МЕТОДЫ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ
(Вычислительные системы)
1981 год Выпуск 87

УДК 517.518.8

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ЧЕРЕЗ В-СПЛАЙНЫ

Т.Жанлав

Пусть $W^4_\infty[a,b]$ - класс функций $f(x)$ таких, что $f'''(x)$ абсолютно непрерывна на $[a,b]$, а $f^{IV}(x) \in L_\infty[a,b]$. Обозначим через $S(x) = S(x,f)$ кубический сплайн класса $C^2[a,b]$, интерполирующий функцию $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ на сетке Δ: $a=x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots, < x_N = b$ и удовлетворяющий одному из краевых условий:

1) $S'(a) = f'(a)$, $S'(b) = f'(b)$,

2) $S''(a) = f''(a)$ $S''(b) = f''(b)$,

3) $S^{(k)}(a) = S^{(k)}(b)$, $k = 1,2$.

Сплайн $S(x)$ можно представить в виде разложения по базису из нормализованных В-сплайнов [I]. Для этого дополним сетку Δ точками $x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0$, $x_N < x_{N+1} < x_{N+2} < x_{N+3}$. Тогда

$$S(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \alpha_j B_j(x) . \tag{I}$$

Коэффициенты α_j представления (I) вычисляются из трехдиагональной системы [I].

Целью настоящей работы является нахождение таких приближенных явных формул для α_j, что использование их в (I) вместо точных значений не приводит к снижению порядков приближения. Мы также получим оценки погрешности приближения сплайнами, которые строятся путем замены точных значений α_j в (I) приближенными.

В силу (I) справедливы соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
B_{k-1}(x_k)\alpha_{k-1} + B_k(x_k)\alpha_k + B_{k+1}(x_k)\alpha_{k+1} &= S_k ,\\
B'_{k-1}(x_k)\alpha_{k-1} + B'_k(x_k)\alpha_k + B'_{k+1}(x_k)\alpha_{k+1} &= m_k ,\\
B''_{k-1}(x_k)\alpha_{k-1} + B''_k(x_k)\alpha_k + B''_{k+1}(x_k)\alpha_{k+1} &= M_k ,
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$k = 0,\dots, N,$$

где $m_k = S'(x_k)$, $M_k = S''(x_k)$.

Решая эту систему при каждом фиксированном k, получаем

$$\alpha_{k-1} = S_k - \frac{2h_{k-1}+h_{k-2}}{3} m_k + \frac{h_{k-1}(h_{k-2}+h_{k-1})}{6} M_k , \qquad (3,а)$$

$$\alpha_k = S_k + \frac{h_k - h_{k-1}}{3} m_k - \frac{h_k h_{k-1}}{6} M_k , \qquad (3,б)$$

$$\alpha_{k+1} = S_k + \frac{2h_k + h_{k+1}}{3} m_k + \frac{h_k(h_k + h_{k+1})}{6} M_k . \qquad (3,в)$$

Условия непрерывности $S(x)$ и $S'(x)$ в точке x_i имеют вид:

$$S_k = S_{k-1} + h_{k-1} m_{k-1} + \frac{h^2_{k-1}}{2} M_{k-1} + \frac{h^2_{k-1}}{6}(M_k - M_{k-1}),$$

$$m_k = m_{k-1} + h_{k-1} M_{k-1} + \frac{h_{k-1}}{2}(M_k - M_{k-1}) .$$

Подставляя выражения S_k, m_k в (3,а), получаем

$$\alpha_{k-1} = S_{k-1} + \frac{h_{k-1} - h_{k-2}}{3} m_{k-1} - \frac{h_{k-1} h_{k-2}}{6} M_{k-1} .$$

Аналогичным образом можно преобразовать равенство (3,в):

$$\alpha_{k+1} = S_{k+1} + \frac{h_{k+1} - h_k}{3} m_{k+1} - \frac{h_{k+1} h_k}{6} M_{k+1} .$$

Таким образом, решение системы (2) для всех $k=0,\dots,N$ определяется единообразной формулой (3,б).

Для коэффициентов α_{-1}, α_{N+1} аналогичное преобразование невозможно, и поэтому они определяются соответственно формулами (3,а), (3,в) при $k=0$ и $k=N$.

