СПЛАЙН-ФУНКЦИИ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 86

УДК 514.8:519.651

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ В РАСЧЕТАХ МЕХАНИКИ ПЛОСКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СОПЛ

И.В. Лысак

1. В реальной конструкции любого плоского регулируемого сопла семейство его теоретических контуров воспроизводится соответствующим семейством упругих линий изгиба балки постоянной ширины, что обеспечивает непрерывный переход от одного контура к другому. Задача воспроизведения заданной кривой в виде упругой линии изгиба равносильна задаче нахождения нагрузок по заданной упругой линии. Точное решение такой задачи не представляет труда. Однако здесь оно смысла не имеет в силу непреодолимых трудностей его реализации в конкретных конструкциях сопл. Речь может идти об аппроксимации теоретического контура упругой линией изгиба балки, нагруженной сосредоточенными силами и моментами на ее концах и только сосредоточенными силами внутри пролета. При таком нагружении балки ее упругая линия описывается кубическим сплайном, дважды непрерывно дифференцируемым, с узлами в точках приложения сосредоточенных сил. Величина скачка третьей производной сплайна в узле пропорциональна величине сосредоточенной силы в той же точке. Это и приводит к задаче, которую можно сформулировать в следующей постановке.

2. Для значений параметра $M \in [M_н, M_к]$ задано на $[0, \ell]$ семейство функций $f(x,M)$, определяющих семейство кривых, причем $f(x,M)$ и $f'(x,M)$ на $[0,\ell]$ непрерывно дифференцируемы; $f''(x,M)$ и $f'''(x,M)$ удовлетворяют условиям Дирихле;

$$f(\ell,M) = H = \text{const}, \quad [f'(x,M)]^2 \ll 1.$$

Требуется, во-первых, семейство функций $f(x,M)$ аппроксимировать на $[0,\ell]$ семейством кубических сплайнов $S_3(x,M)$, обеспечив выполнение условий:

1) при $x=0$ и $x=\ell$ имеем $S_3^{(\tau)}(x,M)=f^{(\tau)}(x,M)$, $\tau=0,1$;

2) для любого $M\in[M_н,M_к]$ число узлов сплайна n и их расположение $0<x_1<x_2<\ldots<x_n=\ell$ одно и то же;

3) положение узлов сплайна должно быть таким, чтобы на множестве значений параметра $M\in[M_н,M_к]$ уклонение семейства сплайнов $S_3(x,M)$ от семейства функций $f(x,M)$ было минимальным (в некотором смысле).

Во-вторых, требуется решить задачу напряженного состояния и найти величины силовых факторов.

3. Условие 1) означает, что из множества возможных кубических сплайнов берутся лишь те, которые имеют вид

$$S_3(x,M)=H_3(x,M)+\sum_{i=1}^{n}a_i(M)\varphi_i(x,x_i),$$

где $H_3(x,M)$ – алгебраический интерполяционный многочлен Эрмита третьей степени такой, что при $x=0$ и $x=\ell$ верно $H_3^{(\tau)}(x,M)=f^{(\tau)}(x,M)$, $\tau=0,1$; $\varphi_i(x,x_i)$ – кубический сплайн, имеющий на $(0,\ell)$ один узел $x=x_i$ и удовлетворяющий условиям $\varphi_i(x_i,x_i)=1$,

$$\varphi^{(\tau)}(0,x_i)=\varphi^{(\tau)}(\ell,x_i)=0,\quad \tau=0,1.$$

Таким образом, в поставленной задаче речь идет об аппроксимации разности $\Delta f(x,M)=f(x,M)-H_3(x,M)$ сплайном

$$\Delta S_3(x,M)=\sum_{i=1}^{n}a_i(M)\varphi_i(x,x_i).$$

Функции $\varphi_i(x,x_i)$, $i=1,\ldots,n$, линейно-независимы. Как известно, для всякой функции $\Delta f(x,M)\in L_2(0,\ell)$ существует в $L_2(0,\ell)$ единственный элемент наилучшего приближения $\Delta S_3(x,M)$. Если вместо $\varphi_i(x,x_i)$, $i=1,\ldots,n$, ввести ортономированную систему функций $e_p(x,x_1,\ldots,x_p)$, $p=1,\ldots,n$, то этот элемент есть

$$\Delta S_3(x,M)=\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(M,x_1,\ldots,x_p)e_p(x,x_1,\ldots,x_p),$$

где $\alpha_p(M,x_1,\ldots,x_p)=(\Delta f,e_p)$ – коэффициенты Фурье.

