данной ЭВМ числу.

2. Для каждой линии каркаса перебираются лежащие на ней узлы. При этом определяется ω_{ij} , в который входит конкретный узел M , и вычисляется вектор $\vec{MF}$.

3. Если $|\vec{MF}| < \rho_{ij}$, то присваивается значение $\rho_{ij} = |\vec{MF}|$ и производится переход к пункту 4. Иначе ρ_{ij} сохраняет прежнее значение, узел помечается как невидимый и производится возврат на п. 2.

4. Вычисляется скалярное произведение $(\frac{\vec{MF}}{|\vec{MF}|}, \vec{n})$, численно равное косинусу угла ψ между нормалью в узле и направлением на центр проецирования. Если $|\cos \psi| < \varepsilon$, узел относится к разряду видимых, переходим к п. 6. Иначе - переход к п. 5.

5. Если $\cos \psi < -\varepsilon$, узел считается невидимым и производится возврат к п. 2. Если $\cos \psi > \varepsilon$, то производится проверка является ли данная линия явной. В случае неявной линии узел полагается невидимым и производится возврат к п. 2. В случае явной линии узел полагается видимым.

6. Образ видимого узла соединяется прямолинейным отрезком с образом предшествующего видимого узла, если этот узел соседствует с данным. (Видимый узел может оказаться начальным, конечным или промежуточным на видимом участке линии.) Возврат к п. 2.

По завершении перебора всех узлов на всех линиях полного каркаса получается штриховое перспективное изображение поверхности с удаленными невидимыми частями. Очерк объекта образуют изображения тех участков каркасных линий, для точек которых $|\cos \alpha| < \varepsilon$.

4. Тоновые изображения. По сравнению со штриховыми, тоновые изображения обладают гораздо большей естественностью, что достигается моделированием отражательных свойств и цвета поверхностей, а также условий освещения. Известна высокая ин-

формативность тоновых изображений. Черно-белое телеизображение, например, содержит не менее 10^7 бит информации. Большой объем имеет информация, описывающая поверхности объектов моделируемой трехмерной сцены. Криволинейные поверхности заменяют, как правило, многогранными с тем большим числом граней, чем "извилистее" поверхность [1]. Данные о многогранной поверхности хранятся в памяти ЭВМ в виде списковой структуры. Элементом структуры, описывающим локальные свойства поверхности, является грань с указанными оптическими характеристиками и отношением соседства с другими гранями. Оптическими параметрами грани являются цвет, отражательная способность и свойство прозрачности.

Из самых общих соображений ясно, что если N — количество локальных элементов в структуре данных, то для алгоритмического выделения видимых путем попарного сравнения граней необходимо затратить время, пропорциональное квадрату числа элементов $t \sim N^2$. При использовании визуализации как средства обратной связи в интерактивных системах, работающих в режиме реального времени, вопрос ускорения процесса численного синтеза изображения трехмерной сцены стоит особенно остро. Различные авторы благодаря искусным алгоритмическим приемам постепенно ослабляли зависимость времени счета от информативности данных. Было достигнуто $t \sim N^{3/2}$, затем — $t \sim N \log N$ и, наконец, $t \sim N$ [2]. Эта последняя зависимость представляет собой теоретический предел, однако положение не безнадёжно.

Дальнейшее сокращение времени счета возможно при условии перехода к параллельным вычислениям на многопроцессорных комплексах. В [3] предложено в качестве локального элемента описания поверхностей использовать так называемый дискретный элемент поверхности, содержащий координаты некоторой точки поверхности, компоненты вектора нормали и местные оптические параметры. С точки зрения распараллеливания процесса численного синтеза весьма важной оказывается независимость дискретных элементов друг от друга. Она выражается в отсутствии у каждого элемента ссылок на прочие. С другой стороны, поскольку телевизионные системы строятся на растровом принципе (разложение изображения в упорядоченную совокупность светящихся ячеек), то и численный синтез предлагается вести, основываясь на разбиении всего телесного угла Ω (пирамиды видимости), в котором расположен изображаемый объект, на малые телесные углы ω по числу ячеек раstra (рис. 2). При таком подходе взаимной сор-

тировке по глубине подвергаются только те дискретные элементы, точки которых "вырезаются" из объекта конусом ω .

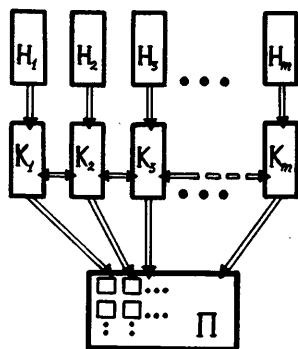


Рис. 3

Рассмотрим схему специализированного многопроцессорного вычислительного комплекса (рис. 3). В комплексе имеются m идентичных процессорных цепочек и общая память Π , модули которой соответствуют ячейкам раstra. Каждая процессорная цепочка состоит из двух процессоров – начального H и конечного K . Параллельный синтез изображения организуется следующим образом.