Известны (см. [1,2]) оценки погрешности интерполяции

$$\| S^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_\infty \le K_r H^{4-r} \| f^{IV} \|_\infty , \quad r=0,1,2, \tag{4}$$

где $K_0 = \dfrac{5}{384}$, $K_1 = \dfrac{1}{24}$, $K_2 = \dfrac{13}{72}$, $H = \max\limits_i h_i$, $h_i = x_{i+1} - x_i$.

В дальнейшем нам удобно будет считать, что $h_{-2} = h_{-1} = \omega h_0$, $h_{N+1} = h_N = h_{N-1}\omega$, $\omega > 0$. Если учесть оценки (4), то из формул (3) видно, что в качестве приближенных значений α_k можно взять

$$\tilde{\alpha}_{-1} = f_0 - \omega h_0 f_0' + \frac{h_0^2 \omega^2}{3} f_0'', \tag{5,а}$$

$$\tilde{\alpha}_k = f_k + \frac{h_k - h_{k-1}}{3} f_k' - \frac{h_k h_{k-1}}{6} f_k'', \quad k=0,\dots,N, \tag{5,б}$$

$$\tilde{\alpha}_{N+1} = f_N + \omega h_{N-1} f_N' + \frac{h_{N-1}^2 \omega^2}{3} f_N''. \tag{5,в}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Легко показать, что формулы (5) остаются в силе, когда $f(x) \in C^2W_\infty^4[a,b]$, где $C^2W_\infty^4[a,b]$ - класс функций $f(x)$ таких, что $f(x) \in C^2[a,b]$ и $f(x) \in W_\infty^4[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,N-1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $f(x)$ - периодическая с периодом $b-a$ функция, то коэффициенты α_k, $\tilde{\alpha}_k$ для всех $k = -1,0,\dots,N+1$ определяются формулами (3,б), (5,б).

Производные, входящие в (5), можно заменить разностными выражениями:

$$f_k' \approx \frac{1}{h_k + h_{k-1}} \left[h_{k-1} \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} + h_k \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} \right],$$

$$f_k'' \approx \frac{2}{h_k + h_{k-1}} \left[\frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} \right], \quad k=1,\dots,N-1.$$

В итоге получим

$$\hat{\alpha}_k = f_k + \frac{1}{3(h_k+h_{k-1})}\left[h_k^2 \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} - h_{k-1}^2 \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} \right], \quad k=1,\dots,N-1. \tag{6}$$

Несколько сложнее обстоит дело, когда $k = -1,0,N,N+1$. Здесь рекомендуется приближенные значения f_0', f_0'', f_N', f_N'' вычислять путем дифференцирования интерполяционных многочленов Лагранжа (в форме Ньютона), интерполирующих соответственно значения f_0, f_1, f_2, f_3 и $f_{N-3}, f_{N-2}, f_{N-1}, f_N$.

В целях упрощения дальнейших выкладок предположим, что f_0', f_0'', f_N', f_N'' заданы и

$$\hat{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_k, \quad k = -1,0,N,N+1. \tag{7}$$

Таким образом, у нас имеются два сплайна

$$\tilde{S}(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \tilde{\alpha}_j B_j(x), \quad \hat{S}(x) = \sum_{j=-1}^{N+1} \hat{\alpha}_j B_j(x),$$

где $\tilde{\alpha}_j$ определяются формулами (5), а $\hat{\alpha}_j$ – формулами (6), (7). Заметим, что сплайн $\tilde{S}(x)$ совпадает с квазиинтерполяционным сплайном [3,4]. Там же установлены порядки сходимости для квазиинтерполяционных сплайнов.

Сплайн $\hat{S}(x)$, коэффициенты которого определяются (6), называется локально аппроксимационным сплайном. В [I] для равномерной сетки установлены оценки приближения таким сплайном. Здесь мы изучим погрешность приближения сплайнами $\tilde{S}(x)$, $\hat{S}(x)$ на произвольной неравномерной сетке.