Определим теперь $x_1,\ldots,x_n$ из условия минимума среднеквадратичного уклонения. Это эквивалентно нахождению

$$\min_{\{x_i\}}\left[\|\Delta f(x,M)\|_{L_2}-\sum_{p=1}^{n}\alpha_p^2(M,x_1,\ldots,x_p)\right],$$

что приводит к системе

$$\sum_{p=i}^{n} \alpha_p(M, x_1, \ldots, x_p) \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Эти уравнения определяют систему функций $x_i = x_i(M)$, $i = 1, \ldots, n$, $M \in [M_н, M_к]$*). Каждую из них можно аппроксимировать константой x_i, дающей наилучшее приближение в метрике $C[M_н, M_к]$, $L[M_н, M_к]$ или $L_2[M_н, M_к]$. Тогда

$$S_3(x, M) = H_3(x, M) + \sum_{p=1}^{n} \alpha_p(M, x_1, \ldots, x_p) e_p(x, x_1, \ldots, x_p)$$

представляет искомое семейство сплайнов.

4. Интерес представляет случай, когда $\ell = \ell(M)$ есть монотонно возрастающая функция. Здесь практическая реализация результата может быть достигнута лишь при дополнительном условии: $\Delta S_3''(x, M)\big|_{x=\ell(M)} = 0$. В таком случае приходится иметь дело с задачей аппроксимации разности $\Delta f(x, M) = f(x, M) - \Phi(x, M, x_n)$ сплайном $\Delta S_3(x, M) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(M) \varphi_i(x, x_n, x_i)$. Здесь $\Phi(x, M, x_n)$ - кубический сплайн, имеющий на $(0, \ell)$ один узел $x = x_n$ и удовлетворяющий условиям $\Phi^{(\tau)}(0, M, x_n) = \Phi^{(\tau)}(\ell, M, x_n) = 0$ $(\tau = 0, 1)$, $\Phi''(\ell, M, x_n) = 0$; $\varphi_i(x, x_n, x_i)$ - кубический сплайн, имеющий на $(0, \ell)$ два узла: $x = x_i$ и $x = x_n$ и удовлетворяющий условиям $\varphi_i(x_i, x_n, x_i) = 1$, $\varphi_i^{(\tau)}(0, x_n, x_i) = \varphi_i^{(\tau)}(\ell, x_n, x_i) = 0$, $\tau = 0, 1$.

Как в п. 3, переходим к ортонормированной системе функций $e_{np}(x_n, x_1, \ldots, x_p)$, $p = 1, \ldots, n-1$. Обозначая $\alpha_{np}(M, x_n, x_1, \ldots, x_p) = (\Delta f, e_p)$ и повторяя рассуждения, приходим к системе уравнений для определения n функций, $x_i = x_i(M)$:

$$\sum_{p=1}^{n-1} \alpha_{np} \frac{\partial \alpha_{np}}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{p=1}^{n-1} \alpha_{np} \frac{\partial \alpha_{np}}{\partial x_n} - \|\Delta f\|_{L_2} \frac{\partial(\|\Delta f\|_{L_2})}{\partial x_n} = 0.$$

---

*) Примечание редактора: неявно предполагается, что семейство $f(x, M)$ таково, что для любого M справедливы неравенства $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \ell$.

Полученные функции снова аппроксимируются константами x_i, $i=1,\ldots,n$. Семейство сплайнов для этого случая есть

$$S_3(x,M)=\Phi(x,M,x_n)+ \\ +\sum_{p=1}^{n-1}\alpha_{np}(M,x_n,x_1,\ldots,x_p)e_p(x,x_n,\ldots,x_p),$$

5. Если при $x=x^*$ и $M=M^*$ величина $|S_3''(x,M)|=|S_3''(x^*,M^*)|$ достигает наибольшего значения, то предельная высота гибкой стенки сопла $h=[h]$ будет равна

$$[h]=\frac{2(1-\mu^2)[\sigma]}{E|S_3''(x^*,M^*)|},$$

где μ - коэффициент Пуассона, σ - допускаемое напряжение на изгиб и E - модуль упругости материала стенки. При этом для стенки единичной ширины величины сосредоточенных сил на границах отрезка $(0,\ell)$ и в точках x_i, $i=1,2,\ldots,n$, будут равны:

$$Q_л(M)=Q(0+0,M)=\frac{2}{3}\frac{(1-\mu^2)^2[\sigma]^3}{E^2|S_3''(x^*,M^*)|^3}S_3'''(0+0,M),$$

$$Q_{пр}(M)=Q(\ell-0,M)=\frac{2}{3}\frac{(1-\mu^2)^2[\sigma]^3}{E^2|S_3''(x^*,M^*)|^3}S_3'''(\ell-0,M),$$

$$Q_i(M)=-\frac{2}{3}\frac{(1-\mu^2)^2[\sigma]^3}{E^2|S_3''(x^*,M^*)|^3}\left\{S_3'''(x_i-0)-S_3'''(x_i+0)\right\},$$

а величины изгибающего момента и наибольших напряжений изгиба в сечении с абсциссой x будут соответственно равны

$$M_{изг}(x,M)=\frac{2}{3}\frac{(1-\mu^2)^2[\sigma]^3}{E^2|S_3''(x^*,M^*)|^3}S_3''(x,M),$$

$$\sigma_{изг}(x,M)=[\sigma]\frac{S_3''(x,M)}{|S_3''(x^*,M^*)|}.$$

Поступила в ред.- изд. отд.
20 марта 1981 года