Все дискретные элементы задания объекта распределяются поровну между всеми H . Каждый H выбирает из своей внутренней памяти очередной дискретный элемент, вычисляет положение точки в пространстве относительно наблюдателя, ее проекцию на картинную плоскость, яркость соответствующей ячейки раstra и передает эти данные во внутреннюю память процессора K . Процессоры K , обмениваясь между собой, производят сортировку по глубине точек, попавших в один и тот же телесный угол ω . В процессе сортировки модули памяти Π заполняются значениями яркостей соответствующих ячеек раstra. По окончании обработки всех дискретных элементов задания в Π оказывается полная информация об изображении.

При сортировке фактически сравниваются расстояния от точек поверхности до точки наблюдения. Теоретически время обнаружения m процессорами наименьшего из m чисел пропорционально $\log m$. Так как на каждую цепочку приходится $\frac{N}{m}$ дискретных элементов поверхности, то время работы начальных процессоров оценивается величиной $\tau_1 \frac{N}{m}$, конечных – величиной $\tau_2 \frac{N}{m} \log m$, где коэффициенты τ_1 и τ_2 зависят от конкретной реализации. Оценкой общего времени синтеза изображения будет величина

$$t = \tau_1 \frac{N}{m} + \tau_2 \frac{N}{m} \log m = \frac{N}{m} (\tau_1 + \tau_2 \log m),$$

в которой логарифмический рост числителя нейтрализуется линейным (по m) знаменателем.

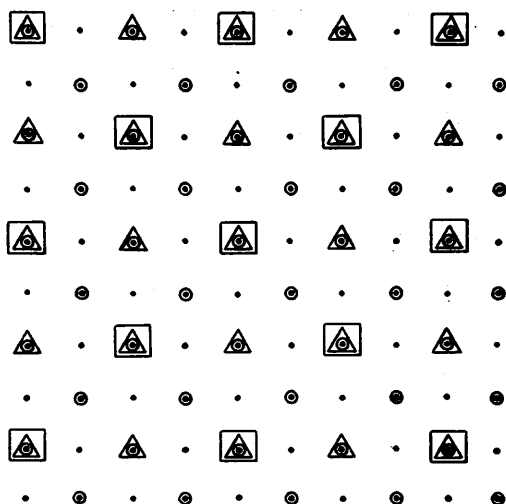


Рис. 4

нус ω попадает все больше и больше точек, тогда как для определения яркости соответствующей ячейки растра достаточно всего одной точки из локальной группы. Точечное задание поверхности схематически можно представить в виде квадратной сетки (рис. 4). Пусть точки помечены признаками $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ так; как показано на рис. 3, где первым четырем меткам соответствуют точка, круг, треугольник и квадрат. Таким образом получают несколько вложенных друг в друга дискретных заданий с прогрессивно убывающей плотностью

тью $d_k = \frac{d_0}{2^k}$. Учитывая удаленность локального участка поверхности

от точки наблюдения, можно брать для обработки точки, образующие сетку той или иной плотности. Подобный динамический выбор оптимальной густоты локальной группы точек будет экономить время счета.

Интересно отметить следующее обстоятельство. Переход к более редкому заданию неизбежно влечет потерю мелких деталей, что вполне соответствует естественному убыванию оптического разрешения подробностей при удалении объекта от наблюдателя. Кроме того, только за счет специальной организации данных здесь достигается эф-

Отсюда следует вывод о возможности сокращения времени синтеза путем увеличения количества процессорных цепочек вычислительного комплекса.

Рассмотрим вторую возможность сокращения времени, которую представляет дискретный способ задания поверхностей. Дело в том, что с удалением объекта от точки наблюдения в ко-

фekt дымки на глубинных планах изображения. Таким образом, без каких-либо дополнительных вычислительных затрат имитируется дисперсная рассеивающая среда между объектом и наблюдателем.

Л и т е р а т у р а

1. НЬЮМЕН У., СПРУЛЛ Р. Основы интерактивной машинной графики.-М.: Мир, 1976. - 573 с.
2. SUTHERLAND I.E., SPROULL R.F., SCHUMACHER R.A. A characterization of Ten Hidden-Surface Algorithms.- Computing Surveys, 1974, v.6, N 1, p.1-54.
3. КУЖУТОВ А.В., ЛЕУС В.А., ПОЛЕЩУК Н.С. Численный синтез тонового изображения освещенной поверхности и растровая визуализация. - Автометрия, 1978, № 5, с. 59-64.

Поступила в ред.-изд.отд.
16 апреля 1981 года