ТЕОРЕМА I. Если $f(x) \in C^2W^4_\infty[a,b]$ и $\omega \le 1$, то

$$\| \tilde{S}^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\|_\infty \le \tilde{K}_r H^{4-r} \| f^{IV} \|_\infty, \quad r=0,1,2,3, \tag{8}$$

где

$$\tilde{K}_0 = \frac{7}{128}, \tilde{K}_1 = \frac{3}{16}, \quad \tilde{K}_2 = \frac{1}{4}, \quad \tilde{K}_3 = \frac{1}{4} \max\left\{3, \frac{\beta^2+2}{\beta}\right\}, \quad \beta = \frac{H}{\min\limits_i h_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S(x)$ – интерполяционный кубический сплайн для функции $f(x)$, удовлетворяющий краевым условиям 2 (см. с. 3). Тогда

$$\| \tilde{S}(x) - f(x) \|_C \le \| \tilde{S} - S\|_C + \| S - f\|_C. \tag{9}$$

Для $\| S - f\|_C$ имеет место оценка (4). Поэтому достаточно оценить $\| \tilde{S} - S\|_C$. Согласно [I,2], имеем

$$| m_i - f_i' | \le \frac{H^3}{24} \| f^{IV}\|_\infty, \quad | M_i - f_i'' | \le \frac{H^2}{6}\|f^{IV}\|_\infty, \ i=0,\dots,N, \tag{10}$$

Тогда, в силу (3,б), (5,б) и (I0), получаем

$$| \alpha_k - \tilde{\alpha}_k | \le \frac{H^4}{24} \| f^{IV} \|_\infty, \ k = 0,\dots, N. \tag{II}$$

Если учесть, что $S(x)$ удовлетворяет условию 2, то из (3,а,в), (5,а,в) и (I0) вытекает, что

$$|\alpha_j - \tilde{\alpha}_j| \le \frac{\omega H^4}{24}\| f^{IV} \|_\infty , \qquad j = -1,\ N+1 . \tag{I2}$$

Используя (II), (I2) и учитывая, что $\omega \le 1$, получаем

$$\| \tilde{S} - S\|_C \le \sum_{j=-1}^{N+1} |\tilde{\alpha}_j - \alpha_j| B_j(x) \le \frac{H^4}{24}\| f^{IV}\|_\infty \sum_{j=-1}^{N+1} B_j(x) = \frac{H^4}{24} \|f^{IV}\|_\infty . \tag{I3}$$

Объединяя (4), (9) и (I3), приходим к (8) при $r = 0$. Обозначим $\tilde{m}_i = \tilde{S}'(x_i)$, $\tilde{M}_i = \tilde{S}''(x_i)$. Тогда

$$\tilde{M}_i = B''_{i-1}(x_i)\tilde{\alpha}_{i-1} + B''_i(x_i)\tilde{\alpha}_i + B''_{i+1}(x_i)\tilde{\alpha}_{i+1} .$$

Отсюда, применяя разложение функции по формуле Тейлора в точке x_i с остаточным членом в интегральной форме, получаем для $\tilde{M}_i$, $i = 1,\dots, N-1$, выражение

$$\tilde{M}_i = f''_i + \frac{1}{h_i + h_{i-1}}\left\{ \frac{h^3_{i-1}}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} \int_0^1 (h_{i-2} + th_{i-1})t(1-t)f^{IV}(\xi_i)dt - \right.$$

$$\left. - \frac{h_i^3}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}} \int_0^1 (h_{i+1} + th_i)t(1-t)f^{IV}(\eta_i)dt \right\}, \tag{I4}$$

где $\xi_i = x_{i-1} + h_{i-1}t$, $\eta_i = x_{i+1} - th_i$.

Из (I4), используя неравенство Гёльдера

$$\int_a^b |\varphi(x)\ q(x)|\,dx \le \|\varphi\|_{L_\infty} \cdot \|q\|_{L_1},$$

получаем

$$|\tilde{M}_i - f''_i| \le \frac{1}{12(h_i + h_{i-1})}\left\{\frac{h^3_{i-1}(2h_{i-2} + h_{i-1})}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i} + \frac{h_i^3(2h_{i+1} + h_i)}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}}\right\}\| f^{IV}\|_\infty$$

Нетрудно показать, что

$$\max\left(\frac{h^2_{i-1}(2h_{i-2} + h_{i-1})}{h_{i-2} + h_{i-1} + h_i},\ \frac{h_i^2(2h_{i+1} + h_i)}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}}\right) \le \frac{3}{2}H^2 .$$

Следовательно,

$$|\tilde{M}_i - f''_i| \le \frac{H^2}{8}\| f^{IV} \|_\infty, \qquad i = 1,\dots, N-1 . \tag{I5}$$

Если учесть (3,а) и (3,в) соответственно при $k=0$ и $k=N$, то аналогичным образом можно показать справедливость оценки (I5) при $i=0$ и $i=N$. Следует отметить, что она верна при любом $\omega > 0$. Теперь, если учесть (I5), то в силу леммы 3 из [2] имеем

$$\| \tilde{S}''(x) - f''(x) \|_C \le \frac{H^2}{4} \| f^{IV} \|_\infty , \tag{I6}$$

что показывает справедливость (8) при $r=2$.

Используя аналогичную технику, как в оценке для $\tilde{M}_i - f''_i$, получаем

$$| \tilde{m}_i - f'_i | \le \frac{H^3}{16} \| f^{IV} \|_\infty , \quad i=0,\dots,N. \tag{I7}$$

Пусть $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $x - x_i = th_i$. По теореме Лагранжа, имеем

$$\tilde{S}'(x) - f'(x) = \tilde{m}_i - f'_i + (\tilde{S}''(\xi) - f''(\xi)) th_i, \quad 0 \le \xi \le t. \tag{I8}$$

Без ограничения общности можно считать, что $0 \le t \le 1/2$, ибо если $1/2 \le t \le 1$, то вместо (I8) можно взять соотношение

$$\tilde{S}'(x) - f'(x) = \tilde{m}_{i+1} - f'_{i+1} - (\tilde{S}''(\eta) - f''(\eta))(1-t)h_i, \quad 1-t \le \eta \le 1.$$

Учитывая (I6), (I7), из (I8) получаем

$$| \tilde{S}'(x) - f'(x)| \le | \tilde{m}_i - f'_i| + \frac{h_i}{2} \| \tilde{S}'' - f'' \|_C \le \frac{3H^3}{16} \| f^{IV} \|_\infty ,$$

т.е. оценка (8) верна при $r=1$. Наконец,

$$| \tilde{S}''' (x) - f''' (x)| = \left| \frac{\tilde{M}_{i+1} - \tilde{M}_i}{h_i} - f''' (x) \right| \le \left| \frac{\tilde{M}_{i+1} - f''_{i+1}}{h_i} \right| + \left| \frac{\tilde{M}_i - f''_i}{h_i} \right| +$$

$$+ \left| f''' (x) - \frac{f''_{i+1} - f''_i}{h_i} \right| \le \frac{2}{h_i} \max_i | \tilde{M}_i - f''_i | + \frac{h_i}{2} \| f^{IV} \|_\infty .$$

Отсюда используя оценку (I5), получаем

$$\| \tilde{S}''' (x) - f''' (x) \|_\infty \le \frac{H}{4} \left(\frac{H}{h_i} + \frac{2h_i}{H} \right) \| f^{IV} \|_\infty \le \frac{H}{4} \max \left\{ 3, \frac{\beta^2 + 2}{\beta} \right\} \| f^{IV} \|_\infty .$$

Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ и $\omega \le 1$, то имеют место оценки:

$$\| \hat{S}^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \|_\infty \le \hat{K}_r H^{4-r} \| f^{IV} \|_\infty, \quad r = 0,1,2,3, \tag{19}$$

где $\hat{K}_0 = \dfrac{79}{1152}$, $\hat{K}_1 = \dfrac{13}{48}$, $\hat{K}_2 = \dfrac{1}{3}$, $\hat{K}_3 = \dfrac{1}{12} \max\left\{ 11, \dfrac{5\beta^2 + 6}{\beta} \right\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем неравенство

$$\| \hat{S} - f \|_C \le \| S - f \|_C + \| \hat{S} - \tilde{S} \|_C + \| \tilde{S} - S \|_C . \tag{20}$$

Используя разложение $f(x) \in W^4_\infty[a,b]$ по формуле Тейлора в точке x_k, из формул (5,б), (6) получаем

$$| \hat{\alpha}_k - \tilde{\alpha}_k | \le \frac{H^4}{72} \| f^{IV} \|_\infty, \quad k = 1, \dots, N-1 . \tag{21}$$

Следовательно, учитывая (7), (21), имеем

$$\| \hat{S} - \tilde{S} \|_C \le \max_{-1 \le j \le N+1} | \hat{\alpha}_j - \tilde{\alpha}_j | \le \frac{H^4}{72} \| f^{IV} \|_\infty . \tag{22}$$

Оценка (19) при $r=0$ вытекает из (20), если учесть (4), (13) и (22). Обозначим $\hat{m}_i = \hat{S}'(x_i)$, $\hat{M}_i = \hat{S}''(x_i)$. Используя (21), получаем

$$| \hat{M}_i - \tilde{M}_i | \le |B''_{i-1}(x_i)|\,|\hat{\alpha}_{i-1} - \tilde{\alpha}_{i-1}| + |B''_i(x_i)|\,|\hat{\alpha}_i - \tilde{\alpha}_i| + |B''_{i+1}(x_i)|\,|\hat{\alpha}_{i+1} - \tilde{\alpha}_{i+1}| \le$$

$$\le \frac{1}{12(h_i + h_{i-1})} \left[h^2_{i-1} \frac{h_i^2 + h_{i-2}^2}{h_i + h_{i-2}} + h_i^2 \frac{h^2_{i-1} + h^2_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} \right] \| f^{IV} \|_\infty .$$

Если учесть, что $(h_k^2 + h_i^2)(h_k + h_i)^{-1} \le \max(h_k, h_i)$, то

$$| \hat{M}_i - \tilde{M}_i | \le \frac{H^2}{12} \| f^{IV} \|_\infty, \quad i = 2, \dots, N-2 . \tag{23}$$

В силу (7) аналогичные оценки имеют место и для $i = 0,1,N-1, N$. Теперь из (15) и (23) вытекает

$$| \hat{M}_i - f''_i | \le | \hat{M}_i - \tilde{M}_i | + | \tilde{M}_i - f''_i | \le \frac{5H^2}{24} \| f^{IV} \|_\infty, \quad i=0,\dots,N. \tag{24}$$

Таким образом, согласно (24) и лемме 3 из [2], имеем

$$\| S''(x) - f''(x)\|_C \le \frac{H^2}{3}\| f^{IV}\|_\infty ,$$

т.е. верна оценка (I9) при $r = 2$.

Аналогично получается оценка

$$|\hat{m}_i - \tilde{m}_i| \le \frac{H^3}{2!}\| f^{IV}\|_\infty , \quad i = 0,\dots, N. \tag{25}$$

Тогда, в силу (I7) и (25), имеем

$$|\hat{m}_i - f'_i| \le |\hat{m}_i - \tilde{m}_i| + |\tilde{m}_i - f'_i| \le \frac{5H^3}{48}\| f^{IV}\|_\infty , \quad i=0,\dots,N . \tag{26}$$

Теперь для получения оценки (I9) при $r = 1,3$ достаточно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы I. Мы их опускаем.

Далее, нетрудно заметить, что в оценках (I5) и (24) величина H фактически равна $\max(h_{i-2}, h_{i-1}, h_i, h_{i+1})$, и, следовательно, в теоремах I и 2 можно считать $\beta = \max\limits_i \{(\max\limits_{|i-j|\le 2} h_j) h_i^{-1}\}$. Если $f(x)$ - периодическая с периодом $b-a$ функция, то из замечания 2 видно, что теоремы I и 2 верны для любого $\omega > 0$. В непериодическом случае они верны при $r = 1,2,3$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Ю.С.Завьялову и В.Л.Мирошниченко за ценные замечания и неоднократные обсуждения работы.

Литература

I. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. -М.: Наука, 1980. - 350 с.

2. ЖАНЛАВ Т. Некоторые оценки приближения вторых производных с помощью кубических интерполяционных сплайнов. -В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 81).Новосибирск,1979, с. I2-2I.

3. BOOR C.de., FIX G.I. Spline approximation by quasiinter - polants. - J.Approximation Theory,1973,v.8,N 1,p.19-45.

4. BOOR C.de. A Practical Guide to splines.- New York: Springer-Verlag,1978.- 392 p.

Поступила в ред.-изд.отд.
20 октября I980 года